# Über die an Eisenkörpern im Magnetfelde wirksamen Oberflächenspannungen

Dr. **Gottlieb Adler,**

*Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.*

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. October 1892.)

## §. 1

Die mechanische Kraftwirkung, die einen magnetisch polarisirbaren Körper im Magnetfelde translatorisch angreift, wird gewöhnlich nach dem Princip der virtuellen Verschiebungen aus dem Ausdrucke seiner magnetischen Energie abgeleitet. Man kann dabei in zweifacher Weise verfahren. Die Rechnung kann erstens verfolgen, was mit den einzelnen materiellen Theilen des Körpers bei einer virtuellen Verschiebung geschieht; für eine derartige Betrachtungsweise wird jedes einzelne Körperelement zur eingetretenen Energieänderung beitragen und daher auch folgerichtig als Träger der mechanischen Kraftwirkung resultiren. Haftet hingegen zweitens das rechnerische Verfahren wesentlich daran, was in den einzelnen Raumpunkten des magnetischen Feldes bei einer virtuellen Verschiebung vorgeht, dann wird als Sitz der wesentlichen Energieänderung und damit als der der wirksamen mechanischen Kräfte die Oberfläche des Körpers sich präsentiren.

Im Einschlagen letzteren Verfahrens haben nun Helmholtz[1] und Kirchhoff[2] gezeigt, dass, wenn für einen mag-

---

[1] Siehe: Helmholtz, Ges. Abth. I., S. 810, Wied. Ann. 13., 1881, 385—406.

[2] Siehe: Kirchhoff, Wied. Ann., Bd. 24, 1885, S. 66. Vorlesungen über mathematische Physik III. Band, 14. Vorlesung, S. 170—180.

netisch polarisirten Körper die Magnetisirungszahl $k$ desselben in seiner ganzen Ausdehnung ein und denselben Werth hat, die Gesammtheit der denselben im Magnetfelde translatorisch angreifenden mechanischen Kräfte ersetzt werden kann durch lediglich an seiner Oberfläche thätige Druckkräfte. Ist hingegen die Magnetisirungszahl in verschiedenen Punkten der magnetischen Substanz von verschiedenem Werthe, dann treten zu jenen Oberflächendrucken noch Kräfte hinzu, welche die einzelnen im Innern gelegenen Körperelemente angreifen.

Die vorliegende Abhandlung weist nun nach, dass in jenem besonderen Fall, wo, wie beispielsweise bei Eisen, die Verschiedenheit der Magnetisirungszahl an verschiedenen Stellen des homogenen Körpers lediglich daher rührt, dass die Magnetisirungszahl desselben Function der Magnetkraft ist und letztere für die einzelnen Feldstellen variirt — die eine derartige magnetische Substanz translatorisch angreifenden Kräfte, wie bei anderen homogenen Körpern, zur Gänze ersetzbar sind, durch lediglich an dessen Oberfläche thätige Druckkräfte.

Auch ohne den expliciten Ausdruck der magnetischen Energie vor Augen zu haben, ist unschwer einzusehen, dass für Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl eine derartige — die Berechnung der mechanischen Kraftwirkung in besonderen Fällen sehr vereinfachende — Anordnung lediglich an der Oberfläche angreifender Druckkräfte angebbar sein müsse.

Denn bei einer virtuellen Verschiebung des als starr betrachteten Eisenkörpers im Magnetfelde wird jedes Volumelement des Eisens mit seinem Einrücken in eine neue Feldstelle auch gleichzeitig denselben Werth der lediglich von der Feldintensität abhängigen Magnetisirungszahl annehmen, der dem früher daselbst befindlich gewesenen Eisenelement zukam. Bei der gedachten Verschiebung wird somit die Gesammtänderung der Energie lediglich an der Oberfläche statthaben, wo eine Verdrängung der unpolarisirbaren Luft durch das polarisirte Eisen eintritt, der Sitz der mechanischen Kraftwirkung wird somit nach dem Princip der virtuellen Verschiebungen ausschliesslich in diese Grenzfläche verlegt werden können.

