©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 1 Textfigur.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1893.**)

Wie ich schon in der Abhandlung »Zur Theorie der Flüssigkeiten«[1] zu erwähnen Gelegenheit hatte, ist es zur Erforschung des flüssigen Zustandes nicht so sehr am Platze. auf alle Einzelheiten direct einzugehen, als vielmehr vorerst das Bild in grossen Zügen zu fixiren, da wir für den ersteren Fall zu überaus verwickelten Darstellungen kämen, welche nur mit Mühe das in ihnen enthaltene Wesentliche erkennen lassen würden. Desshalb wollen wir auch bezüglich einer kinetischen Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten uns die ganze Anlage möglichst einfach zu gestalten suchen.

Stellen wir uns vor, wir hätten zwei parallele, ebene horizontale Platten. Die untere befinde sich in Ruhe, die obere bewege sich in einer bestimmten Richtung mit der Geschwindigkeit u, ohne dass sie dabei ihre eigene Ebene verlässt, so dass der Abstand a der beiden Platten stets constant bleibt. Zwischen den beiden Platten befinde sich eine Kugel vom Radius r. Dieselbe habe eine Geschwindigkeit c, senkrecht zu den beiden Platten, und zwar soll c gegen u sehr gross sein. So oft die Kugel gegen eine Platte stösst, soll sie sofort reflectirt werden, als wäre sie vollkommen elastisch. Wird ausserdem der Elasticitätscoëfficient sehr gross angenommen, so wird die Zeit, während welcher die Kugel ihre Bewegungsrichtung

[1] Wien. Ber., CI, S. 920 ff.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

umkehrt, verschwindend klein ausfallen. Immerhin soll diese Zeit genügen, der Kugel in der Richtung der Plattenebene jene Geschwindigkeit zu ertheilen, welche die Platte selbst hat. Das heisst, so oft die Kugel die untere Platte trifft, muss ihre Geschwindigkeit parallel zu den Platten gleich Null, beim Auftreffen auf die obere Platte gleich u werden. Das bedeutet nichts Anderes, als dass bei jedem Zusammenstosse mit der unteren Platte an dieselbe die Bewegungsgrösse mu abgegeben wird, wenn m die Masse der Kugel ist, und zwar sucht diese Bewegungsgrösse der Platte eine Geschwindigkeit in der Bewegungsrichtung der oberen Platte zu ertheilen. Das Entgegengesetzte findet bei der oberen Platte statt. Dieselbe erhält einen Zug, welcher ihrer Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Der Weg, welchen die Kugel beim Verlassen der unteren Platte bis zum Auftreffen auf die obere zurücklegt, ist $a-2r$, die Zeit, die dabei verstreicht, $\frac{a-2r}{c}$; die Zeit, welche zwischen zwei Stössen auf dieselbe Platte verstreicht, ist $2\frac{a-2r}{c}$, daher die Zahl der Stösse, welche eine Platte in der Zeiteinheit erfährt,

$$Z = \frac{c}{2(a-2r)}.$$

Die Kraft, welche also eine jede Platte in der Richtung ihrer eigenen Ebene erfährt, ist $\frac{muc}{2(a-2r)}$ Sind anstatt einer Kugel deren N vorhanden, so erhalten wir die Kraft

$$K = \frac{mNuc}{2(a-2r)} = \frac{mNc}{2\lambda}.u, \qquad (1)$$

wenn wir $a-2r = \lambda$ setzen, wobei λ die Weglänge ist, welche eine Kugel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen zurücklegt.

Es ist also der Widerstand, den die beiden Platten bei einer Parallelverschiebung gegen einander erfahren, direct proportional der Verschiebungsgeschwindigkeit. Diesen Fall wollen wir nun auf die Flüssigkeiten übertragen und damit eine Erklärung für die innere Reibung derselben geben.

©Akademie d

Die innere Reibung zeigt sich bekanntlich dann, wenn zwei neben einander befindliche Flüssigkeitsschichten mit verschiedener Geschwindigkeit fliessen. Es übt dann die schneller fliessende auf die langsamer fliessende eine Beschleunigung, diese auf jene eine Verzögerung aus. Wächst die Geschwindigkeit der Flüssigkeit von Schichte zu Schichte gleichförmig, so ist die Kraft, welche von einer Schichte auf eine zweite, im Abstande x befindliche ausgeübt wird,

