Über die Bestimmung eines Fundamentalsystems für einen gegebenen Gattungsbereich algebraischer Functionen einer Veränderlichen x

von

F. Mertens,
c. M. k. Akad.

1.

Es sei eine irreductibele algebraische Gleichung

$$F(y) = y^n + G_1(x)y^{n-1} + G_2(x)y^{n-2} + \cdots + G_n(x) = 0$$

gegeben, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ und alle übrigen ganze Functionen einer Veränderlichen x sind. Jede Wurzel dieser Gleichung wird eine algebraische Function von x und die Gesammtheit aller rationalen Functionen von x und einer bestimmten Wurzel y nach Kronecker ein Gattungsbereich algebraischer Functionen von x genannt. Ein solcher Gattungsbereich soll hier mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden.

Jede Function φ von $\mathfrak{G}$ ist in der Form

$$\varphi = r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \cdots + r_{n-1} y^{n-1}$$

darstellbar, wo $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ rationale Functionen von x bezeichnen, und genügt einer algebraischen Gleichung

$$t^n + R_1 t^{n-1} + R_2 t^{n-2} + \cdots + R_n = 0,$$

welche durch Nullsetzung der Resultante von $F(y)$ und $t - \varphi$ in Bezug auf y erhalten wird und in welcher die Coëfficienten $R_1, R_2, \ldots R_n$ rationale Functionen von x sind.

Wenn diese Coëfficienten insbesondere ganze Functionen von x sind, so wird φ eine ganze algebraische Function von x genannt. Die Function φ ist immer algebraisch ganz, wenn die Coëfficienten $r_0, r_1 . . r_{n-1}$ in ihrer Darstellung als ganze, den Grad n nicht erreichende Function von y ganze Functionen von x sind. Sie kann aber auch bei gebrochenen Coëfficienten $r_0, r_1, . . r_{n-1}$ algebraisch ganz sein, und die Aufstellung aller ganzen algebraischen Functionen des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ gehört zu den wichtigsten Aufgaben der Lehre von den Functionen dieses Bereichs. Kronecker[1] hat dieselbe zuerst durch Nachweisung eines sogenannten Fundamentalsystems, d. h. eines Systems von n ganzen algebraischen Functionen $\omega_1, \omega_2, . . \omega_n$ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ gelöst, welche der Bedingung genügen, dass der Ausdruck

$$g_1\omega_1+g_2\omega_2+ \quad +g_n\omega_n$$

alle möglichen ganzen algebraischen Functionen von $\mathfrak{G}$ und nur solche liefert, wenn man für $g_1, g_2, . . g_n$ alle möglichen ganzen Functionen von x setzt.

Es soll hier ein Verfahren dargelegt werden, durch welches man nur mit Hilfe linear-homogener Gleichungen zur Aufstellung eines Fundamentalsystems des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ gelangen kann.

2.

Es sei

$$\varphi(y) = r_0+r_1y+r_2y^2+ . \quad . + r_{n-1}y^{n-1}$$

irgend eine ganze algebraische Function des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$, wo y eine Wurzel der Gleichung

$$F(y) = 0$$

und $r_0, r_1, . . . r_{n-1}$ rationale Functionen von x bezeichnen.

---

[1] Kronecker, Über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, Crelle's J., Bd. 91; Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Crelle's J., Bd. 92. — Dedekind-Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, Crelle's J., Bd. 92. — Hensel, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, Crelle's J., Bd. 109.

Man verstehe unter t, z, u Veränderliche, unter $F_1(t)$ den Quotienten

$$F_1(t) = \frac{F(t)-F(z)}{t-z},$$

unter D, D_1 die Discriminanten der Functionen $F(t)$, $F_1(t)$ und bezeichne mit $\Theta(u)$ die Resultante der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)+\varphi(z)F_1(t)u,$$

mit $\Theta_1(u)$ die der Functionen

$$F(z), \qquad 1-D_1\varphi^2(z)F_1^2(t)u$$

in Bezug auf z. Da $\varphi(y)$ algebraisch ganz vorausgesetzt wird und die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von z in $F(z)$, $F_1(t)$, D_1 ganze Functionen von x und t sind, so haben $\Theta(u)$ und $\Theta_1(u)$ ebensolche Functionen zu Coëfficienten. Da überdies der Coëfficient von u in $\Theta(u)$ nach der Lagrange'schen Interpolationsformel $= D\varphi(t)$ ist, so hat $\Theta(u)$ die Gestalt

$$\Theta(u) = D+D\varphi(t)u+gu^2+.$$

wo g eine ganze Function von x und t bezeichnet.

Das Product $\Theta(Du).\Theta(-Du)$ ist die Resultante der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)^2-\varphi^2(z)F_1^2(t)D^2u^2$$

beachtet man aber, dass die Discriminante D die Gestalt

$$D = D_1F'(z)^2+HF(z)$$

hat, wo H eine ganze Function von z bezeichnet, und demzufolge

$$F'(z)^2-\varphi^2(z)F_1^2(t)D^2u^2 = F'(z)^2(1-D_1\varphi^2(z)F_1^2(t)Du^2) \\ -H\varphi^2(z)F_1^2(t)Du^2.F(z)$$

ist, so kann das genannte Product auch als Resultante der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)^2(1-D_1\varphi^2(z)F_1^2(t)Du^2)$$

aufgefasst werden und zerfällt in die Resultante D^2 der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)^2$$

und die Resultante $\Theta_1(Du^2)$ der Functionen

$$F(z), \qquad 1-D_1\varphi^2(z)F_1^2(t).Du^2.$$

Es ist also

$$\Theta(Du)\Theta(-Du) = D^2\Theta_1(Du^2).$$

Die Gleichsetzung der Coëfficienten von u^2 in dieser Identität ergibt, wenn der Coëfficient von u in $\Theta_1(u)$ mit g_1 bezeichnet wird,

$$2D^3g-D^4\varphi^2(t) = D^3g_1$$

oder

$$D\varphi^2(t) = 2g-g_1.$$

Hienach ist $D\varphi^2(t)$ eine ganze Function von x und t. Dann muss aber, wenn Q^2 das in D aufgehende Quadrat höchsten Grades in x bedeutet, $Q^2\varphi^2(t)$ und somit auch $Q\varphi(t)$ eine ganze Function von x und t sein. Die nothwendige Bedingung, dass $\varphi(y)$ algebraisch ganz sei, besteht also darin, dass

$$Qr_0, Qr_1, \ldots Qr_{n-1}$$

ganze Functionen von x sind.

