Über den Hauptpunkt einer beliebigen Axe eines materiellen Punktsystems[1]

Dr. **Jos. Finger.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Februar 1893.)

Sind $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten des Punktes O der Axe a in Bezug auf jenes Axensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S ist und dessen Axen $\xi\eta\zeta$ zu den Axen xyz parallel sind, so ist in den Gleichungen (33) zu setzen

$$x_s = -\xi, \quad y_s = -\eta, \quad z_s = -\zeta, \quad r_s^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

ferner

$$r_s \cos\varphi_s = -(\alpha_\xi \xi + \alpha_\eta \eta + \alpha_\zeta \zeta) = -u,$$

wo u den algebraischen Werth der Entfernung $\overline{NO}$ des Punktes O von der orthogonalen Projection N des Schwerpunktes S auf die Axe a bedeutet, und zwar ist u positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen, je nachdem $\overline{NO}$ mit der Richtung $(\alpha_\xi \alpha_\eta \alpha_\zeta)$ der Axe a gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist. Die Gleichungen (33) nehmen demgemäss die Form an

$$\left.\begin{aligned}
M_a^{(O)}.\mu_\xi &= \mathrm{M}_\xi + M[\alpha_\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \xi(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta)] = \\
&= \mathrm{M}_\xi + M[\alpha_\xi r_s^2 - \xi u] \\
M_a^{(O)}.\mu_\eta &= \mathrm{M}_\eta + M[\alpha_\eta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \eta(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta)] = \\
&= \mathrm{M}_\eta + M[\alpha_\eta r_s^2 - \eta u] \\
M_a^{(O)}.\mu_\zeta &= \mathrm{M}_\zeta + M[\alpha_\zeta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \zeta(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta)] = \\
&= \mathrm{M}_\zeta + M[\alpha_\zeta r_s^2 - \zeta u]
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

---

[1] Fortsetzung der Abhandlung: »Über jenes Massenmoment eines materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente und dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Axe resultirt«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a.

Sind nun $\xi_n \eta_n \zeta_n$ die Coordinaten des Punktes N und ist durch n die Entfernung des Schwerpunktes S von der Axe a bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_n + u \, . \, \alpha_\xi \\ \eta &= \eta_n + u \, . \, \alpha_\eta \\ \zeta &= \zeta_n + u \, . \, \alpha_\zeta \\ r_s^2 &= n^2 + u^2 \\ n^2 &= \xi_n^2 + \eta_n^2 + \zeta_n^2 \\ \alpha_\xi \xi_n + \alpha_\eta \eta_n &+ \alpha_\zeta \zeta_n = 0 \end{aligned}\right\} .$$

Substituirt man diese Werthe in (48), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} M_a^{(O)} . \mu_\xi &= \mathrm{M}_\xi + M[\alpha_\xi n^2 - u \, . \, \xi_n] \\ M_a^{(O)} . \mu_\eta &= \mathrm{M}_\eta + M[\alpha_\eta n^2 - u \, . \, \eta_n] \\ M_a^{(O)} . \mu_\zeta &= \mathrm{M}_\zeta + M[\alpha_\zeta n^2 - u \, . \, \zeta_n] \end{aligned}\right\} . \qquad (49)$$

Ist die Axe a in Plücker'schen Coordinaten gegeben, so hat man nur, wenn $p_\xi p_\eta p_\zeta$ die Werthe

$$\begin{aligned} p_\xi &= \eta \alpha_\zeta - \zeta \alpha_\eta = \eta_n \alpha_\zeta - \zeta_n \alpha_\eta \\ p_\eta &= \zeta \alpha_\xi - \xi \alpha_\zeta = \zeta_n \alpha_\xi - \xi_n \alpha_\zeta \\ p_\zeta &= \xi \alpha_\eta - \eta \alpha_\xi = \xi_n \alpha_\eta - \eta_n \alpha_\xi \end{aligned}$$

bezeichnen, in die Gleichungen (49) die Werthe

$$\xi_n = \alpha_\eta p_\zeta - \alpha_\zeta p_\eta, \quad \eta_n = \alpha_\zeta p_\xi - \alpha_\xi p_\zeta, \quad \zeta_n = \alpha_\xi p_\eta - \alpha_\eta p_\xi$$

und $n^2 = p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2$ einzusetzen.