$$R = \mu f \frac{u - u'}{x},$$

wobei f die Fläche der reibenden Schicht ist, u und u' die Geschwindigkeiten der zwei Schichten und μ eine Constante bedeutet, welche von der Natur der Flüssigkeit abhängt. Diese Constante nennt man den Reibungscoëfficienten. Wächst der Geschwindigkeitsunterschied nicht gleichförmig mit dem Abstande der Schichten, so wird die innere Reibung an verschiedenen Stellen der Flüssigkeit verschieden sein. Man hat dann zum Grenzwerthe von $\frac{u-u'}{x}$ überzugehen, und es wird

$$R = -\mu f \frac{du}{dx}$$

Das negative Vorzeichen erklärt sich daraus, dass für die schneller bewegten Schichten die innere Reibung als Widerstand auftritt. Diese Formel für die innere Reibung hat schon Newton aufgestellt.

Denken wir uns demnach eine Flüssigkeitsschichte festgehalten, während wir eine zweite in der Entfernung Eins von der ersten mit der Geschwindigkeit Eins vorwärts bewegen, so müssen wir bei dieser Bewegung einen Widerstand überwinden, welcher für die Flächeneinheit der bewegten Schichte gleich μ, d. i. gleich dem Reibungscoëfficienten ist. Die Grösse desselben nach der kinetischen Theorie zu entwickeln, soll im Folgenden versucht werden.

Wir legen durch die Flüssigkeit horizontale Ebenen, welche von einander um den Abstand zweier Molekeln entfernt sind. Dieser Abstand wird sich nur um Weniges vom Durchmesser

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

einer Molekel unterscheiden. Wir wollen ihn daher gleich $2r$ setzen, wenn wir uns die Molekeln als Kugeln vom Radius r denken. Dieselben sollen sich wie die Kugeln bei unserem eingangs erwähnten Falle senkrecht zwischen den Ebenen mit der Geschwindigkeit c hin- und herbewegen. Die unterste Ebene sei in Ruhe, die oberste bewege sich mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit. Ist der Bewegungszustand in der Flüssigkeit stationär geworden, so muss sich jede Zwischenebene mit constanter Geschwindigkeit bewegen. Das ist aber nur möglich, wenn sie von der einen Seite ebenso viel Bewegungsgrösse empfängt, als sie nach der anderen abgibt, und für sämmtliche Ebenen ist dieser Fall wiederum nur möglich, wenn das Geschwindigkeitsgefälle in der Flüssigkeit ein constantes ist, das heisst, wenn der Geschwindigkeitsunterschied zwischen je zwei gleich weit entfernten Schichten dieselbe Grösse hat. Mithin erhalten wir das Geschwindigkeitsgefälle, wenn wir den Geschwindigkeitsunterschied zweier beliebiger benachbarter Ebenen durch ihren Abstand $2r$ dividiren. Also

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{2r},$$

wenn die oberhalb liegende Ebene die Geschwindigkeit u_2, die darunter befindliche u_1 besitzt. Bilden wir nun den Ausdruck für die verzögernde Kraft, welche auf die Flächeneinheit der oberen Schichte entfällt, so ist derselbe

$$\mu \frac{du}{dx} = \mu \frac{u_2 - u_1}{2r}$$

Diese Kraft muss gleich sein der Bewegungsgrösse, welche von den zwischen den zwei Ebenen hin- und herfliegenden Molekeln in der Zeiteinheit an die Flächeneinheit einer Ebene abgegeben wird. Natürlich ist nur jene Bewegungsgrösse zu verstehen, welche mit ihrer Richtung in die Ebene selbst fällt. Ist die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit N, so ist jene Zahl, welche zwischen zwei Ebenen auf die Flächeneinheit entfällt, $2rN$ und die in der Zeiteinheit übergeführte Bewegungsgrösse nach Gleichung (1)

$$\frac{2rNmc}{2\lambda}(u_2 - u_1) = \frac{rNmc}{\lambda}(u_2 - u_1).$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wollen wir jetzt die Formel nicht mehr auf unseren fingirten Fall, sondern überhaupt auf die Flüssigkeitsreibung anwenden, so brauchen wir die Ebenen zwischen den Molekeln bloss wegzulassen und zu bedenken, dass die Molekeln nicht nach einer Richtung, sondern nach allen Richtungen des Raumes sich bewegen. Diese Bewegungen lassen sich aber durch drei auf einander senkrechte ersetzen. Wir wollen daher für die Zahl der Zusammenstösse nur den dritten Theil der obigen einführen. Dann wird die in der Zeiteinheit von einer Molekelschicht auf die nächste übertragene lebendige Kraft gleich

$$\frac{rNmc}{3\lambda}(u_2 - u_1)$$

sein, und diese Grösse ist wiederum gleich $\mu \frac{u_2 - u_1}{2r}$ Daraus folgt aber

$$\mu = \frac{2r^2Nmc}{3\lambda} = \frac{2r^2\rho c}{3\lambda}, \qquad (2)$$

wenn wir $Nm = \rho$ setzen, wobei nun ρ nichts Anderes als die Dichte der Flüssigkeit bedeutet, da Nm die in der Volumeinheit enthaltene Masse ist.

