Einige mathematische Theoreme

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde im ersten Paragraphe der vorliegenden Mittheilung eine Eigenschaft der Systeme von Congruenzen mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul ermitteln, aus welcher sich der bekannte König-Kronecker'sche Satz über die Anzahl der unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln einer Congruenz als ganz specieller Fall ergibt, sodann im zweiten eine Integralrelation angeben, welche u. A. zu den interessanten Ausdrücken führt, die Herr E. Beltrami[1] bei verschiedenen Gelegenheiten für eine Reihe von associirten Functionen symmetrischer Massensysteme aufgestellt hat, und im dritten endlich einen neuen äusserst einfachen Beweis des von mir gefundenen Multiplicationstheorems der allgemeinen Determinanten mittheilen.

§. 1. Da nach dem Fermat'schen Satze jede zur Primzahl p theilerfremde ganze Zahl x die Congruenz

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

befriedigt, so genügt jede durch p nicht theilbare Wurzel der Congruenz

[1] »Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.« Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Serie IV, t. II. — »Sulle funzioni associate e specialmente su quella della calotta sferica.« L. c. Serie IV, t. IV. — »Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico.« Atti della reale Accademia dei Lincei. Anno 277 (1879—1880), Roma. — »Sulla funzione potenziale della circonferenza.« Rendiconti del circolo matematico di Palermo. T. III. Anno 1889.

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} a_\lambda x^\lambda \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

dem System von ρ Congruenzen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} a_{\varkappa+\lambda} x^\lambda \equiv 0 \,(\text{mod. } p) \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1;\, 1 \leqq \rho \leqq p-1) \qquad 1)$$

und umgekehrt.

Es werden demnach die von Herrn J. König aufgestellten, von Herrn G. Rados[1] zuerst bewiesenen und von Herrn L. Kronecker[2] in eine ungemein elegante Form gebrachten Bedingungen für das Vorhandensein einer bestimmten Anzahl von unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln einer Congruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul, welche ich in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften[3] in einfacher Weise hergeleitet habe und von denen ich im vierten Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik von G. v. Escherich und Em. Weyr einen neuen Beweis mittheilen werde, auch in der Theorie der Systeme von Congruenzen mit einer Unbekannten in etwas veränderter Form eine Rolle spielen. Dies wird in dem laufenden Paragraphe gezeigt und führt sodann, wie schon erwähnt, zu einer neuen äusserst einfachen Ableitung des König-Kronecker'schen Theorems.

Die $(p-1)\rho$ ganzen Zahlen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots \rho-1;\, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2),$$

von denen nicht alle zu einem bestimmten Werthe von λ gehörigen den Primtheiler p besitzen, seien so beschaffen, dass

---

1 »Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades.« Journal für die reine und angewandte Mathematik von L. Kronecker und K. Weierstrass. 99. Bd., S. 258—260.

2 »Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen.« A. e. a. O., S. 329—371.

3 »Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl Wurzeln einer Congruenz.« A. o. g. O., 95. Bd., II. Abth., S. 165—169.

es höchstens $\sigma(<\rho)$ ganzzahlige, nach dem Modul p untereinander und von Null verschiedene Werthe $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\sigma-1}$ von z gibt, für welche sämmtliche ρ Summen

$$\mu_\lambda(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

zur Primzahl p theilerfremd sind. Dass es in jedem der ρ Systeme von $p-1$ ganzen Zahlen

$$\mu_\lambda(z) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1; z = 1, 2, \ldots, p-1)$$

mindestens eine zu p theilerfremde gibt, ist selbstverständlich, weil eine Congruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul, deren Coëfficienten ein zu diesem theilerfremdes Zahlensystem bilden, nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihre Gradzahl beträgt.