Man kann diese Bedingung anders ausdrücken. Nennt man eine ganze algebraische Function ω von x durch eine ganze Function M von x theilbar, wenn $\frac{\omega}{M}$ algebraisch ganz ist, so muss die Function

$$Q\varphi = h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots+h_{n-1}y^{n-1}$$

ganze Functionen $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$ von x zu Coëfficienten haben und durch Q theilbar sein.

Die Aufgabe, alle ganzen algebraischen Functionen des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ aufzustellen, ist somit auf die Aufgabe zurückgeführt, alle Functionen

$$h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots+h_{n-1}y^{n-1}$$

mit in x ganzen Coëfficienten $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$ zu ermitteln, welche durch eine gegebene ganze Function von x theilbar sind.

3.

Eine linear-homogene Form

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ soll hier ganz genannt werden, wenn ihre Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganze Functionen von x sind. Eine solche ganze Form f soll durch andere ebensolche Formen $z_1, z_2, \ldots z_m$ in ganzer Weise darstellbar heissen, wenn

$$f = g_1 z_1 + g_2 z_2 + \ldots + g_m z_m$$

und $g_1, g_2, \ldots g_m$ ganze Functionen von x sind. Von einem Systeme von ganzen linear-homogenen Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ soll gesagt werden, dass es durch ein zweites ebensolches System in ganzer Weise darstellbar ist, wenn alle Formen des ersten Systems durch die Formen des zweiten in ganzer Weise darstellbar sind. Wenn ein Formensystem S durch ein zweites, S', und dieses durch ein drittes, S'', in ganzer Weise darstellbar ist, so ist auch S durch S'' in ganzer Weise darstellbar.

Wenn in einem System

$$f_1, f_2, \ldots f_m$$

von m ganzen linear-homogenen Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ n linear-unabhängige Formen, d. h. n Formen mit nicht identisch verschwindender Determinante vorkommen, so lässt sich ein System von n ganzen linear-homogenen Formen

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$$

der nämlichen Veränderlichen aufstellen, welches folgende Eigenschaften hat:

I. Jedes der beiden Systeme ist durch das andere in ganzer Weise darstellbar.

II. ψ_k enthält nur die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_k$ und hat demnach die Gestalt

$$\psi_k = c_{k1} x_1 + c_{k2} x_2 + \ldots + c_{kk} x_k$$

Wenn ein solches System existirt, so hat man Identitäten von der Form

$$\begin{aligned}
\psi_n &= a_1\ f_1 + a_2\ f_2 + \quad + a_m f_m \\
f_1 &= A_1\ \psi_1 + B_1\ \psi_2 + \quad + L_1\ \psi_n \\
f_2 &= A_2\ \psi_1 + B_2\ \psi_2 + \quad + L_2\ \psi_n \\
\\
f_m &= A_m \psi_1 + B_m \psi_2 + . \quad + L_m \psi_n,
\end{aligned}$$

in welchen $a_1, a_2, . \ . A_1, . \ . L_m$ ganze Functionen von x bezeichnen. Greift man die in x_n multiplicirten Glieder heraus und bezeichnet zu diesem Zwecke die Coëfficienten von x_n in $f_1, f_2, . \ . f_m, \psi_n$ mit $l_1, l_2, . . . l_m, c_{nn}$, so ergibt sich

$$c_{nn} = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \quad + l_m a_m$$
$$l_1 = L_1 c_{nn},\ l_2 = L_2 c_{nn}, . \ . l_m = L_m c_{nn}.$$

Diesen Gleichungen zufolge muss c_{nn} der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $l_1, l_2, . . . l_m$ sein, welche nicht alle identisch verschwinden können, und $a_1, a_2, . \ . a_m$ bilden eine aus ganzen Functionen von x bestehende Lösung der Gleichung

$$l_1 z_1 + l_2 z_2 + \quad + l_m z_m = c_{nn}. \tag{1}$$

Ist umgekehrt c_{nn} der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $l_1, l_2, . . . l_m$ und $a_1, a_2, . \ . a_m$ irgend eine Lösung der Gleichung (1) in ganzen Functionen von x, so hat das durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\psi_n &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \quad . + a_m f_m \\
f_1' &= f_1 - \frac{l_1}{c_{nn}} \psi_n \\
f_2' &= f_2 - \frac{l_2}{c_{nn}} \psi_n \\
\\
f_m' &= f_m - \frac{l_m}{c_{nn}} \psi_n
\end{aligned}$$

definirte Formensystem

$$\psi_n, f_1', f_2', . . . f_m'$$

ganze Functionen von x zu Coëfficienten, und es ist sowohl dieses System durch das ursprüngliche System $f_1, f_2, \ldots f_m$, als auch dieses durch jenes in ganzer Weise darstellbar.

Ist nun $n = 1$, so verschwinden $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ identisch, und man hat das gewünschte System $\psi_1 = c_{11}\, x_1$.

Ist hingegen $n > 1$, so müssen unter den Formen $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$, welche nur noch die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ enthalten, $n-1$ linear-unabhängige vorkommen, da andernfalls $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ durch weniger als $n-1$ Formen und daher $f_1, f_2, \ldots f_m$ gegen die Annahme durch weniger als n Formen ausdrückbar wären. Man kann daher wieder, wenn die Coëfficienten von x_{n-1} in $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ mit $k_1, k_2, \ldots k_m$, ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler mit c_{n-1n-1} und irgend eine Lösung der Gleichung

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots + k_m z_m = c_{n-1n-1}$$

in ganzen Functionen von x mit $b_1, b_2, \ldots b_m$ bezeichnet werden,

$$\psi_{n-1} = b_1 f'_1 + b_2 f'_2 + \ldots + b_m f'_m$$

$$f''_1 = f'_1 - \frac{k_1}{c_{n-1n-1}}\, \psi_{n-1}$$

$$f''_2 = f'_2 - \frac{k_2}{c_{n-1n-1}}\, \psi_{n-1}$$

$$\ldots$$

$$f''_m = f'_m - \frac{k_m}{c_{n-1n-1}}\, \psi_{n-1}$$

setzen und erhält ein System von ganzen Formen

$$\psi_{n-1},\; f''_1,\; f''_2, \ldots f''_m,$$

welches durch die Formen $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ und durch welches umgekehrt diese letzteren Formen in ganzer Weise darstellbar ist. Es sind dann auch die Formensysteme

$$\psi_n,\; f'_1,\; f'_2 \ldots f'_m$$

und

$$\psi_n,\; \psi_{n-1},\; f''_1,\; f''_2 \ldots f''_m$$

durch einander in ganzer Weise darstellbar.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Formen $f_1'', f_2'', \ldots f_m''$ an, wofern $n > 2$ ist, und setzt dasselbe so lange fort, bis man zu identisch verschwindenden Formen $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots f_m^{(n)}$ gelangt, so ergibt sich ein System von ganzen Formen

$$\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots \psi_1,$$

welches die gewünschten Eigenschaften I und II besitzt.