Ist die Axe a eine Schwerpunktsaxe, so ist $\xi_n = \eta_n = \zeta_n = n = 0$, daher sind den Gleichungen (49) zufolge für alle Werthe des u, also, wie dies schon früher hervorgehoben wurde, für alle Punkte O derselben Schweraxe die Massenmomente $M_a^{(O)}$ geometrisch gleich.

Enthält aber die Axe a nicht den Schwerpunkt, so ändert sich die Grösse und die Richtung des Massenmomentes $M_a^{(O}$ mit der Lage des Punktes O in dieser Axe, und zwar ergibt sich, wenn M_s das Massenmoment $\mathrm{M}_s = \sqrt{\mathrm{M}_\xi^2 + \mathrm{M}_\eta^2 + \mathrm{M}_\zeta^2}$ für die parallele Schwerpunktsaxe s und J_s das Trägheitsmoment $J_s = \mathrm{M}_\xi \alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta \alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta \alpha_\zeta$ für dieselbe Axe s bedeuten, für die Grösse dieses Massenmomentes $M_a^{(O)}$ aus (49) der Werth

$$[M_a^{(O)}]^2 = \mathrm{M}_s^2 + 2M[J_s u^2 - u(\mathrm{M}_\xi \xi_n + \mathrm{M}_\eta \eta_n + \mathrm{M}_\zeta \zeta_n)] + \\ + M^2 n^2 (n^2 + u^2).$$

Diese Gleichung lehrt, dass es in jeder Axe a, die nicht eine Schweraxe ist, einen Punkt O_0 gibt, für welchen das Massenmoment $M_a^{(O)}$ ein Minimum ist, also kleiner ist, als das irgend einem anderen Punkte O dieser Axe entsprechende, auf dieselbe Axe bezogene Massenmoment — und dieser Punkt O_0 sei in dieser Abhandlung stets als der Hauptpunkt dieser Axe a bezeichnet. Der Abstand u_0 dieses Punktes O_0 von der Projection N des Schwerpunktes S auf die Axe a ist der letzten Gleichung gemäss bestimmt durch

$$\overline{NO_0} = u_0 = \frac{\mathrm{M}_\xi \xi_n + \mathrm{M}_\eta \eta_n + \mathrm{M}_\zeta \zeta_n}{Mn^2}. \tag{50}$$

Da das auf dieselbe Axe a bezogene Trägheitsmoment J_a für alle Punkte derselben Axe dasselbe ist und da das Massenmoment $M_a^{(O)}$ die geometrische Summe aus dem mit der Axe a gleichgerichteten Trägheitsmomente J_a und dem zu dieser Axe senkrechten Deviationsmomente $D_a^{(O)}$ ist, so ist auch das dem Hauptpunkte O_0 entsprechende, auf die Axe a bezogene Deviationsmoment ein Minimum, nämlich kleiner, als das jedem anderen Punkte O der Axe a entsprechende Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ für dieselbe Axe.

Wählt man, um zu einfacheren Gleichungen zu gelangen, die mit der Axe a gleichgerichtete Schweraxe s zur ζ-Axe, ferner die durch die Axe a gelegte Schwerebene zur $\zeta\xi$-Ebene und die positive Richtung der η-Axe etwa derart, dass sie mit der Richtung des auf die Axe ζ bezogenen Deviationsmomentes $D_\zeta = D_s$ einen spitzen Winkel einschliesst, so ist in den früheren Gleichungen $\alpha_\xi = \alpha_\eta = \eta = \eta_n = \zeta_n = 0$, $\alpha_\zeta = 1$, $\xi = \xi_n$, $u = \zeta$ und $u_0 = \zeta_0$ zu setzen. Die Gleichungen (49) erhalten dann die zweckmässigere Form

$$\left.\begin{aligned} M_a^{(O)} . \mu_\xi &= \mathrm{M}_\xi - M\zeta\xi \\ M_a^{(O)} . \mu_\eta &= \mathrm{M}_\eta \\ M_a^{(O)} . \mu_\zeta &= \mathrm{M}_\zeta + M\xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

und die für unsere Zwecke wichtige Projection $\overline{NO_0} = u_0 = \zeta_0$ der vom Schwerpunkte S nach dem Hauptpunkte O_0 gezogenen