Man bestimme nun ρ ganze Zahlen $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\rho-1}$, die nicht insgesammt den Factor p besitzen, so dass die Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} \nu_\lambda \mu_\lambda(\zeta_\tau)$$

für $\tau = 0, 1, 2, \ldots, \sigma-1$ nach dem Modul p der Null congruent wird, was stets möglich ist, weil die Anzahl der Grössen ν_λ grösser ist als die Anzahl der zu erfüllenden linearen homogenen Congruenzen. Alsdann wird

$$\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\varkappa=p-2,\lambda=\rho-1} \nu_\lambda z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \equiv 0 \pmod{p}$$

für jeden ganzzahligen Werth von z, und dies ist nur möglich, wenn die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von z Vielfache von p sind, d. h. wenn die $p-1$ Congruenzen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} z_\varkappa^{(\lambda)} \nu_\lambda \equiv 0 \pmod{p} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2) \qquad 2)$$

bestehen, was, da nicht alle Zahlen ν_λ der Null congruent sind, zur Folge hat, dass alle aus der Matrix

$$\left\| z_\varkappa^{(\lambda)} \right\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung ρ den Factor p enthalten. Man hat daher den Satz:

Haben die ρ Congruenzen

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

mindestens $p-\rho$ unter einander und von Null verschiedene Wurzeln gemein, so sind alle aus der Matrix

$$\left\| z_\varkappa^{(\lambda)} \right\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten ρ^{ter} Ordnung durch die Primzahl p theilbar; besteht diese Theilbarkeitseigenschaft aber nicht, so ist die Anzahl der unter einander und von Null verschiedenen gemeinsamen Wurzeln derselben kleiner als $p-\rho$.

Da aus dem Bestehen der Congruenzen 2) umgekehrt folgt, dass

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} \nu_\lambda \mu_\lambda(z)$$

für jeden ganzzahligen Werth von z durch p theilbar ist, so wird die eben ermittelte Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend für die Existenz von mindestens $p-\rho$ derartigen gemeinsamen Wurzeln der angeführten Congruenzen sein, falls diese Theilbarkeit nur dann stattfinden kann, wenn es höchstens $\rho-1$ verschiedene Werthe von z gibt, für welche sämmtliche Functionen $\mu_\lambda(z)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$ zu p theilerfremd sind. Bestände diese Theilerfremdheit mindestens für ρ Werthe von z $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\rho-1}$, so würde das System von ρ linearen homogenen Congruenzen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} \mu_\lambda(\zeta_\tau) x_\lambda \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

durch das Werthsystem

$$x_\lambda \equiv \nu_\lambda \pmod{p} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

befriedigt, dessen Elemente nicht sämmtlich durch p theilbar sind, und dies könnte nur dann der Fall sein, wenn die Determinante

$$|\mu_\lambda(\zeta_\tau)|_{(\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)}$$

den Factor p enthielte.

Sind nun die ganzen Zahlen $z_\varkappa^{(\lambda)}$ durch die Congruenzen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \equiv \sum_{\mu, \nu} a_\mu \zeta_\nu^{(\lambda)} \pmod{p} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

definirt, in denen die Summation bezüglich μ und ν über alle nicht negativen, $p-2$, beziehungsweise $\rho-1$ nicht überschreitenden ganzen Zahlen auszudehnen ist, für welche

$$\mu - \nu \equiv \varkappa \pmod{p-1}$$

ist, so wird

$$|\mu_\lambda(\zeta_\tau)| = |\zeta_\tau^{-\lambda}|\,|\zeta_\tau^{(\lambda)}| \prod_\tau \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} a_\varkappa \zeta_\tau^{p-2-\varkappa} \qquad (\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

und ist demnach unter der eben gemachten Voraussetzung zu p theilerfremd, wenn die Determinante

$$|\zeta_\tau^{(\lambda)}|_{(\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)}$$

mit dieser arithmetischen Eigenschaft begabt ist. Man hat daher das Theorem:

Sind die ρ^2 $(\rho \leqq p-1)$ ganzen Zahlen

$$\zeta_\tau^{(\lambda)} \qquad (\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

so beschaffen, dass ihre Determinante zur Primzahl p theilerfremd ist, und werden die $(p-1)\rho$ ganzen Zahlen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1;\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$$

durch die Congruenzen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \equiv \sum_{\mu,\nu} a_\mu \zeta_\nu^{(\lambda)} \quad (\text{mod. } p)$$

definirt, in denen die Summation bezüglich μ und ν über alle nicht negativen, $p-2$, beziehungsweise $\rho-1$ nicht überschreitenden ganzen Zahlen zu erstrecken ist, für welche

$$\mu - \nu \equiv \varkappa \quad (\text{mod. } p-1)$$

ist, die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_{p-2}$ ganze Zahlen sind, welche nicht sämmtlich den Primtheiler p besitzen, und endlich die auftretenden Zahlen so gewählt sind, dass für jeden Werth von λ mindestens ein $z_\varkappa^{(\lambda)}$ zu p theilerfremd ist, so ist für die Existenz von mindestens $p-\rho$ unter einander und von Null verschiedener Wurzeln des Systems von ρ Congruenzen

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

nothwendig und hinreichend, dass alle aus der Matrix

$$\left\| z_\varkappa^{(\lambda)} \right\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung ρ den Primfactor p besitzen.