Man kann auch noch bewirken, dass die Coëfficienten von x_k in $\psi_{k+1}, \psi_{k+2}, \ldots \psi_n$ den Grad von c_{kk} nicht erreichen. Genügen die Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ noch nicht dieser Bedingung, so sei ψ_p die erste unter denselben, deren Coëfficienten eine Ausnahme machen, und c_{pk} der erste unter den Coëfficienten von x_{p-1}, $x_{p-2}, \ldots x_1$ in ψ_p, dessen Grad den von c_{kk} erreicht oder übersteigt. Es sei c'_{pk} der Rest, welcher bei der Division von c_{pk} durch c_{kk} bleibt und den Grad von c_{kk} nicht erreicht, und $c_{pk} = g c_{kk} + c'_{pk}$. Ersetzt man dann ψ_p durch $\psi_p - g\psi_k$, so sind das neue Formensystem und das ursprüngliche wieder in ganzer Weise durch einander darstellbar. Das neue Formensystem hat überdies die Eigenschaft II und erfüllt von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen, dass der Coëfficient von x_k in ψ_i den Grad von c_{kk} nicht erreichen darf, wenn $i > k$, eine mehr als die Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$. Wendet man, wenn es nöthig ist, dasselbe Verfahren auf das erhaltene Formensystem an und wiederholt es nach Bedarf, so gelangt man nach höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schritten zu einem Formensystem mit den gewünschten Eigenschaften.

4.

Aufgabe. Es seien

$$\begin{aligned}
f_1 &= r_{11} + r_{12}\,y + r_{13}\,y^2 + \ldots + r_{1n}\,y^{n-1} \\
f_2 &= r_{21} + r_{22}\,y + r_{23}\,y^2 + \ldots + r_{2n}\,y^{n-1} \\
&\ldots \\
f_n &= r_{n1} + r_{n2}\,y + r_{n3}\,y^2 + \ldots + r_{nn}\,y^{n-1}
\end{aligned}$$

n gegebene ganze algebraische Functionen des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$, welche linear-unabhängig sind, d. h. der Bedingung genügen, dass die aus ihren Coëfficienten gebildete Determinante

$$\Sigma \pm r_{11} r_{22} \ldots r_{nn}$$

nicht identisch verschwindet, und M eine gegebene ganze Function von x, welche zu ihrer Ableitung M' theilerfremd ist; es bezeichne ferner P_s allgemein ein Product von s Functionen der Reihe $f_1, f_2, \ldots f_n$ oder auch eine dieser Functionen selbst oder die Einheit, je nachdem $s > 1$, $s = 1$ oder $s = 0$ ist, und es werde angenommen, dass die Summe ΣP_s der conjugirten Werthe von P_s, welche den n Wurzeln der Gleichung

$$F(y) = 0$$

entsprechen, für alle möglichen Producte P_s von $s = 1$ bis $s = n$ durch M^{μ_s} theilbar ist, wo die Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ ganze nicht negative Zahlen sind und für alle genannten Werthe von s der Bedingung

$$\frac{\mu_s}{s} \leqq \frac{\mu_1}{1} \leqq 1$$

genügen; es sollen alle ganzen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x ermittelt werden, für welche die ganze algebraische Function

$$f = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

durch M theilbar wird.

Sind die Brüche

$$\frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots \frac{\mu_n}{n}$$

alle $= 1$, so ist der Ausdruck

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

für jedes beliebige System von ganzen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x durch M theilbar und die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ bleiben unbestimmt.

Bezeichnen nämlich

$$C_1, C_2, \ldots C_n$$

die elementaren symmetrischen Functionen und

$$S_1, S_2, \ldots S_n$$

die n ersten Potenzsummen der n conjugirten Werthe irgend einer der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, etwa f_i, so ist C_r, durch $S_1, S_2, \ldots S_n$ dargestellt, eine Summe von Gliedern von der Form

$$c S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \ldots S_n^{\alpha_n},$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ganze, nicht negative, der Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = r$$

genügende Zahlen sind. Ein solches Glied ist durch M in der Potenz

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \ldots + \alpha_n \mu_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n \\ = r$$

theilbar, da S_k als Summe ΣP_k nach der Annahme durch $M^{\mu_k} = M^k$ theilbar ist. Da hienach M^r in jedem der genannten Glieder von C_r und daher auch in C_r selbst aufgeht, so ist $\frac{f_i}{M}$ für jedes i und demzufolge die Function

$$\frac{f}{M} = u_1 \frac{f_1}{M} + u_2 \frac{f_2}{M} + \ldots + u_n \frac{f_n}{M}$$

für jedes beliebige System von ganzen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x algebraisch ganz.

Ist dagegen wenigstens einer der Brüche

$$\frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots \frac{\mu_n}{n}$$

<1, so sei $\frac{\mu_m}{m}$ bei möglichst grossem m der kleinste derselben. Es ist dann $\frac{\mu_m}{m} < 1$ und $m > 1$, da nach der Annahme

$$\frac{\mu_2}{2} \leqq \frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_3}{3} \leqq \frac{\mu_1}{1}, \ldots \frac{\mu_n}{n} \leqq \frac{\mu_1}{1}$$

ist.

Bezeichnen

$$C'_1, C'_2, \quad C'_n$$

die elementaren symmetrischen Functionen der n conjugirten Werthe von f_i^m, und stellt man diese Functionen durch $S_1, S_2, \ldots S_n$ dar, so erscheint C'_r als Summe von Gliedern von der Form

$$c S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \ldots S_n^{\alpha_n},$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ganze, nicht negative, der Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \quad + n\alpha_n = mr$$

genügende Zahlen sind. Ein solches Glied ist durch M in der Potenz

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \ldots + \alpha_n \mu_n$$

theilbar. Da aber

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \quad + \alpha_n \mu_n = \frac{\mu_1}{1}\alpha_1 + \frac{\mu_2}{2}\, 2\alpha_2 + \quad + \frac{\mu_n}{n} \cdot n\alpha_n$$

$$\geqq \frac{\mu_m}{m}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n)$$

$$\geqq r\mu_m$$

ist, so geht $M^{r\mu_m}$ in jedem der genannten Glieder von C'_r, also auch in C'_r selbst auf. Die Function f_i^m ist demnach für jedes i durch M^{μ_m} und ein Product P_s^m demzufolge durch $M^{s\mu_m}$ theilbar.