Strecke auf die Axe a ist dann nach (50) ihrem algebraischen Werthe nach bestimmt durch

$$\zeta_0 = \frac{\mathrm{M}_\xi}{M\xi}. \tag{52}$$

Die zur Axe a parallele Componente M_ζ des auf die Schweraxe ζ bezogenen Massenmomentes M_s stellt nunmehr das Trägheitsmoment $J_\zeta = J_s$ bezüglich der Axe ζ und $M_a^{(O)}.\mu_\zeta$ das Trägheitsmoment J_a in Bezug auf die Axe a dar, während M_ξ und M_η die Componenten des auf die Axe ζ bezogenen Deviationsmomentes $D_s = D_\zeta$ bedeuten, und zwar ist — entsprechend der früheren Annahme der positiven Richtung der Axe η — die Componente M_η positiv; ferner sind $M_a^{(O)}\mu_\xi$ und $M_a^{(O)}\mu_\eta$ die Componenten des dem Punkte O entsprechenden, auf die Axe a bezogenen Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$. Es ist sonach auch zufolge der Bedeutung von $\mathrm{M}_\xi \mathrm{M}_\eta \mathrm{M}_\zeta$ bei Anwendung der in (29) und (32) gebrauchten Bezeichnungen $\mathrm{M}_\xi = \alpha_{31}$, $\mathrm{M}_\eta = \alpha_{32}$ und $\mathrm{M}_\zeta = \alpha_{33} = J_\zeta$.

Die geometrische Bedeutung der Componenten M_ξ und M_η des Deviationsmomentes D_ζ ergibt sich in einfacher Weise etwa mit Zuhilfenahme des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt S ist. Ist nämlich ρ_a der in die Richtung der ζ-Axe fallende, mit der Axe a gleichgerichtete Radius dieses Ellipsoids, ferner ξ_a die Abscisse jenes Punktes, in welchem die Axe ξ die dem Endpunkte des Radius ρ_a zugehörige Berührungsebene an dieses Ellipsoid schneidet und ebenso η_a die Ordinate des Durchschnittspunktes der Axe η mit dieser Berührungsebene, so ist $\mathrm{M}_\xi = \frac{M}{\rho_a . \xi_a}$ und $\mathrm{M}_\eta = \frac{M}{\rho_a . \eta_a}$ oder wenn $f_{\zeta\xi} = \frac{1}{2}\rho_a \xi_a$, beziehungsweise $f_{\zeta\eta} = \frac{1}{2}\rho_a \eta_a$ den Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks bedeutet, dessen Katheten ρ_a und ξ_a, beziehungsweise ρ_a und η_a sind und dessen Qualitätszeichen mit ξ_a, beziehungsweise mit η_a übereinstimmt, so ist $\mathrm{M}_\xi = \frac{M}{2 f_{\zeta\xi}}$ und $\mathrm{M}_\eta = \frac{M}{2 f_{\zeta\eta}}$.

In gleicher Weise lässt sich mit Hilfe des Trägheitsellipsoids (11) die geometrische Bedeutung der beiden Componenten $M_a^{(O)}.\mu_\xi$ und $M_a^{(O)}.\mu_\eta$ des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ bestimmen.

Die Lage des Hauptpunktes O_0 der Axe a ist bestimmbar mit Hilfe der Gleichung (52), welcher zufolge die Entfernung ζ_0 desselben von dem Fusspunkte des vom Schwerpunkte S auf die Axe a gefällten Lothes gleich ist der parallel zur Axe ξ genommenen Componente des auf die Basis ξ, d. i. auf die Entfernung des Schwerpunktes S von der Axe reducirten Radius des auf die parallele Schwerpunktsaxe ζ bezogenen Deviationsmomentes D_ζ. Dieser Quotient $\frac{\mathrm{M}_\xi}{M\xi}$ hat eine sofort in die Augen springende Analogie mit dem Quotienten $\frac{\mathrm{M}_\zeta}{M\xi} = \frac{J_\zeta}{M\xi}$, der bekanntlich in vielen Untersuchungen der Mechanik, z. B. bei der Bestimmung der reducirten Pendellänge, der Ordinate des Druckmittelpunktes in der Hydrostatik, der Entfernung des Stossmittelpunktes von der Rotationsaxe u. s. w. eine wichtige Rolle spielt.