Damit ist bereits eine Formel für den Reibungscoëfficienten einer Flüssigkeit gefunden, doch enthält dieselbe ausser der Dichte ρ nur Grössen, welche unmittelbar nicht gegeben sind. Vor Allem wollen wir einen Ausdruck für die mittlere Weglänge λ suchen. Wiederum handelt es sich uns nur darum, einen angenähert richtigen Werth dafür zu finden.

Vorausgesetzt, die Molekeln seien Kugeln, welche im flüssigen Zustande sehr nahe an einander liegen, so wird für die Berechnung der mittleren Weglänge nichts geändert, wenn wir annehmen, die in Betracht gezogene Molekel sei bloss ein materieller Punkt, während alle benachbarten Molekeln den doppelten Radius haben. Dies ist natürlich nur geometrisch denkbar, indem sich ja die einzelnen Kugeloberflächen der Nachbarmolekeln dann durchschneiden und nur einen kleinen Raum übrig lassen, innerhalb dessen sich der Punkt bewegen kann. Dieser Raum kann aber von der Kugelgestalt nicht sehr erheblich abweichen, wie man aus der Zeichnung ersieht, die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

einen Querschnitt des Molekelsystems veranschaulicht. In derselben ist der schraffirte Theil jener Raum, in welchem sich der Punkt bewegen kann. Wir suchen desshalb die mittlere Weglänge eines Punktes in einer Kugel, welche dem zur Bewegung freien Raume eingeschrieben ist. Dieselbe ist gleich der Summe sämmtlicher Wege, welche der Punkt von einem bestimmten Punkte der Kugeloberfläche zu allen übrigen Punkten derselben zurücklegen kann, dividirt durch die Zahl dieser Wege. Nehmen wir nun an, eine unendlich grosse Zahl von Punkten sei auf der Kugeloberfläche gleichmässig vertheilt, und es kommen auf die Flächeneinheit N_1 Punkte, so ist die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Punkte $4\pi a^2 N_1$. Die Entfernung zweier beliebiger Punkte ist gegeben durch

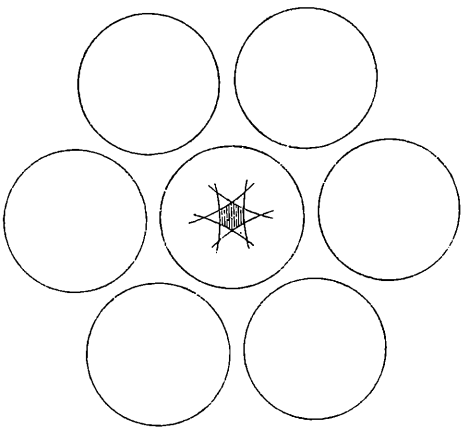

Fig. 1.

$$\sqrt{a^2+a^2-2aa\cos\varphi} = a\sqrt{2(1-\cos\varphi)},$$

wenn a der Radius der Kugel und φ der Winkel der Radien ist, welche zu den beiden Oberflächenpunkten gehören. Die Gesammtzahl der Wege, welche dieselbe Länge haben, ist dann

$$2\pi a^2 N_1 \sin\varphi d\varphi$$

und die Summe aller dieser Wege

$$2\pi a^3 N_1 \sqrt{2(1-\cos\varphi)} \sin\varphi d\varphi.$$

Integriren wir diesen Ausdruck von 0 bis π, so haben wir die Gesammtsumme aller möglichen Wege, und die mittlere Weglänge erhalten wir dann, wenn wir noch durch $4\pi a^2 N_1$ dividiren. Mithin ist

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\lambda = \frac{a}{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,\sin\varphi\,d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2} = 4a\left[\frac{\sin^3\frac{\varphi}{2}}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4a}{3}. \quad (3)$$