Ist nun f irgend eine der gesuchten Functionen, so geht M^m in f^m, also $M^{m+s\mu_m}$ in $f^m P_s^m$ auf. Dann muss aber die Summe S der conjugirten Werthe von fP_s durch M^{q_s} theilbar sein, wo q_s die grösste in $\dfrac{m + s\mu_m + m - 1}{m}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Um dies zu zeigen, seien

$$x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots x_{mn}$$

mn Unbestimmte,

$$\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_{mn}$$

ihre elementaren symmetrischen Functionen,

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$$

die elementaren symmetrischen Functionen der n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots \sigma'_{mn-n}$$

die der übrigen Unbestimmten $x_{n+1}, \ldots x_{mn}$ und

$$\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$$

die von $x_1^m, x_2^m, \ldots x_n^m$. Die Function

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

genügt einer algebraischen Gleichung

$$\sigma_1^N - \Gamma_1 \sigma_1^{N-1} + \Gamma_2 \sigma_1^{N-2} - \ldots \pm \Gamma_N = 0$$

vom Grade

$$N = \frac{mn(mn-1)(mn-2)\ldots(mn-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

in welcher die Coëfficienten $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ ganze Functionen von $\chi_1, \chi_2, \ldots$ sind und Γ_r in $x_1, x_2, \ldots$ homogen und vom Grade r ist. Denkt man sich $\chi_1, \chi_2, \ldots$ durch $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ und $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ ausgedrückt, so ist die vorstehende Gleichung in den Functionen $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots \sigma'_{mn-n}$ identisch, und man darf dieselben durch die Coëfficienten des Productes

$$(z^{m-1} + x_1 z^{m-2} + x_1^2 z^{m-3} + \ldots + x_1^{m-1})(z^{m-1} + x_2 z^{m-2} + \ldots + x_2^{m-1}) \ldots (z^{m-1} + x_n z^{m-2} + \ldots + x_n^{m-1})$$

ersetzen. Dies läuft aber darauf hinaus, die Functionen $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_{mn}$ durch die Coëfficienten des Productes

$$(z^m - x_1^m)(z^m - x_2^m)\ldots(z^m - x_n^m) = z^{mn} - \tau_1 z^{mn-m} + \tau_2 z^{mn-2m} - \ldots \pm \tau_n$$

zu ersetzen. Die Functionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ gehen dann in ganze Functionen von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ oder in 0 über, je nachdem ihre Stellenzeiger durch m theilbar sind oder nicht, und man hat identisch

$$\sigma_1^N + H_m \sigma_1^{N-m} + H_{2m} \sigma_1^{N-2m} + \ldots H_N = 0,$$

wo H_{mr} eine ganze Function von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ bezeichnet und aus Gliedern von der Form

$$c\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2} \ldots \tau_n^{\alpha_n}$$

besteht, in welchen

$$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=r$$

ist.

Setzt man nun statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n conjugirten Werthe von fP_s und zur Abkürzung $m+s\mu_m=\lambda$, so werden $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ ganze Functionen von x, welche beziehungsweise durch $M^\lambda, M^{2\lambda}, \ldots M^{n\lambda}$ theilbar sind, also H_{mr} eine durch $M^{r\lambda}$ theilbare ganze Function $B_r M^{r\lambda}$ von x, und man hat

$$S^N+B_1M^\lambda S^{N-m}+B_2M^{2\lambda}S^{N-2m}+\ldots=0.$$

Hieraus folgt, wenn p die grösste in $\frac{\lambda}{m}$ enthaltene ganze Zahl, T den grössten gemeinschaftlichen Theiler von S und M^p bezeichnet und

$$S=TS_0 \qquad M^p=TL$$

gesetzt wird,

$$S_0^N+B_1M^{\lambda-mp}L^mS_0^{N-m}+B_2M^{\lambda-2mp}L^{2m}S_0^{N-2m}+\ldots=0,$$

und es erhellt, dass die Function L 0ten Grades sein muss, da sie andernfalls nicht zu S_0 theilerfremd sein könnte. S ist also durch M^p theilbar. Da ferner M in S_0^N aufgeht, wenn $\lambda > mp$ ist, und die Discriminante von M nicht $=0$ ist, so geht M auch in S_0 und daher M^{p+1} in S auf.

Dies vorausgeschickt, bezeichne ν jede Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots n-1$, welche der Bedingung

$$\frac{m-1}{m}+\nu\frac{\mu_m}{m}-\mu_{\nu+1}\geqq 0$$

genügt. Unter diesen Zahlen kommt jedenfalls $m-1$ vor, da

$$\frac{m-1}{m}+(m-1)\frac{\mu_m}{m}-\mu_m=\frac{m-1-\mu_m}{m}\geqq 0$$

ist. Es ist dann

$$q_\nu - \mu_{\nu+1} \leqq \frac{m+\nu\mu_m+m-1}{m} - \mu_{\nu+1} \leqq \frac{2m-1}{m} + \nu\,\frac{\mu_\nu+1}{\nu+1} - \mu_{\nu+1}$$
$$< 2$$
$$q_\nu - \mu_{\nu+1} > \frac{m-1+\nu\mu_m}{m} - \mu_{\nu+1},$$
$$> 0,$$

woraus

$$q_\nu = 1 + \mu_{\nu+1}$$

folgt.

Die Summe $\Sigma f P_\nu$ muss also für jede der gesuchten Functionen f und alle möglichen Producte P_ν, welche den einzelnen Zahlen ν entsprechen, durch $M^{1+\mu_{\nu+1}}$ theilbar sein. Da f die Gestalt

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \quad + u_n f_n$$

hat, so sind die Coëfficienten von $u_1, u_2, \ldots u_n$ in $\Sigma f P_\nu$ Summen $\Sigma P_{\nu+1}$ und somit nach der Annahme durch $M^{\mu_{\nu+1}}$ theilbar. Man kann demnach

$$\frac{1}{M^{\mu_{\nu+1}}} \Sigma f P_\nu = L_1 u_1 + L_2 u_2 + \quad . + L_n u_n$$

setzen, wo $L_1, L_2, \ldots L_n$ bekannte ganze Functionen von x bezeichnen, und es müssen sämmtliche Ausdrücke

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + \quad + L_n u_n,$$

welche allen möglichen Producten P_ν entsprechen, durch M theilbar sein. Bestimmt man also alle ganzen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x, welche dieses bewirken, und bezeichnet die diesen Functionen entsprechenden Ausdrücke $u_1 f_1 + u_2 f_2 +$ $+ u_n f_n$ mit $\overline{f}$, so sind jedenfalls alle gesuchten Functionen f unter den Functionen $\overline{f}$ enthalten.