Für den Hauptpunkt O_0 hat die X-Componente des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ zufolge (51) und (52) den Werth $M_a^{(O_0)}.\mu_\xi = \mathrm{M}_\xi - M.\zeta_0\xi = 0$, und es ist demnach das Deviationsmoment $D_a^{(O_0)}$ identisch mit seiner Y-Componente $M_a^{(O)}.\mu_\eta = \mathrm{M}_\eta$. Der Hauptpunkt O_0 einer Axe a ist sonach im Gegensatze zu allen anderen Punkten dieser Axe a durch die weitere Eigenschaft charakterisirt, dass für denselben, und zwar nur für diesen das auf die Axe a bezogene Deviationsmoment auf der durch diese Axe gelegten Schwerebene normal ist, und zwar ist dasselbe der zu dieser Schwerebene normalen Componente M_η des auf die zur Axe a parallele Schweraxe ζ bezogenen Massenmomentes M_ζ oder Deviationsmomentes D_ζ geometrisch gleich. Mit anderen Worten: Es ist für ein zu $\xi\eta\zeta$ paralleles Axensystem xyz, dessen z-Axe die Axe a, dessen zx-Ebene die durch a gelegte Schwerebene und dessen Anfangspunkt der Hauptpunkt ist, stets: $a_{31} = \Sigma(mzx) = O$ und $a_{32} = -\Sigma(mzy) = \mathrm{M}_\eta = \alpha_{32}$.

Für alle in derselben Schwerebene, d. i. der $\zeta\xi$-Ebene, gelegenen, zu a parallelen Axen liegen die

Hauptpunkte der Gleichung (52) zufolge in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Schweraxen ξ und ζ sind und deren Gleichung $\mathrm{M}_\xi = M\xi\zeta_0$ ist und die diesen Hauptpunkten entsprechenden zu dieser Schwerebene normalen Deviationsmomente sind sämmtlich gleich M_η, also untereinander geometrisch gleich.

Der absolute Zahlwerth dieses Deviationsmomentes wird bei der Drehung dieser Schwerebene, d. i. der $\zeta\xi$-Ebene, um die Axe ζ, zu der sämmtliche Axen a als parallel angenommen sind, am kleinsten, nämlich Null, wenn $\mathrm{M}_\eta = 0$, also $M_\xi = D_s$ ist, d. h. nur dann, wenn diese Schwerebene mit der Ebene des Deviationsmomentes für die Schweraxe ζ zusammenfällt. In dieser Hauptlage der Ebene, und zwar nur in dieser, sind sämmtliche in dieser Ebene gelegenen, zu ζ parallelen Axen, da die Deviationsmomente für den Hauptpunkt dieser Axen den Werth $\mathrm{M}_\eta = 0$ haben, Trägheitshauptaxen für ihren Hauptpunkt, und die reelle Halbaxe der oberwähnten gleichseitigen Hyperbel erlangt zufolge (52) ihren grössten Werth. In dieser Hauptlage der Ebene fallen zudem die Richtungen sämmtlicher Deviationsmomente $D_a^{(O)}$ und Massenmomente $M_a^{(O)}$, die den verschiedenen Punkten der zur ζ-Axe parallelen Axen a entsprechen, in diese Schwerebene; es fallen mit anderen Worten die Ebenen der Deviationsmomente für alle diese Punkte zusammen mit der allen diesen Axen gemeinsamen Schwerebene, während, wenn die Axe a nicht eine Hauptaxe für einen ihrer Punkte ist, also nicht in der betrachteten Schwerebene gelegen ist, die Ebene des Deviationsmomentes zufolge früherer Entwicklungen keinesfalls den Schwerpunkt enthalten kann. Nimmt die Schwerebene bei der Drehung um die Axe ζ die zu der betrachteten ersten Hauptlage senkrechte zweite Hauptlage an, so wird der absolute Zahlwerth des den Hauptpunkten zukommenden Deviationsmomentes ein Maximum, nämlich $\mathrm{M}_\eta = D_s$, während $\mathrm{M}_\xi = 0$, also zufolge (52) $\xi\zeta_0 = 0$ ist, d. h. die Hauptpunkte sind in dieser Lage die einzelnen Punkte der Axen ξ und ζ. Bei der Drehung aus der ersten Hauptlage in die zweite nimmt der Zahlwerth des den Hauptpunkten entsprechenden Deviationsmomentes allmälig von 0 bis D_s zu und bei der weiteren Drehung aus der zweiten Hauptlage in die erste wieder ab von D_s bis Null. Ist die ζ-Axe eine Hauptcentralaxe, so ist $D_s = 0$, also auch für alle Lagen der $\zeta\xi$-Ebene bei der betrachteten Drehung $\mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_\eta = 0$, ferner $\xi\zeta_0 = 0$, d. h. alle Punkte der $\xi\eta$-Ebene und der ζ-Axe sind Hauptpunkte für die durch diese Punkte parallel zu dieser Hauptcentralaxe geführten Axen, die den beiden ersten Gleichungen (51) zufolge Trägheitshauptaxen für diese Hauptpunkte sind.