Nun müssen wir aber berücksichtigen, dass alle Molekeln in Bewegung sind. Dem können wir dadurch Rechnung tragen, dass wir für die mittlere Geschwindigkeit c einer Molekel die mittlere relative Geschwindigkeit einführen. Dieselbe wird in derselben Weise gefunden, wie es Clausius[1] für die Berechnung der mittleren relativen Geschwindigkeit einer Gasmolekel gethan hat, und es ergibt sich für dieselbe der Werth $^4/_3\,c$. Wenn die relative Geschwindigkeit aber grösser ist als die absolute, so muss im selben Masse die mittlere Weglänge kleiner werden; wir erhalten daher aus der Gleichung (3)

$$\lambda = a.$$

Nun ist aber, wie man unmittelbar aus der Zeichnung ersieht

$$a = d - 2r,$$

wenn d die Entfernung der Mittelpunkte zweier Molekeln und r der Radius derselben ist. Daher ist

$$\lambda = d - 2r = d\left(1 - \frac{2r}{d}\right) = 2r\left(1 - \frac{2r}{d}\right) = 2r\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)$$

Diese Formel rechtfertigt sich insofern, als man überall dort, wo d und $2r$ nicht als Differenz vorkommen, dieselben mit einander vertauschen kann, da ja d um sehr wenig grösser als $2r$ ist. Wenn ferner b das Volumen ist, welches die Molekeln thatsächlich mit Materie ausfüllen, v jenes, welches ihnen überhaupt zur Verfügung steht, so

$$\frac{(2r)^3}{d^3} = \frac{b}{v}$$

---

[1] Theorie der Gase, S. 61 ff

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Setzen wir schliesslich den für λ gefundenen Werth in die Gleichung (2) ein, so ergibt dies

$$\mu = \frac{r\rho c}{3\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)} \tag{4}$$

Was nun die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln c anbelangt, so habe ich zu deren Berechnung bereits mehrere Methoden angegeben, welche in den Abhandlungen »Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln»,[1] »Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten»,[2] »Zur Theorie der Flüssigkeiten«[3] zu finden sind. In letzter Abhandlung habe ich auch eine Gleichung für die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten von der Form

$$v = b + \frac{R_1}{P_0} \cdot \frac{1+\alpha t}{1-\varepsilon t} \tag{5}$$

abgeleitet, wobei v und b dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (4) haben. Kennt man die Volumina einer Grammmolekel Flüssigkeit bei zwei verschiedenen Temperaturen, so lässt sich daraus b und $\frac{R_1}{P_0}$ berechnen, da ε, der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten ebenfalls eine experimentell bestimmbare Grösse ist. P_0 entspricht dem inneren Drucke der Flüssigkeiten bei 0°, ferner ist

$$R_1 = \frac{Nmc_0^2}{3}$$

wenn c_0 die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln bei derselben Temperatur bedeutet und Nm die Masse einer Grammmolekel ist. Kennt man daher P_0, so ist auch c_0 bekannt. Dann enthält aber die Gleichung (4) nur noch die eine Unbekannte r den Radius einer Molekel. Man kann somit diese Gleichung zur

---

[1] Wien. Ber., XCIX, S. 860 ff.

[2] Ebenda, C, S. 268.

[3] Ebenda, CI, S. 920.

Berechnung der Grösse der Molekeln benützen und erhält für den Radius einer Molekel

$$r = \frac{3\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)\mu}{\rho c}$$

Wählen wir für Wasser zur Berechnung des b die Temperaturen 20° und 60°, so sind die entsprechenden Volumina nach Rosetti[1] für 1 g Wasser 1·00174 und 1·01691 cm^3 Für den Temperaturcoëfficienten der Capillaritätsconstanten fand ich $\varepsilon = 0\cdot00232$.[2] Setzen wir noch $\alpha = 0\cdot00366$, so folgt $b = 0\cdot943$, $\frac{R_1}{P_0} = 0\cdot052$. Für den inneren Druck P_0 fand ich als Mittel nach verschiedenen Methoden 276.10^7 (C. G. S.).[3] Daraus folgt nach Obigem, da $Nm = 1$ ist,

$$c_0 = 20800\, cm.$$

Da wir 20° und 60° als Temperaturintervall zur Berechnung des b und $\frac{R_1}{P_0}$ genommen haben, so wollen wir r für die Mitteltemperatur 40° bestimmen. Für diese Temperatur ist nach Poiseuille $\mu = 0\cdot0066$,[4] ferner $v = 1\cdot0077$. Der Werth von r erleidet keine besondere Einbusse, wenn wir für ρ und c die erthe, welche bei 0° gelten, einsetzen. Man erhält sodann $r = 20\cdot8.10^{-9}\, cm$. Mithin ist der Durchmesser der Wassermolekel

$$\delta = 42.10^{-9}\, cm.$$

Für den Äther wurde b und $\frac{R_1}{P_0}$ aus den Werthen des Volumens bei 0° und 30° berechnet. Setzen wir das Volumen bei 0° gleich Eins, so erhalten wir nach der Gleichung

$$v = (1+at+bt^2+ct^3)\, v_0$$

Wüllner, Experimentalphysik, III, S. 77.