## §. 2.

Es bezeichnen $E, F, G$ die nach den Coordinatenaxen genommenen Componenten der ursprünglich im Felde herrschenden Magnetkraft $H$, wie sie durch permanente Magnete oder Ströme hervorgerufen wird, $\Phi$ ihr Potential; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, beziehungsweise $\mathfrak{B}$ mögen dieselbe Bedeutung für jene Magnetkraft $\mathfrak{R}$ haben, welche durch die bei der Polarisirung der magnetischen Substanzen auftretenden freien Magnetismen verursacht wird. Dann sind:

$$X_1 = E+\mathfrak{X},\; Y_1 = F+\mathfrak{Y},\; Z_1 = G+\mathfrak{Z},\; V = \Phi+\mathfrak{B} \tag{1}$$

die Componenten, beziehungsweise das Potential der schliesslich im Felde herrschenden Magnetkraft $R_1$. Es sind dann $A_1, B_1, C_1$ die Componenten des in den Volumseinheiten der polarisirbaren Substanz geweckten magnetischen Momentes $J_1$ mit jenen Grössen durch die Gleichungen verknüpft:

$$A_1 = k_1 X_1,\; B_1 = k_1 Y_1,\; C_1 = k_1 Z_1, \tag{2}$$

wo $k_1$ den für den schliesslich erzielten magnetischen Zustand giltigen Werth der für die Substanz von der Intensität der Magnetkraft $R$ abhängigen Magnetisirungszahl bedeutet; als Typus einer solchen Substanz mag weiterhin das weiche Eisen gelten.

In einer früheren Abhandlung[1] war dann gezeigt worden, dass der Arbeitswerth des weichen Eisens im Magnetfelde gegeben ist durch den Ausdruck:

$$W = -\int\left[\frac{1}{2}(A_1 E_1 + B_1 F_1 + C_1 G_1) + \int_0^{J_1} J\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\right] dv. \tag{I}$$

wo die äussere Integration über alle Volumelemente $dv$ des Eisenkörpers zu erstrecken ist und für die Ausführung der innern Integration nach $J$, die Magnetisirungszahl $k$ als Function des magnetischen Moments $J$ aufzufassen ist. Für Substanzen, deren Magnetisirungszahl constant — d. h. von der Magnetkraft $R$ und mithin von $J$ unabhängig ist — verschwindet

[1] Diese Sitzungsber., Bd. C, S. 477.

wegen $k = k_1$ der zweite Posten in (I), den wir mit $W_2$ bezeichnen wollen; es reducirt sich also der Energie-Ausdruck für Substanzen constanter Magnetisirungszahl auf den ersten Posten $W_1$, so dass $W_2$ den Einfluss darstellt, den die Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl auf den Arbeitswerth ausübt.

Gemäss der Herleitung des Energie-Ausdruckes (I) stellt $W$ den Gesammtaufwand mechanischer Arbeit dar, der von aussen her aufgeboten werden musste, um die magnetische Polarisation des weichen Eisens in ihrem schliesslichen Betrage an der bezüglichen Stelle des Magnetfeldes zu erzielen. Daher wird die bei Vornahme irgend einer Verschiebung eintretende Änderung des Ausdruckes (I) die zur Ausführung derselben von aussen her aufzuwendende Arbeit angeben und weiterhin einen Rückschluss gestatten auf die hiebei in Thätigkeit tretenden mechanischen Kräfte.