Für alle jene Punkte der zur beliebigen Schwerpunktsaxe ζ parallelen Axen a, die nicht Hauptpunkte sind, gleichen sich zwar gemäss (51) die zu jener Schwerebene, in welcher die Axen a liegen, senkrechten Componenten der Deviationsmomente, indem sie sämmtlich $\mathfrak{M}_\eta$ gleich sind, jedoch ändern sich die in dieser $\zeta\xi$-Ebene fallenden X-Componenten $\mathfrak{M}_\xi - M\zeta\xi$ von Punkt zu Punkt, und zwar derart, dass für Punkte derselben Axe, wie dies die Substitution des Werthes von $\mathfrak{M}_\xi$ aus (52) in die erste Gleichung (51) sofort lehrt, diese Componenten der Entfernung dieser Punkte von dem Hauptpunkte proportional und für je zwei beiderseits vom Hauptpunkte gleich weit entfernten Punkte entgegengesetzt gleich sind, während für verschiedene Axen die Punkte des gleichen Deviationsmomentes der ersten Gleichung (51) zufolge in gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Axen ξ und ζ sind, gelegen sind. Von einer Hyperbel der $\zeta\xi$-Ebene zur andern ändern sich die X-Componenten des Deviationsmomentes beiderseits stetig ins Unendliche, und zwar sind dieselben für jene beiden Schaaren von Hyperbeln, von welchen die eine innerhalb jener Hyperbeläste, die der geometrische Ort der Hauptpunkte sind, und die zweite auf der convexen Seite dieser beiden Hyperbeläste gelegen ist, entgegengesetzt gerichtet. Dreht man die $\zeta\xi$-Ebene in ihre erste Hauptlage, so dass sie mit der Ebene des auf die ζ-Axe bezogenen Deviationsmomentes D_s zusammenfällt, so reduciren sich sämmtliche Deviationsmomente auf ihre X-Componente, so dass sie dann sämmtlich zueinander parallel sind. Ist die Axe ζ eine Hauptcentralaxe, so ist dies in jeder Lage der $\zeta\xi$-Ebene der Fall u. s. w.

Die Coordinaten des Hauptpunktes O der Axe a, die sich auf irgend ein orthogonales Schwerpunktsaxensystem beziehen und von nun an durch $\xi\eta\zeta$ bezeichnet seien, ergeben sich durch Einsetzung des Werthes (50), der Kürze halber durch u bezeichnet sei, in frühere Gleichungen, nämlich in

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_n + u \,.\, \alpha_\xi \\ \eta &= \eta_n + u \,.\, \alpha_\eta \\ \zeta &= \zeta_n + u \,.\, \alpha_\zeta \\ \text{wo} \quad u &= \frac{M_\xi \xi_n + M_\eta \eta_n + M_\zeta \zeta_n}{M \,.\, n^2} = \frac{M_\xi \xi_n + M_\eta \eta_n + M_\zeta \zeta_n}{M(\xi_n^2 + \eta_n^2 + \zeta_n^2)} \end{aligned}\right\} . \qquad (53)$$