Es sei $u_1, u_2, \quad u_n$ irgend ein Functionensystem, für welches alle Ausdrücke $L_1 u_1 + L_2 u_2 + \quad + L_n u_n$ durch M theilbar sind, und

$$u_1 = s_1 + Q_1 M$$
$$u_2 = s_2 + Q_2 M$$

$$u_n = s_n + Q_n M,$$

wo $s_1, s_2, \ldots s_n$ die den Grad von M nicht erreichenden Reste der Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ in Bezug auf den Theiler M bezeichnen. Es wird dann

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n = L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n \\ + M(L_1 Q_1 + L_2 Q_2 + \ldots + L_n Q_n)$$

und es müssen demnach auch alle Ausdrücke $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots$ $\ldots + L_n s_n$ durch M theilbar sein. Man braucht daher, um alle Functionen $u_1, u_2 \ldots u_n$ zu erhalten, nur alle ganzen Functionen $s_1, s_2, \ldots s_n$ zu suchen, welche den Grad von M nicht erreichen und die Ausdrücke $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n$ durch M theilbar machen, und zu denselben beliebige, durch M theilbare ganze Functionen von x hinzuzufügen.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Theilbarkeit der Ausdrücke $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n$ durch M bestehen in einem bekannten System von linear-homogenen Gleichungen für die unbekannten Coëfficienten der Functionen $s_1, s_2, \ldots s_n$. Diese Gleichungen besitzen entweder nur die eine Lösung

$$s_1 = 0,\; s_2 = 0, \ldots s_n = 0$$

oder aber eine oder mehrere linear-unabhängige Lösungen

$$\begin{array}{l} s'_1, s'_2, \ldots s'_n \\ s''_1, s''_2, \ldots s''_n \end{array}$$

durch welche die allgemeine Lösung in der Form

$$\begin{aligned} s_1 &= p's'_1 + p''s''_1 + \ldots \\ s_2 &= p's'_2 + p''s''_2 + \ldots \\ & \\ s_n &= p's'_n + p''s''_n + \end{aligned}$$

darstellbar ist, wo $p', p'', \ldots$ Constanten bezeichnen.

Alle Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$, welche die gesuchten Functionen $\overline{f}$ liefern, sind demnach in den Formeln

$$u_i = Q_i M \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

oder eventuell in den Formeln

$$u_i = Q_i M + p's'_i + p''s''_i + \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

enthalten, wo $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ beliebige ganze Functionen von x bezeichnen. Setzt man daher

$$Mf_1 = \Phi_1,\ Mf_2 = \Phi_2, \dots Mf_n = \Phi_n$$

und vorkommendenfalls

$$\begin{aligned} s'_1 f_1 + s'_2 f_2 + \dots + s'_n f_n &= \Phi_{n+1} \\ s''_1 f_1 + s''_2 f_2 + \dots + s''_n f_n &= \Phi_{n+2} \end{aligned}$$

so hat man in allen Fällen eine Reihe von Functionen

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_\mu,$$

durch welche sich sämmtliche Functionen $\overline{f}$ in der Form

$$\overline{f} = g_1\Phi_1 + g_2\Phi_2 + \dots + g_\mu\Phi_\mu$$

so darstellen lassen, dass $g_1, g_2, \dots g_\mu$ ganze Functionen von x sind. Da die Functionen Φ sich als ganze linear-homogene Formen von $f_1, f_2, \dots f_n$ auffassen lassen und $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_n$ linear-unabhängig sind, so kann man nach 3. n linear-unabhängige Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ bestimmen, welche ganze linear-homogene Formen der Φ und daher auch der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ sind und durch welche sich alle Functionen $\overline{f}$ in der Gestalt

$$\overline{f} = v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + \dots + v_n\varphi_n$$

so darstellen lassen, dass $v_1, v_2, \dots v_n$ ganze Functionen von x sind.

Definirt man die Zahlen

$$\mu'_1, \mu'_2, \dots \mu'_n$$

so, dass $\mu'_s = 1 + \mu_s$ oder $= \mu_s$ ist, je nachdem $s-1$ zu den Zahlen ν gehört oder nicht, und bezeichnet P'_s irgend ein Product von s gleichen oder verschiedenen Functionen der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ oder auch nur eine solche Function oder die Einheit, je nachdem $s > 1$, $s = 1$ oder $s = 0$ ist, so ist die Summe $\Sigma P'_s$ der conjugirten Werthe von P'_s von $s = 1$ bis $s = n$ durch M in der Potenz μ'_s theilbar. Denn $\Sigma P'_s$ zerfällt in Glieder von der Form $g\Sigma P_s$, wo g eine ganze Function von x bezeichnet, und ist durch $M^{\mu'_s} = M^{\mu_s}$ theilbar, wenn $s-1$ nicht zu den Zahlen ν gehört. Dagegen ist, wenn $s-1$ zu denselben gehört,

$$P'_{\nu+1} = \varphi_i P'_\nu$$

und $\Sigma P'_{\nu+1}$ zerfällt in Glieder von der Form $g\Sigma\varphi_i P_\nu$, wo g eine ganze Function von x und i eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezeichnen. Diese Glieder sind alle durch M in der Potenz $1+\mu_{\nu+1} = \mu'_{\nu+1}$ theilbar, weil $\Sigma\varphi_i P_\nu$ nach dem Obigen diese Eigenschaft hat. Überdies ist für alle Stellenzeiger s von 1 bis n

$$\frac{\mu'_s}{s} \leqq \frac{\mu'_1}{1} \leqq 1.$$

Ist nämlich $\mu_1 = 0$, also auch $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = 0$, so ist $m = n$ und alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ gehören zu den Zahlen ν, woraus $\mu'_1 = 1$ folgt; ist aber $\mu_1 = 1$, so gehört 0 nicht zu den Zahlen ν, und μ'_1 ist ebenfalls $= 1$. Es genügt also darzuthun, dass $\frac{\mu'_s}{s} \leqq 1$ ist, was nur in dem Falle eines Beweises bedarf, wo $s-1$ zu den Zahlen ν gehört. Aus der Definition der Zahlen ν folgt aber

$$\mu_{\nu+1} \leqq \frac{m-1}{m} + \frac{\nu\,\mu_m}{m} < 1+\nu$$

also auch

$$\mu'_{\nu+1} = 1 + \mu_{\nu+1} \leqq 1+\nu.$$

Man hat also ein Functionensystem

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

gefunden, welches ähnliche Eigenschaften wie das System $f_1, f_2, \ldots f_n$, aber vor demselben den Vorzug voraus hat, dass wenigstens einer der Brüche

$$\frac{\mu'_1}{1}, \frac{\mu'_2}{2}, \ldots \frac{\mu'_n}{n}$$

grösser und keiner kleiner als der gleichstellige Bruch der Reihe

$$\frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots \frac{\mu_n}{n}$$

ist.