Ist speciell

$$\zeta_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\lambda,\nu} \qquad (\delta_{\lambda,\nu} = 0,\ \lambda \gtrless \nu;\ \delta_{\lambda,\lambda} = 1),$$

so wird

$$\left| \zeta_\tau^{(\lambda)} \right|_{(\lambda,\tau=0,1,2,\ldots,\rho-1)} = 1$$

$$z_\varkappa^{(\lambda)} = a_{\varkappa+\lambda}$$

und demnach geht in diesem Falle das in dem eben ausgesprochenen Satze erwähnte Congruenzensystem in das System 1) über. Nach dem letzten Satze hat also die Congruenz

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} a_\lambda x^\lambda \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

einerseits mindestens $p-\rho$ unter einander und von Null verschiedene Wurzeln, wenn alle aus der Matrix

$$\|a_{\varkappa+\lambda}\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten ρ^{ter} Ordnung durch p theilbar sind, und kann anderseits nicht $p-\rho+1$ solche besitzen, wenn diese Eigenschaft nicht allen aus der Matrix

$$\|a_{\varkappa+\lambda}\|_{(\lambda=0\ 1,2,\ldots,\rho-2;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung $\rho-1$ zukommt.

Man hat daher unter Benützung des von L. Kronecker eingeführten Begriffes des Ranges eines Zahlensystems in Bezug auf einen Primzahlmodul folgendes elegante Theorem:

Die Summe aus der Anzahl der unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln einer Congruenz mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul und dem Range ihres Coëfficientensystems ist um 1 kleiner als der Modul.

Dies ist im Wesentlichen der oben erwähnte König-Kronecker'sche Satz.

§. 2. Im Jahrgange 1893 der Schriften des medicinisch-naturwissenschaftlichen Vereines in Innsbruck werde ich eine Integralrelation mittheilen, aus welcher nicht nur der grösste Theil der bisher bekannten Darstellungen der sogenannten symmetrischen Potentialfunctionen durch Integrale von Ausdrücken, welche Bessel'sche Functionen enthalten, sondern auch verschiedenartige Verallgemeinerungen derselben und von Sätzen, welche aus diesen entspringen, namentlich für den Fall sich ergeben, dass das Wirkungsgesetz nicht das Newton'sche, sondern dass die Wirkung der Kräfte irgend einer Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist. Diese Potentialfunctionen beziehen sich, wie schon aus der Benennung ersichtlich ist, auf Systeme von Massen, die symmetrisch um eine Axe gelagert sind, und genügen demnach im ganzen äusseren Raume der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0 \qquad (u^2=x^2+y^2),$$

welche bekanntlich durch die zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial W}{\partial u} = u\,\frac{\partial V}{\partial z}; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -u\,\frac{\partial V}{\partial u}$$

ersetzt werden kann. Aus diesen ergibt sich für die durch sie nach E. Beltrami's Nomenclatur zur Potentialfunction V associirte Function W die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial W}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0.$$

Setzt man W gleich einer Constanten, so hat man, wie längst bekannt, die Gleichung der äusseren Kraftlinien für die Meridianebenen des Systems. Für eine Reihe von associirten Functionen hat nun Herr E. Beltrami in den im Anfange citirten Abhandlungen Ausdrücke angegeben, welche ganz analog gebaut sind wie die eben erwähnten Integrale für die zugehörigen Potentialfunctionen. Auch für diese lässt sich auf Grund von zwei früher von mir in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften bewiesenen Formeln eine Integralrelation aufstellen, aus welcher sie und zahlreiche andere allgemeinere durch Specialisirung abgeleitet werden können; dieselbe wird durch folgendes Theorem gegeben:

Sind die Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ so beschaffen, dass die Integrale

$$F_1(x) = \int_{r_1}^{r_2} e^{-rxi}\,\varphi(r)\,dr$$

$$F_2(x) = \left\{\tau J^{n+\mu-1}(\tau x) - \frac{2(n+\mu)\,J^{n+\mu}(\tau x)}{x}\right\}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r^{\alpha-\mu}\,J^{n+\mu}(rx)\,dr +$$
$$+ J^{n+\mu}(\tau x)\int_{\rho_1}^{\rho_2} r^{\alpha-\mu+1}\,J^{n+\mu-1}(rx)\,dr$$

einen Sinn haben, so besteht die Beziehung

$$\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^{\alpha}\psi(\rho)\varphi(r)(z+ri)\,C_n^{\mu}(\cos\varphi)\,\sin^{2\mu}\varphi\,d\varphi\,dr\,d\rho}{\{\rho^2+\tau^2-2\rho\tau\cos\varphi+(z+ri)^2\}^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= \frac{\pi\Pi(n+2\mu-1)}{\Pi(n)\Pi(2\mu-1)\tau^{\mu}}\left\{\delta_{0,\,n+\mu}F_1(0)\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^{\alpha}\psi(\rho)\,d\rho - \right.$$

$$\left. -\int_0^{\infty} e^{-zx}F_1(x)F_2(x)\,dx\right\} \qquad (z \text{ reell und} \geqq 0).$$

Es mögen nun zum Beweise dieser Behauptung einige specielle Fälle der aufgestellten allgemeinen Relation angegeben werden.

Setzt man in derselben speciell

$$n=0;\ -r_1=r_2=1;\ \varphi(r)=(1-r^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sqrt{1-r^2})$$

$$\left(\nu \geqq \frac{1}{2}\right),$$

differentiirt sodann nach ρ_2, ersetzt z durch $\frac{z}{\gamma}$ und schreibt schliesslich für $\gamma\rho_2$ und $\gamma\tau\,\rho_2$ beziehungsweise τ, so erhält man, da in diesem Falle

$$F_1(x)=\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{x^2+\sigma^2}}\right)^{\nu} J^{\nu}(\sqrt{x^2+\sigma^2})$$

wird, die Relation

$$\int_0^{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-r^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sqrt{1-r^2})(z+\gamma ri)\sin^{2\mu}\varphi\,d\varphi\,dr}{(\rho_2^2+\tau^2-2\rho_2\tau\cos\varphi+(z+\gamma ri)^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi^3}{\sigma}}\,\frac{1}{\tau^{\mu}}\left\{\delta_{0,\,\mu}J^{\nu}(\sigma)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma^{\nu}}{\rho_2^{\mu}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-zx}J^{\mu-1}(\rho_2 x)J^{\mu}(\tau x)J^{\nu}(\sqrt{\sigma^2+(\gamma x)^2})\,dx}{\{(\gamma x)^2+\sigma^2\}^{\frac{\nu}{2}}}\right\}$$

$$(z \text{ reell und} \geqq 0),$$

aus welcher sich für $\tau=0$ die zwei folgenden

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-r^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sqrt{1-r^2})(z+\gamma ri)\,dr}{(\rho_2^2+(z+\gamma ri)^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}}=$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\,\frac{2^{2\mu}[\Pi(\mu)]^2}{\Pi(2\mu)}\Bigg\{\delta_{0,\mu}J^{\nu}(\sigma) -$$

$$- \frac{\sigma^{\nu}}{2^{\mu}\Pi(\mu)\rho^{\mu}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-zx}x^{\mu}J^{\mu-1}(\rho_2 x)J^{\nu}\left(\sqrt{\sigma^2+(\gamma x)^2}\right)dx}{\{(\gamma x)^2+\sigma^2\}^{\frac{\nu}{2}}}\Bigg\}$$

(z reell und $\geqq 0$)

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi^{\frac{2\nu+1}{2}}J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sin\varphi)(z+\gamma i\cos\varphi)\,d\varphi}{(\rho_2^2+(z+\gamma i\cos\varphi)^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\,\frac{2^{2\mu}[\Pi(\mu)]^2}{\Pi(2\mu)}\Bigg\{\delta_{0,\mu}J^{\nu}(\sigma) -$$

$$- \frac{\sigma^{\nu}}{2^{\mu}\Pi(\mu)\rho^{\mu}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-zx}x^{\mu}J^{\mu-1}(\rho_2 x)J^{\nu}\left(\sqrt{\sigma^2+(\gamma x)^2}\right)dx}{\{(\gamma x)^2+\sigma^2\}^{\frac{\nu}{2}}}\Bigg\}$$

(z reell und $\geqq 0$)

ergeben.