Nimmt man nun eine virtuelle Verschiebung des als starr angenommenen Eisenkörpers vor, so ändert sich der Energieausdruck $W$ zunächst dadurch, dass hiebei an seiner Oberfläche eine Verdrängung der magnetisch unpolarisirbaren Lufttheilchen durch polarisirte Eisentheilchen stattfindet. Der hiedurch herbeigeführte Theilbetrag der Energieänderung wird also, da er zur Gänze an der Grenzfläche statthat, auf die Wirksamkeit von lediglich an dieser Oberfläche thätigen Zugkräften zurückgeführt werden können. Es tritt aber bei der gedachten Verschiebung noch eine weitere Energieänderung dadurch ein, dass in Folge der geänderten Configuration — es alterirt diese zunächst $\mathfrak{R}$ — durch das ganze Innere des Eisenkörpers die Werthe des magnetischen Momentes $J_1$ andere geworden sind. Hiedurch ändert sich allerdings, wie unmittelbar ersichtlich, $W_2$ nicht, da dessen Variation für eine Änderung von $J_1$ verschwindet, $\delta_{J_1} W_2 = 0$ ist; wohl aber tritt eine solche Änderung für $W_1$ ein, und eben diese würde uns die Möglichkeit benehmen, die Gesammtheit der in Wirksamkeit tretenden mechanischen Kräfte lediglich auf Oberflächenkräfte zurückzuführen. Aus eben diesem Grunde haben v. Helmholtz[1] und Kirchhoff[2]

[1] Helmholtz, Wied. Ann. Bd. 13, 1881, S. 390.

[2] Kirchhoff, Wied. Ann. Bd. 24, 1885, S. 59.

den Energieausdruck $W_1$ auf die sogenannte Normalform gebracht, in welcher er derselben Eigenschaft, die oben für $W_2$ nachgewiesen worden, sich erfreut, dass nämlich die Änderung, die $W_1$ für eine Variation von $R_1$ erfährt, verschwindet, also $\delta_{R_1} W_1 = 0$ ist.

Überaus einfache Umformungen führen zu dieser Normalform. Zunächst ergibt die Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2):

$$W_1 = -\frac{1}{2}\int (A_1 E + B_1 F + C_1 G)\, dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int [A_1(X_1 - \mathfrak{X}) + B_1(Y_1 - \mathfrak{Y}) + C_1(Z_1 - \mathfrak{Z})]\, dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int k_1 R_1^2\, dv + \frac{1}{2}\int (A_1\mathfrak{X} + B_1\mathfrak{Y} + C_1\mathfrak{Z})\, dv \qquad (3)$$

Beachtet man nun, dass $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ eben jene Kraftcomponenten sind, welche durch die magnetische Polarisirung des Weicheisenkörpers $A_1$, $B_1$, $C_1$ hervorgerufen sind, so ist bekanntlich:

$$Q = -\frac{1}{2}\int (A_1\mathfrak{X} + B_1\mathfrak{Y} + C_1\mathfrak{Z})\, dv$$

das Potential dieser in Folge der Polarisirung auftretenden freien Magnetismen auf sich selbst. Anderseits ist aber nach dem bekannten Thomson'schen Satze:

$$Q = \frac{1}{8\pi}\int_\infty (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)\, d\tau,$$

wo die Integration über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken ist.

Unter abermaliger Berücksichtigung von (1) resultirt:

$$\frac{1}{2}\int (A_1\mathfrak{X} + B_1\mathfrak{Y} + C_1\mathfrak{Z})\, dv = -Q =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_\infty [(X_1 - E)^2 + (Y_1 - F)^2 + (Z_1 - G)^2]\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_\infty R_1^2\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_\infty (X_1 E + Y_1 F + Z_1 G)\, d\tau - \frac{1}{8\pi}\int_\infty H^2\, d\tau.$$

Berücksichtigt man nun, dass gemäss dem Green'schen Satze:

$$\int_{\infty} (X_1 E + Y_1 F + Z_1 G)\, d\tau = -\int V \Delta \Phi\, d\tau$$

ist, so ergibt sich durch Einsetzen der vorstehend transformirten Ausdrücke in (3):

$$W_1 = -\int \frac{k_1}{2} R_1^2\, dv - \int_{\infty} \left( \frac{1}{8\pi} R_1^2 + \frac{1}{4\pi} V \Delta \Phi \right) d\tau - \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} H^2\, d\tau. \quad (4)$$

Es ist dies vom letzten Posten — einer Constanten des Feldes — abgesehen, genau die von Helmholtz und Kirchhoff aufgestellte Normalform[1] für die magnetische Energie eines Körpers constanter Magnetisirungszahl, eine Form, von der die Autoren die auszeichnende Eigenschaft erweisen, dass ihre Variation für eine Wertheänderung von $V$, beziehungsweise $R_1$ verschwindet, $\delta_{R_1} W_1 = 0$ ist.