Sind nun die Brüche

$$\frac{\mu_1'}{1}, \frac{\mu_2'}{2}, \ldots \frac{\mu_n'}{n}$$

schon alle $= 1$, so bleiben die ganzen Functionen $v_1, v_2 \ldots v_n$ unbestimmt und die Formel

$$f = v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + \ldots + v_n\varphi_n$$

enthält die vollständige Auflösung der Aufgabe. Sind dagegen die genannten Brüche noch nicht alle $= 1$, so sind die Functionen f unter den Functionen

$$\overline{f} = v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + \ldots + v_n\varphi_n$$

zu suchen, und es kann das dargelegte Verfahren wieder auf die Bestimmung der ganzen Functionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ angewendet und überhaupt so oft wiederholt werden, bis man zu einem Functionensystem $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ gelangt, für welches ΣP_s, wenn P_s ein Product von s Functionen dieses Systems bezeichnet, durch M^s theilbar ist. Die Formel

$$f = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \ldots + t_n\omega_n$$

enthält dann alle gesuchten Functionen und nur diese, wenn man für $t_1, t_2, \ldots t_n$ alle möglichen ganzen Functionen von x setzt. Die Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sind ganze linear-homogene Formen von $f_1, f_2, \ldots f_n$.

5.

Mit Hilfe der in dem vorhergehenden Abschnitte gelösten Aufgabe kann man alle Functionen

$$f = h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \ldots + h_{n-1} y^{n-1}$$

aufstellen, deren Coëfficienten $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$ ganze Functionen von x und welche durch eine beliebig gegebene ganze Function N von x theilbar sind.

Es sei M_1 ein Factor von N, dessen Discriminante nicht $= 0$ ist, und man setze in der Aufgabe des vorhergehenden Abschnittes

$$f_1 = 1,\ f_2 = y,\ f_3 = y^2, \ldots f_n = y^{n-1}$$
$$M = M_1.$$

Man erhält dann für alle durch M_1 theilbaren Functionen f einen Ausdruck

$$t_1 \varphi_1 + t_2 \varphi_2 + \ldots + t_n \varphi_n,$$

in welchem $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von x und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bekannte ganze linear-homogene Formen von $1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$ bezeichnen.

Fällt nun M_1 mit N zusammen, so hat man die allgemeine Lösung

$$f = t_1 \varphi_1 + t_2 \varphi_2 + \ldots + t_n \varphi_n.$$

Ist dagegen $G = M_1 G_1$ und G_1 von höherem als dem 0ten Grade, so sei M_2 ein Factor von G_1, dessen Discriminante nicht $= 0$ ist, und man suche alle durch $M_1 M_2$ theilbaren Functionen f. Dieselben fallen mit den durch M_2 theilbaren Functionen zusammen, welche in dem Ausdrucke

$$t_1 \frac{\varphi_1}{M_1} + t_2 \frac{\varphi_2}{M_1} + \quad + t_n \frac{\varphi_n}{M_1}$$

enthalten sind. Man setze also in der Aufgabe des vorhergehenden Abschnittes

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{M_1},\ f_2 = \frac{\varphi_2}{M_1}, \ldots f_n = \frac{\varphi_n}{M_1}$$
$$M = M_2.$$

Man erhält dann wieder einen erschöpfenden Ausdruck

$$t_1 \psi_1 + t_2 \psi_2 + \quad . + t_n \psi_n$$

für alle durch M_2 theilbaren Functionen von obiger Form, in welchem $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von x und $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ ganze linear-homogene Formen von $\frac{\varphi_1}{M_1}\ \frac{\varphi_2}{M_1}, \ldots \frac{\varphi_n}{M_1}$ bezeichnen. Wird also

$$M_1 \psi_1 = \chi_1,\ M_1 \psi_2 = \chi_2, \ldots M_1 \psi_n = \chi_n$$

gesetzt, so enthält der Ausdruck

$$t_1\chi_1+t_2\chi_2+\ldots+t_n\chi_n$$

alle durch $M_1 M_2$ theilbaren Functionen f.

Fährt man in derselben Weise fort, so ergeben sich alle durch N theilbaren Functionen f in der Gestalt

$$f=t_1\vartheta_1+t_2\vartheta_2+\ldots+t_n\vartheta_n$$

wo $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ bekannte ganze linear-homogene Formen von $1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$ und $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von x bezeichnen.

Setzt man $N=Q$, wo Q^2 das in der Discriminante D aufgehende Quadrat höchsten Grades in x bezeichnet, so stellt die Formel

$$f=t_1\vartheta_1+t_2\vartheta_2+\ldots+t_n\vartheta_n$$

alle durch Q theilbaren Functionen f dar und die Functionen

$$\omega_1=\frac{\vartheta_1}{Q},\ \omega_2=\frac{\vartheta_2}{Q}, \ldots \omega_n=\frac{\vartheta_n}{Q}$$

bilden ein Fundamentalsystem für den durch die Gleichung

$$F(y)=0$$

festgelegten Gattungsbereich $\mathfrak{G}$.

6.

Setzt man in der Gleichung

$$F(y)=y^n+G_1(x)y^{n-1}+G_2(x)y^{n-2}+\ldots+G_n(x)=0,$$

welche die algebraische Function y definirt, $x=\frac{1}{\xi}$ und bezeichnet die niedrigste Potenz von ξ, mit welcher $G_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$ zu multipliciren ist, um in eine ganze Function H_k von ξ verwandelt zu werden, mit ξ^{m_k}, die grösste der ganzen Zahlen, welche in den Brüchen

$$\frac{m_1}{1}, \frac{m_2+1}{2}, \frac{m_3+2}{3}, \ldots \frac{m_n+n-1}{n}$$

enthalten sind, mit m, so genügt die Function

$$\eta = \xi^m y$$

der irreductibelen Gleichung

$$G(\eta) = \eta^n + \xi^{m-m_1} H_1 \eta^{n-1} + \xi^{2m-m_2} H_2 \eta^{n-2} + \quad + \xi^{nm-m_n} H_n = 0$$

und ist demnach eine ganze algebraische Function von ξ.