Berücksichtigt man, dass bekanntlich, falls

$$V = \int_{c_0}^{c_1}\frac{f(c)\,dc}{r}$$

ist, wo r den Abstand des potenzirten Punktes vom potenzirenden vorstellt, die associirte Function W durch das Integral

$$\int_{c_0}^{c_1}\frac{f(c)(z-c)\,dc}{r}$$

gegeben wird, so ergibt sich aus der ersten von diesen Formeln für $z^2 > \varkappa^2$ ($\mu = 0$, $\gamma = \varkappa i$)

$$\frac{2\pi\rho_2 z}{|z|}\int_0^{\infty}\frac{e^{-|z|x}J^0(\rho_2 x)J^1(\tau x)J^{\nu}\left(\sqrt{\sigma^2-(\varkappa x)^2}\right)dx}{(\sigma^2-(\varkappa x)^2)^{\frac{\nu}{2}}} \qquad \text{I)}$$

als die associirte Function für die Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders, dessen Axe die z-Axe ist und welche von zwei in den Ebenen $z = +\varkappa$ und $z = -\varkappa$ gelegenen Kreisen vom Radius ρ_2 geschlossen wird, wenn dieselbe so mit Masse belegt ist, dass die Dichte in dem Kreise $z = \zeta$ den Werth

$$f(\zeta) = \frac{(\varkappa^2 - \zeta^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(\frac{\sigma}{\varkappa}\sqrt{\varkappa^2-\zeta^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^{\frac{2\nu-1}{4}}\,\varkappa^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

hat und τ, beziehungsweise z der Abstand der Projection des potenzirten Punktes auf die xy-Ebene vom Ursprunge, beziehungsweise dessen z-Coordinate ist; man erkennt ferner, dass die zweite von ihnen ($\mu = 0$; $\gamma = \varkappa i$) einerseits zeigt, dass die associirte Function einer auf der z-Axe von $z = -\varkappa$ bis $z = +\varkappa$ mit der linearen Dichtigkeit $f(\zeta)$ vertheilten Masse den Werth

$$\frac{z}{|z|}\int_0^\infty \frac{e^{-|z|x} J^1(\tau x)\, J^\nu\left(\sqrt{\sigma^2-(\varkappa x)^2}\right) dx}{(\sigma^2-(\varkappa x)^2)^{\frac{\nu}{2}}} \qquad \text{II)}$$

besitzt, anderseits ($\mu = 0$; $\gamma\sigma$ für σ), dass dieselbe für eine concentrisch geschichtete Kreisscheibe vom Radius ρ und der Dichte

$$\frac{(\rho_2^2-\rho_2)^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}\left(\sigma\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}\right)}{2\pi\,\sigma^{\nu-1}\rho_2^\nu}$$

in der Entfernung ρ vom Mittelpunkte durch das Integral

$$\frac{z}{(\rho_2\sigma)^\nu\sqrt{2\pi}\,|z|}\int_0^\infty \frac{e^{-|z|x} J^1(\rho_2 x)\, J^\nu\left(\tau\sqrt{\sigma^2+x^2}\right) dx}{(\sigma^2+x^2)^{\frac{\nu}{2}}} \qquad \text{III)}$$

ausgedrückt wird.

Von den speciellen Fällen der drei letzten Integrale mögen die folgenden vier besonders hervorgehoben werden:

$$\left(\text{I};\ \sigma = 0, \nu = \frac{1}{2}\right) \quad \frac{4\pi\rho_2 z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\rho_2 x)\, J^1(\tau x) \sin\text{hyp}\,(\varkappa x)\frac{dx}{x}$$

$$(\tau^2 = x_1^2 + y_1^2)$$

$$\left(\text{II};\ \sigma = 0, \nu = \frac{1}{2}\right) \quad \frac{2z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\tau x) \sin\text{hyp}\,(\varkappa x)\frac{dx}{x}$$

$$(\text{III};\ \sigma = 0, \nu = 1) \quad \frac{2\pi\tau\rho_2 z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^1(\tau x)\, J^1(\rho_2 x)\frac{dx}{x}$$