2 Wiener Berichte, C, S. 258.

3 Ebenda, CI, S. 926.

4 Wüllner, Experimentalphysik, I, S. 386.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

für 30° den Werth 1·04829, wenn wir nach Kopp $a = 0{\cdot}00148026$, $b = 0{\cdot}0000035$, $c = 0{\cdot}000000027$ [1] setzen. Der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten ist $\varepsilon = 0{\cdot}00607$; daraus folgt $b = 0{\cdot}8647$, $\frac{R_1}{P_0} = 0{\cdot}1353$. Für den inneren Druck P_0 fand ich 45.10^7 (C. G. S.). Ferner ist $Nm = 0{\cdot}736$ zu setzen. Demnach erhalten wir

$$c_0 = 15800\ cm.$$

Für die Temperatur 10° wird nach Handl und Přibram[2] der Reibungscoëfficient $\mu = 0{\cdot}0026$, das Volumen $v = 1{\cdot}015$. Aus diesen Werthen erhalten wir dann $r = 34{\cdot}9.10^{-9}\ cm$. Es ist desshalb der Durchmesser der Äthermolekel

$$\delta = 70.10^{-9}\ cm.$$

Fügen wir noch hinzu, dass wir für den Mittelwerth des Durchmessers der Wassermolekel nach sechs verschiedenen Methoden $43.10^{-9}\ cm$, für jenen der Äthermolekel als Mittel aus fünf Berechnungsarten $76.10^{-9}\ cm$ [3] erhalten, so müssen wir gestehen, dass diese Werthe mit den unserigen ausgezeichnet übereinstimmen, was wohl als bedeutende Stütze für die Richtigkeit unserer Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten gelten kann.

Nachdem wir den Werth für den Durchmesser einer Molekel kennen, ist es auch nicht mehr schwer, nach der Gleichung

$$\lambda = \delta\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)$$

den absoluten Werth der mittleren Weglänge zu berechnen. Es ergibt sich für

Wasser.	$\lambda = 91.10^{-11}\ cm$
Äther	$363.10^{-11}\ cm$

Wir haben also bei den Flüssigkeiten zwischen der mittleren Weglänge und der Grösse einer Molekel gerade das verkehrte

[1] Ebenda, III, S. 83.
Wien. Ber., LXXX, S. 35.
Monatshefte für Mathematik und Physik, III, S. 263.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Verhältniss wie bei den Gasen. Hier ist die mittlere Weglänge bedeutend grösser, dort bedeutend kleiner als der Durchmesser der Molekel.

Bekanntlich nimmt die innere Reibung mit wachsender Temperatur erheblich ab. Es entspricht diesem Verhalten unsere Gleichung

$$\mu = \frac{r\rho c}{3\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)}$$

thatsächlich insoweit, als mit wachsender Temperatur der Ausdruck $1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}$ ziemlich rasch zunimmt, was auf eine Verkleinerung des μ hinausläuft. Freilich müssen wir bedenken, dass auch c eine Function der Temperatur ist, und zwar von der Beschaffenheit, dass c mit der Temperatur wächst. Ich halte es aber nicht für erlaubt, aus der bekannten Abnahme des Reibungscoëfficienten die Änderung des c mit der Temperatur bestimmen zu wollen; denn wenn wir überlegen, dass ja nicht einmal bei der Theorie der Gasreibung, wo die Verhältnisse doch viel klarer zu Tage liegen als bei der Flüssigkeitsreibung, eine Übereinstimmung mit der Beobachtung vorhanden ist, insoweit sich die Theorie auf die Änderung der Reibung mit per Temperatur bezieht, so können wir unmöglich mit Sicherheit annehmen, dass unsere Formeln, die wir nur mit Hilfe mehrerer Vernachlässigungen und Hilfsannahmen erhalten haben, in jeder Beziehung mit den Thatsachen übereinstimmen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Jäger Gustav

Artikel/Article: Über die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten. 253-263