Zusammengehalten mit der analogen, oben für $W_2$ angeführten Eigenschaft, ergibt sich sonach als die Normalform des Arbeitswerthes eines Weicheisenkörpers im Magnetfeld:

$$W = W_1 + W_2 =$$

$$= -\int_{\infty} \left( \frac{1}{8\pi} R_1^2 + \frac{1}{4\pi} V \Delta \Phi \right) d\tau - \int \frac{k_1}{2} R_1^2\, dv - \iint_0^{J_1} J \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k} \right) dJ\, dv \quad (1a)$$

unter Zugrundelegung, welcher Form also von jener Änderung abgesehen werden kann, welche bei einer Verschiebung für $W$ aus der durch die Configurationsänderung bewirkten Variation von $R_1$, beziehungsweise $J_1$ resultiren würde.

## §. 3.

Um jene mechanischen Kräfte, die den Eisenkörper im Magnetfelde translatorisch angreifen, zu berechnen, soll als virtuelle Verschiebung jene gewählt werden, bei der alle Theilchen des als starr angesehenen Eisenkörpers parallel

---

[1] S. Helmholtz, l. c. S. 390 und 397 Kirchhoff, l. c. S. 59. Vergl. auch C. Neumann (Sitzb. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1890, S. 87—129).

der $X$-Axe um dieselbe Strecke $\delta x$ verrückt werden. Führt man die Betrachtung für beide Summanden von $W$ gesondert, so ist zunächst rücksichtlich $W_1$ zu ersehen, dass bei der gedachten Verschiebung für alle im Innern des Eisenkörpers gelegenen Raumpunkte des Magnetfeldes $W_1$ sich nicht ändert: Erstens nicht, weil wegen der oben angeführten Eigenschaft der Normalform $\delta_{R_1} W_1 = 0$ ist; zweitens[1] nicht, weil bei dem Einrücken eines Eisenelements in die benachbarte Feldstelle dasselbe wegen $k = f(R)$ auch den gleichen Werth der Magnetisirungszahl annimmt, der dem früher daselbst befindlich gewesenen zukam. Es ist somit der Sitz der ganzen, bei der gedachten Verschiebung eintretenden Wertheänderung von $W_1$ ausschliesslich an der Grenzfläche des Eisens gegen die Luft zu suchen.

Die Berechnung Letzterer zu erleichtern, soll nach dem Vorgange v. Helmholtz's und Kirchhoff's die Annahme gemacht werden, dass in der Grenzschichte ein allmäliger Übergang der Magnetisirungszahl vom Werthe $k_1$ der an ihrer im Eiseninnern gelegenen Seite statthat, bis zum Werthe Null, welcher der Luft zukommt, sich vollziehe, dass also $k$ in dieser Grenzschichte, der wir die unendlich kleine Dicke $\varepsilon$ beilegen wollen, als Function des nach der Normale gemessenen Abstands von der inneren Fläche aufzufassen sei. Dann wird die ganze Änderung von $W_1$ für die gedachte Veränderung lediglich darin bestehen, dass ein Volumelement $d\omega dn$ der Grenzschichte, das früher um $\delta x$ weiter nach rückwärts belegen war, und den Werth $k - \frac{\partial k}{\partial x}\delta x$ seiner Magnetisirungszahl besitzt, nach vorn rückt und das an dieser Feldstelle früher befindlich gewesene Theilchen von der Magnetisirungszahl $k$ verdrängt. Die hieraus in (4) für $W_1$ resultirende Änderung ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial x} R^2 d\omega\, dn\, \delta x\,,$$