$$\left(\text{III};\ \sigma = 0, \nu = \frac{1}{2}\right) \quad \frac{2\pi\tau V(0)\, z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^1(\tau x) \sin(\rho_2 x)\frac{dx}{x}.$$

welche der Reihe nach die Beltrami'schen Ausdrücke für die associirte Function der Mantelfläche eines homogenen geraden Kreiscylinders von der Flächendichtigkeit 1, dessen Axe die z-Axe ist und welcher von zwei in den Ebenen $z = +\varkappa$ und $z = -\varkappa$ gelegenen Kreisen vom Radius ρ_2 geschlossen wird, die associirte Function einer homogenen geraden Linie von der linearen Dichtigkeit 1 und der Länge $2\varkappa$, einer in der xy-Ebene gelegenen Kreisscheibe vom Radius ρ_2 und der Flächendichtigkeit 1, endlich für die auf einer in der xy-Ebene gelegenen Kreisscheibe mit dem Radius ρ_2 vertheilte Elektricität, welche sich ohne äussere Einflüsse im Gleichgewichte befindet, vorstellt.

Die dritte unter den obigen allgemeinen Formeln ergibt unmittelbar ($\mu = 0$, $\nu = 0$, $\sigma = 0$) den bekannten Beltrami'schen Ausdruck für die associirte Function einer homogenen Kreisperipherie vom Radius ρ und der Masse 1

$$\frac{2\pi\rho_2 z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\rho_2 x)\, J^1(\tau x)\, dx$$

für deren Potentialfunction sich, wie hier hervorgehoben werden mag, auch der folgende Werth

$$\frac{2\rho_2\pi^{3/2}}{(\rho_2^2+\tau^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} F\left((^1/_4, {}^3/_4, 1, \frac{4\rho_2^2\tau^2}{(\rho_2^2+\tau^2+z^2)^2}\right)$$

aufstellen lässt.

§. 3. Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range r

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)}$$

der n^r Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)$ ist bekanntlich durch die Gleichung

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)}; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots, i_1^{(r-1)}, i_2^{(r-1)}, \ldots, i_n^{(r-1)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)}; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots, i_1^{(r-1)}, i_2^{(r-1)}, \ldots, i_n^{(r-1)} = n}$$

$$\prod_{\mu=1}^{r-1} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)})\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r-1)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r-1)}} \cdot$$

$$\cdot\, a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r-1)}} \qquad \text{I)}$$

definirt, in welcher $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n)$ diejenige quadratische Determinante n^{ter} Ordnung vorstellt, welche entsteht, wenn in der Determinante n^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & & 0 \\ 0, & 1, & 0, & & 0 \\ & & & & \\ 0, & 0, & 0, & & 1 \end{vmatrix}$$

an die Stelle der λ^{ten} Horizontalreihe die $\varkappa_\lambda{}^{\text{te}}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird. Für diese Gebilde habe ich schon im Jahre 1881[1] ein dem für gewöhnliche Determinanten geltenden analoges Multiplicationstheorem aufgestellt, welches in diesem Paragraphe in äusserst einfacher Weise neuerdings begründet werden soll.

Der mitzutheilende Beweis stützt sich auf folgende fünf aus der Definitionsgleichung der allgemeinen Determinanten unmittelbar hervorgehende bekannte Sätze:

1. Eine Determinante geraden Ranges ändert (bloss) das Zeichen, wenn man in allen Gliedern zwei derselben Indexreihe angehörige Stellenzeiger mit einander vertauscht, eine solche von ungeradem Range aber nur dann, wenn eine solche Vertauschung in einer veränderlichen Indexreihe vorgenommen wird.

2. (Corollar von 1.) Eine Determinante geraden Ranges ist gleich Null, wenn für zwei derselben Indexreihe angehörige Stellenzeiger alle entsprechenden Elemente gleich sind, für eine Determinante von ungeradem Range gilt dies nur in Bezug auf die veränderlichen Indexreihen.

3. Eine Determinante wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man alle Elemente, welche an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle einen bestimmten Index besitzen, mit derselben multiplicirt.