Jede ganze algebraische Function φ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ geht durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi} \qquad y = \frac{\eta}{\xi^m}$$

in eine rationale Function von ξ und η über, und es gibt einen kleinsten ganzen nicht negativen Exponenten e von der Art, dass $\xi^e \varphi$ algebraisch ganz in ξ wird. Dieser Exponent wird (nach Dedekind-Weber) der Exponent der Function φ genannt. Ein Fundamentalsystem $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ soll ein Normalfundamentalsystem genannt werden, wenn die Functionen $\frac{\omega_1}{x^{e_1}}, \frac{\omega_2}{x^{e_2}} \quad \frac{\omega_n}{x^{e_n}}$, in welchen $e_1, e_2 \ldots e_n$ die Exponenten von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ bezeichnen, durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi} \qquad y = \frac{\eta}{\xi^m}$$

in Functionen $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ übergehen, welche ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$G(\eta) = 0$$

bilden.

Es seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die Functionen eines gegebenen Fundamentalsystems des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$, $e_1, e_2, \ldots e_n$ ihre Exponenten, und es gehe ω_i durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ in $\frac{\omega'_i}{\xi^{e_i}}$ über. Damit $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_n$ ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$G(\eta) = 0$$

bilden, ist es nothwendig und hinreichend, dass alle Functionen $\varphi'_1, \varphi'_2, \quad \varphi'_n$ eines bestimmten Fundamentalsystems dieser

Gleichung sich als ganze linear-homogene Formen von $\omega'_1, \omega'_2 \dots$
$\dots \omega'_n$ darstellen lassen.

Es gehe φ'_i für die Substitution

$$\xi = \frac{1}{x} \qquad \eta = \frac{y}{x^m}$$

in $\frac{\varphi_i}{x^e}$ über, wo φ_i algebraisch ganz in x und nicht durch x theilbar ist. Man hat dann

$$\varphi_i = g_1(x)\,\omega_1 + g_2(x)\,\omega_2 + \dots + g_n(x)\,\omega_n,$$

wo $g_1, g_2, \dots g_n$ ganze Functionen von x bezeichnen. Setzt man in dieser Gleichung $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ und multiplicirt mit ξ^e, so wird

$$\varphi'_i = \xi^{e-e_1} g_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'_1 + \xi^{e-e_2} g_2\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'_2 + \dots + \xi^{e-e_n} g_n\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'_n.$$

Ist daher eine der Functionen $g_1(x), g_2(x), \dots$ etwa $g_k(x)$ von höherem als dem $(e-e_k)^{\text{ten}}$ Grade, so ist $\xi^{e-e_k} g_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$ keine ganze Function von ξ, und φ'_i kann nicht als ganze linear-homogene Form von $\omega'_1, \omega'_2, \dots \omega'_n$ dargestellt werden. Ist in diesem Falle allgemein ν_h die Gradzahl der Function g_h, wenn letztere nicht identisch verschwindet, d die grösste unter den Differenzen $\nu_h + e_h - e$, und entspricht diese Differenz der Function g_r, so ist der Coëfficient von x^{ν_r} in g_r von Null verschieden, und man hat, wenn

$$\xi^{e-e_h+d} g_h\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_h + \xi g'_h$$

$$g'_1\omega'_1 + g'_2\omega'_2 + \dots + g'_n\omega'_n = g'$$

gesetzt wird,

$$\xi^d \varphi'_i - \xi g' = a_1\omega'_1 + a_2\omega'_2 + \dots + a_n\omega'_n,$$

wo a_r nicht $= 0$ ist. Da φ'_i und g' algebraisch ganz in ξ sind, so ist $\xi^d\varphi'_i - \xi g'$ durch ξ theilbar, und es gibt somit eine durch ξ theilbare Function von der Form

$$a_1\omega'_1 + a_2\omega'_2 \dots + a_n\omega'_n,$$

in welcher $a_1, a_2, \ldots a_n$ nicht durchweg verschwindende constante Grössen sind. Die Functionen $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_n$ bilden daher ein Fundamentalsystem oder nicht, je nachdem eine durch ξ theilbare Function von vorstehender Form nicht existirt oder existirt.

Um dies zu entscheiden, suche man nach 4. alle durch ξ theilbaren Functionen von der Form

$$f' = u_\alpha \omega'_\alpha + u_\beta \omega'_\beta + \quad + u_\nu \omega'_\nu,$$

in welchen $u_\alpha, u_\beta, \ldots u_\nu$ ganze Functionen von ξ bezeichnen und die Stellenzeiger $1, 2, \ldots n$ in eine solche Reihenfolge gebracht worden sind, dass

$$e_\alpha \leqq e_\beta \leqq e_\gamma \leqq \ldots \leqq e_\nu$$

ist. Man findet

$$f' = t_1 \psi'_1 + t_2 \psi'_2 + \ldots + t_n \psi'_n,$$

wo $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von ξ und $\psi'_1, \psi'_2 \ldots \ldots \psi'_n$ bekannte ganze linear-homogene Formen von $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ bezeichnen. Man darf $\psi'_1, \psi'_2, \ldots$ in der Gestalt

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha &= c_{\alpha\alpha} \omega'_\alpha \\
\psi'_\beta &= c_{\beta\alpha} \omega'_\alpha + c_{\beta\beta} \omega'_\beta \\
&\ldots \\
\psi'_\nu &= c_{\nu\alpha} \omega'_\alpha + c_{\nu\beta} \omega'_\beta + \quad + c_{\nu\nu} \omega'_\nu
\end{aligned}$$

annehmen, da man nöthigenfalls $\psi'_1, \psi'_2, \ldots$ nach 3. durch ein anderes Functionensystem ersetzen kann, welches die gewünschte Gestalt besitzt.