---

[1] In diesem einen Punkte liegt der entscheidende Unterschied der vorstehenden Rechnungsführung gegen die von Kirchhoff (l. c. S. 63 oben) für Substanzen constanter Magnetisirungszahl gegebenen Analyse.

und somit für die ganze Grenzschichte:

$$\delta_x W_1 = \frac{1}{2}\iint_0^\varepsilon \frac{\partial k}{\partial n}\,\frac{\delta n}{\delta x}\, R^2 d\omega\, dn\, \delta x = \iint_0^\varepsilon \frac{\partial k}{\partial n}\, R^2 dn \cos(n, x)\, d\omega\, \delta x,$$

wo die äussere Integration über alle Oberflächenelemente $d\omega$ auszuführen ist, die innere hingegen über die Dicke der Grenzschichte von $o$ bis $\varepsilon$ sich erstreckt.

Bezeichnen wir nun mit $T$ die in die Tangentialebene der Grenzfläche, mit $N$ die in ihre Normale entfallende Componente von $R$, so ist:

$$R^2 = N^2 + T^2.$$

Unterscheiden wir ferner durch die Indices 1 und 2 jene Werthe, welche diesen Kraftcomponenten auf der im Innern des Eisens, beziehungsweise auf der im Innern der Luft belegenen Seite der Grenzschichte zukommen, so ist bekanntlich gemäss der Continuitätsgleichung:

$$T_1 = T_2;\ (1+4\pi k_1)\, N_1 = N_2. \tag{5}$$

Führen wir nun die innere Integration[1] nach $n$ aus:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial k}{\partial n}\, R^2 dn = \int_0^\varepsilon (T^2 + N^2)\, \frac{\partial k}{\partial n}\, dn =$$

$$= \int_0^\varepsilon T^2 \frac{\partial k}{\partial n}\, dn + \int_0^\varepsilon (1+4\pi k)^2 N^2 \; \frac{dk}{(1+4\pi k)^2 . dn}\, dn,$$

und beachten, dass wegen der Gleichungen (5) $T^2$ und $(1+4\pi k)^2 N^2$ innerhalb der Grenzschichte von der unendlich kleinen Dicke $\varepsilon$ als constant angesehen werden können, so ergibt sich:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial k}{\partial n}\, R^2 dn = -[T_1^2 . k_1 + N_1^2 (1+4\pi k_1) . k_1] = -(k_1 R_1^2 + 4\pi k_1^2 N_1^2).$$

---

[1] Vergl. H. Poincaré, Comptes rendus, t. 112, 1891, p. 555—557.

Es ist somit:

$$\delta_x W_1 = -\int_0 \left(\frac{k_1}{2} R_1^2 + 2\pi k_1^2 N_1^2\right) \cos(n,x)\, d\omega\, \delta x.$$

Ebenso ergibt sich die für die gedachte Verschiebung für $W_2$ resultirende Änderung $\delta_x W_2$ wegen der oben nachgewiesenen Eigenschaft $\delta_{J_1} W_2 = 0$ als lediglich darin bestehend, dass bei Vornahme der Verschiebung $\delta x$ an den einzelnen Oberflächenelementen $d\omega$ des Eisens jeweilig im Raumelement $d\omega\, \delta x \cos(n,x)$ Lufttheilchen durch Eisentheilchen ersetzt werden; die hiedurch bewirkte Energieänderung beträgt sonach:

$$\delta_x W_2 = -\iint_0^{J_1} J \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ \cos(n,x)\, d\omega\, \delta x.$$

Bezeichnet man nun mit $X_n$ die Spannungskräfte, welche man in den einzelnen Oberflächenelementen des Eisens und nur an diesen nach Richtung der positiven $X$-Axe pro Flächeneinheit anbringen muss, um die gedachte Verrückung des starren Eisenkörpers um $\delta x$ auszuführen, so muss nach dem Princip der virtuellen Verschiebungen die Arbeit dieser Oberflächenkräfte mit der gleichzeitig hiebei eintretenden Totaländerung der magnetischen Energie $\delta_x W_1 + \delta_x W_2$ zusammen die Summen Null ergeben, also sein

$$\int X_n\, d\omega\, \delta x - \int \left(\frac{k_1}{2} R_1^2 + 2\pi k_1^2 N_1^2\right) \cos(n,x)\, d\omega\, \delta x - \\ - \iint_0^{J_1} J \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) \cos(n,x)\, d\omega\, \delta x = 0.$$