4. Sind alle Elemente einer Determinante, welche an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle einen bestimmten Index haben, Summen von s Gliedern, so ist dieselbe gleich der Summe von s Determinanten desselben Ranges und derselben Ordnung,

[1] »Über Determinanten höheren Ranges.« Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, 43. Bd.

welche man aus der ursprünglichen dadurch ableitet, dass man an Stelle der zusammengesetzten Elemente je einen der noch nicht verwendeten Summanden setzt, alle anderen aber ungeändert lässt.

5. (Für $r > 2$.) Eine Determinante r^{ten} Ranges kann als Aggregat von $(n!)^t$ Determinanten vom Range $r-t$ in der durch die Gleichung

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)} = \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_1^{(n)};\, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\, i_1^{(t)}, i_2^{(t)}, \ldots, i_n^{(t)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\, i_1^{(t)}, i_2^{(t)}, \ldots, i_n^{(t)} = n}$$

$$\prod_{\mu=1}^{t} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}) \, |a_{\varkappa, i_\varkappa^{(1)}, i_\varkappa^{(2)}, \ldots, i_\varkappa^{(t)};\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-t-1}}|_{(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-t-1} = 1, 2, \ldots, n)}$$

angegebenen Weise dargestellt werden.

Multiplicirt man die Gleichung I) mit

$$|b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|_{(j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)}$$

und beachtet, dass nach den Sätzen 1) und 2)

$$(i_1^{(r-1)}, i_2^{(r-1)}, \ldots, i_n^{(r-1)}) \, |b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|_{(j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)} = |b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s}|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s = 1, 2, n;}$$

ist, falls bei ungeradem s die τ^{te} Indexreihe eine veränderliche ist, so erhält man die Relation

$$|a_{i_1, i_2, \dots, i_r}|\,|b_{j_1, j_2, \dots, j_s}|_{(i_1, i_2, \dots, i_r;\, j_1, j_2, \dots j_s = 1, 2, \dots, n)} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n;\; i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_n^{(1)};\; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_n^{(2)};\, \dots;\; i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \dots, i_n^{(r-2)} = 1}^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n;\; i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_n^{(1)};\; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_n^{(2)};\, \dots;\; i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \dots, i_n^{(r-2)} = n}$$

$$\prod_{\mu=1}^{r-2} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \dots, i_n^{(\mu)})\, |b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_s}|\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots, i_1^{(r-1)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_2^{(r-1)}} \cdots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(r-1)}}$$

$$(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \dots, \varkappa_s = 1, 2, \dots, n;\; \varkappa_\tau = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Nach 3) und 4) ist aber

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 1}^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = n} |b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_s}|\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots, i_1^{(r-1)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_2^{(r-1)}} \cdots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(r-1)}} =$$

$$= \left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\varkappa, i_\varkappa^{(1)}, i_\varkappa^{(2)}, \dots, i_\varkappa^{(r-2)}, \lambda}\, b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{\tau-1}, \lambda, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \dots, \varkappa_s} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \dots, \varkappa_s, \varkappa = 1, 2, \dots, n;\; \varkappa_\tau = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)}$$

und daher

$$|a_{i_1, i_2, \dots, i_r}|\,|b_{j_1, j_2, \dots, j_s}|_{(i_1, i_2, \dots, i_r;\, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n)} = \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_n^{(1)};\; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_n^{(2)};\, \dots;\; i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \dots, i_n^{(r-2)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_n^{(1)};\; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_n^{(2)};\, \dots;\; i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \dots, i_n^{(r-2)} = n}$$

$$\prod_{\mu=1}^{r-2}\left(i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}\right)\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\varkappa,\, i_\varkappa^{(1)},\, i_\varkappa^{(2)}, \ldots,\, i_\varkappa^{(r-2)},\, \lambda}\, b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \lambda, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s}\right|_{(\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s = 1, 2, \ldots, n)}$$

Diese Gleichung geht aber nach 5) sofort in die Relation

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}\,\Big|\,\Big|\,b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}\Big|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r;\; j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)} = \left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-1}, \lambda}\, b_{\varkappa_r, \varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_{r+\tau-1}, \varkappa_{r+\tau}, \ldots, \varkappa_{r+s-2}}\right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)}$$

über, durch welche das oben erwähnte Multiplicationstheorem der allgemeinen Determinanten ausgesprochen wird. Es dürfte kaum möglich sein, diesen Satz auf einem gedanklich einfacheren Wege zu beweisen.