Die Coëfficienten

$$c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, \ldots c_{\nu\nu}$$

können nur entweder constant, also $= 1$, oder $= \xi$ sein. Da nämlich $\xi \omega'_\varepsilon$ durch ξ theilbar ist, so hat man

$$\xi \omega'_\varepsilon = k_\alpha \psi'_\alpha + k_\beta \psi'_\beta + \ldots + k_\nu \psi'_\nu,$$

wo $k_\alpha, k_\beta, \ldots k_\nu$ ganze Functionen von ξ bezeichnen. Hierin müssen alle etwaigen Coëfficienten k_i, deren Stellenzeiger i in der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \nu$ auf ε folgen, $= 0$ sein, und es wird für jeden Stellenzeiger ε

$$\xi = k_\varepsilon c_{\varepsilon\varepsilon}.$$

Ist $c_{\varepsilon\varepsilon} = \xi$, so reducirt sich ψ'_ε auf $\xi\omega'_\varepsilon$. Dies bedarf nur eines Beweises, wenn ε nicht $= \alpha$ ist. Da $\psi_\varepsilon - c_{\varepsilon\varepsilon}\omega'_\varepsilon$ durch ξ theilbar ist, so hat man

$$\psi'_\varepsilon - c_{\varepsilon\varepsilon}\omega'_\varepsilon = l_\alpha\psi'_\alpha + l_\beta\psi'_\beta + \quad + l_\nu\psi'_\nu,$$

wo $l_\alpha, l_\beta, . \; . l_\nu$ ganze Functionen von ξ sind. Hierin müssen $l_\varepsilon, . \; . l_\nu$ verschwinden, und es ergibt sich

$$c_{\varepsilon\delta} = l_\delta c_{\delta\delta}.$$

Da aber angenommen werden darf, dass $c_{\varepsilon\delta}$ den Grad von $c_{\delta\delta}$ nicht erreicht, so muss $c_{\varepsilon\delta} = 0$ sein. Ebenso ergibt sich

$$c_{\varepsilon\gamma} = 0, . \; . c_{\varepsilon\alpha} = 0.$$

Sind nun alle Coëfficienten $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, . . . c_{\nu\nu} = \xi$, so bilden $\omega'_1, \omega'_2, . \; . \omega'_n$ nach dem Vorhergehenden ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$G(\eta) = 0$$

und $\omega_1, \omega_2, . \; . \omega_n$ ein Normalfundamentalsystem des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$.

Sind dagegen einige der Coëfficienten $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, . \; . c_{\nu\nu} = 1$, so bilden $\omega'_1, \omega'_2 \dots \omega'_n$ kein Fundamentalsystem. Wohl kann man aber in diesem Falle aus $\omega_1, \omega_2, . \; . \omega_n$ ein Normalfundamentalsystem in folgender Weise ableiten.

Man setze für jeden Stellenzeiger ε

$$\psi_\varepsilon = c_{\varepsilon\alpha}x^{e_\varepsilon - e_\alpha}\omega_\alpha + c_{\varepsilon\beta}x^{e_\varepsilon - e_\beta}\omega_\beta + \quad + \omega_\varepsilon$$

oder

$$\psi_\varepsilon = \omega_\varepsilon,$$

je nachdem $c_{\varepsilon\varepsilon} = 1$ oder $= \xi$ ist. Da die Functionen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ sich als ganze linear-homogene Formen der Functionen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ darstellen lassen, so bilden letztere ebenfalls ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{G}$. Da ferner ψ_ε für die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ in $\frac{\psi'_\varepsilon}{\xi^{e_\varepsilon}}$ oder $\frac{\omega'_\varepsilon}{\xi^{e_\varepsilon}}$ übergeht, je nachdem $c_{\varepsilon\varepsilon} = 1$ oder $= \xi$ ist, so ist der Exponent von ψ_ε im ersten Falle $< e_\varepsilon$ und im zweiten $= e_\varepsilon$. Sind daher $e'_1, e'_2, . \; . e'_n$ die Exponenten von $\psi_1, \psi_2, . \; \psi_n$, so hat man

$$e'_1 + e'_2 + \quad + e'_n < e_1 + e_2 + \quad + e_n.$$

Wendet man auf das Fundamentalsystem $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ wieder dasselbe Verfahren wie auf $\omega_1, \omega_2, \ldots$ an, so erweist sich dasselbe entweder schon als ein Normalfundamentalsystem oder aber erhält man ein neues Fundamentalsystem $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$, in welchem die Summe der Exponenten seiner Functionen

$$< e'_1 + e'_2 + \ldots + e'_n$$

ist. So kann fortgefahren werden, und es lässt sich für die Anzahl der Schritte, die man machen muss, um auf ein Normalfundamentalsystem zu stossen, eine Grenze angeben.

Setzt man für irgend ein Fundamentalsystem $f_1, f_2, \ldots f_n$ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$, über alle conjugirten Werthe von y erstreckt,

$$\Sigma f_i f_k = a_{ik}(x),$$

so bleibt die Determinante

$$\Delta(x) = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

bekanntlich bis auf einen constanten Factor dieselbe für alle Fundamentalsysteme von $\mathfrak{G}$ und wird die Discriminante des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ genannt. Da nämlich für irgend ein zweites Fundamentalsystem $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ n Gleichungen von der Form

$$\vartheta_i = g_{i1} f_1 + g_{i2} f_2 + \ldots + g_{in} f_n \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

bestehen, wo $g_{i1}, g_{i2}, \ldots$ ganze Functionen von x bezeichnen, so ist die Determinante der n^2 Elemente $\Sigma \vartheta_i \vartheta_k$ durch Δ theilbar. Da aber auch das Umgekehrte statthat, so können sich die beiden Determinanten nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Exponenten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ und gehen die Functionen $x^{\alpha_1} f_1, x^{\alpha_2} f_2, \ldots x^{\alpha_n} f_n$ für die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ in $f'_1, f'_2, \ldots f'_n$ über, so hat man, über alle conjugirten Werthe von η erstreckt,

$$\sum \frac{f'_i f'_k}{\xi^{\alpha_i + \alpha_k}} = a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

oder

$$\Sigma f_i' f_k' = \xi^{\alpha_i + \alpha_k} a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Die Determinante der n^2 Elemente $\Sigma f_i' f_k'$ ist daher $=$ $\xi^{2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} \Delta\left(\frac{1}{\xi}\right)$ und da dieselbe eine ganze Function von ξ sein muss, so ist

$$2(\alpha_1+\alpha_2+\quad+\alpha_n) \geqq \sigma,$$

wenn σ den Grad von $\Delta(x)$ bezeichnet.

Ist also τ die grösste in $\frac{\sigma}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so braucht man das oben dargelegte Verfahren höchstens $e_1+e_2+\ldots+e_n-\tau$-mal anzuwenden, um auf ein Normalfundamentalsystem zu stossen.