Beachtet man, dass

$$N_1 = R_1 \cos(n, R_1)$$

und:

$$J_1 = k_1 R_1$$

ist, so ergibt sich:

$$X_n = \left[\frac{k_1}{2} R_1^2 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1) + \int_0^{J_1} J \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\right] \cos(n,x)$$

und analoge Ausdrücke für $Y_n$ und $Z_n$.

Die resultirende magnetische Oberflächenspannung, welche die translatorische Zugkraft vollkommen zu ersetzen im Stande ist, hat also in allen Oberflächenelementen die Richtung der nach auswärts gezogenen Normale und ihr Betrag ist pro 1 $cm^2$

$$N_n = \left[\frac{k_1}{2} R_1^2 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1) + \int_0^{J_1} J\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\right] \quad \text{(II)}$$

Für Substanzen, deren Magnetisirungszahl von der Intensität der Magnetkraft $R_1$ unabhängig, sonach $k = k_1$ ist, reducirt sich Formel (II) auf die ersten beiden Posten identisch mit jenen Ausdrücken, welche Kirchhoff[1] für die in diesem besonderen Falle wirksamen Oberflächenspannungen abgeleitet hat.

Formel (II), welche leicht auf die vielfach zweckmässigere Form gebracht werden kann:

$$N_n = J_1 R_1 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1) - \int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ \quad \text{(II}^1\text{)}$$

gibt[2] somit die vollständige Lösung des für Körper veränderlicher Magnetisirungszahl gestellten Problems: Sie gibt eine

---

[1] Vergl. Kirchhoff, Wied. Ann., 24., 1885, S. 66.

[2] Bei Vornahme dieses Vergleichs ist zu beachten, dass jene Posten der Kirchhoff'schen Formeln, welche die Constanten $k' = \frac{\partial k}{\partial \log v}$ und $k''$ enthalten, welche der eventuellen Veränderung der Magnetisirungszahl bei eintretenden Deformationen Rechnung tragen, für das vorliegende Problem des Ersatzes der am starren magnetischen Körper lediglich translatorisch wirksamen Zugkräfte nicht in Betracht kommen, da ihnen ja ausschliesslich bei Eintritt von Deformationen Gelegenheit zur Arbeitsleistung gegeben ist.

Die Auswerthung des Integrals in Formel (II$^1$) kann in vielen Fällen zweckmässig auf Grundlage der zahlreichen graphischen Darstellungen, welche Ewing (Phil. trans., t. 180, 1889) für den wechselseitigen Zusammenhang von $J$ und $\frac{J}{k}$ entworfen hat (vergl. auch diese Berichte, 100, S. 481), auf graphischem Wege geschehen; für starke Felder hingegen, in denen $J_1$ dem Sättigungswerthe sehr nahe kommt, geschieht die Auswerthung des Integrals am vortheilhaftesten unter Zugrundelegung jener empirischen Formel, durch welche Stefan (diese Ber., Bd. 69, Abth. II, 1874, S. 202) $k$ als Function von $J$ dargestellt hat.

Anordnung von lediglich an der Oberfläche dieser Körper (normal auswärts) wirksamen Spannungen an, welche im Stande ist, unter Eliminirung der aufs Innere thätigen Kräfte, — es vereinfacht dies die Berechnung specieller Aufgaben wesentlich — die mechanische Kraftwirkung, welche dieselben im Magnetfelde translatorisch erfahren, vollständig zu ersetzen.

Anwendungen der Formel ($II^1$) zur Lösung specieller Probleme sollen einer folgenden Mittheilung vorbehalten sein.