Sind $\alpha_{11} = J_\xi$, $\alpha_{22} = J_\eta$, $\alpha_{33} = J_\zeta$ die Trägheitsmomente des materiellen Punktsystems in Bezug auf die Axen $\xi\eta\zeta$, ferner $(0, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, beziehungsweise $(\alpha_{21}, 0, \alpha_{23})$, beziehungsweise $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, 0)$ die Componenten des auf die Axe ξ, beziehungsweise η, beziehungsweise ζ bezogenen Deviationsmomentes, so ist den Gleichungen (32) entsprechend in den Gleichungen (53) einzusetzen

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= \alpha_{11}\alpha_\xi + \alpha_{21}\alpha_\eta + \alpha_{31}\alpha_\zeta \\ M_\eta &= \alpha_{12}\alpha_\xi + \alpha_{22}\alpha_\eta + \alpha_{32}\alpha_\zeta \\ M_\zeta &= \alpha_{13}\alpha_\xi + \alpha_{23}\alpha_\eta + \alpha_{33}\alpha_\zeta \end{aligned}\right\} , \qquad (54)$$

wo $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ ist.

Wählt man zu Coordinatenaxen die Hauptcentralaxen, so verschwinden sämmtliche Componenten der auf diese Axen bezogenen Deviationsmomente α_{23}, α_{31} und α_{21}, so dass dann

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= \alpha_{11}\alpha_\xi = J_\xi \alpha_\xi \\ M_\eta &= \alpha_{22}\alpha_\eta = J_\eta \alpha_\eta \\ M_\zeta &= \alpha_{33}\alpha_\zeta = J_\zeta \alpha_\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Dies sind die Componenten des auf die zur Axe a parallele Schweraxe s bezogenen Massenmomentes M_s, während die Componenten des auf diese Axe s bezogenen Deviationsmomentes D_s, dessen Richtungscosinus durch $\delta_\xi \delta_\eta \delta_\zeta$ bezeichnet seien, sich ergeben, wenn man von jeder der Componenten (55) die entsprechenden gleich-gerichteten Componenten $J_s \alpha_\xi$, beziehungsweise $J_s \alpha_\eta$, beziehungsweise $J_s \alpha_\xi$ des auf die Axe s bezogenen Trägheitsmomentes J_s, welches, wenn $\xi\eta\zeta$ die Hauptcentralaxen sind, durch

$$J_s = J_\xi \alpha_\xi^2 + J_\eta \alpha_\eta^2 + J_\zeta \alpha_\zeta^2 \qquad (56)$$

bestimmt ist, in Abzug bringt. Sonach ist

$$\left.\begin{aligned} D_s\,.\,\delta_\xi &= (J_\xi - J_s)\,\alpha_\xi \\ D_s\,.\,\delta_\eta &= (J_\eta - J_s)\,\alpha_\eta \\ D_s\,.\,\delta_\zeta &= (J_\zeta - J_s)\,\alpha_\zeta \end{aligned}\right\}. \tag{57}$$

Durch Quadrirung und Summirung dieser Gleichungen ergibt sich bei Beachtung von (56)

$$\begin{aligned} D_s^2 &= J_\xi^2\alpha_\xi^2 + J_\eta^2\alpha_\eta^2 + J_\zeta^2\alpha_\zeta^2 - J_s^2 = \\ &= (J_\eta - J_\zeta)^2\alpha_\eta^2\alpha_\zeta^2 + (J_\zeta - J_\xi)^2\alpha_\zeta^2\alpha_\xi^2 + (J_\xi - J_\eta)^2\alpha_\xi^2\alpha_\eta^2. \end{aligned} \tag{58}$$

Um den geometrischen Ort der Hauptpunkte sämmtlicher Axen a im Raume von einer durch die Richtungscosinus $\alpha_\xi\,\alpha_\eta\,\alpha_\zeta$ gegebenen Richtung zu bestimmen, hat man in den Gleichungen (53) $u\,\xi_n\,\eta_n\,\zeta_n$ zu eliminiren, was am einfachsten folgendermassen geschehen kann: Da u die Projection der den Schwerpunkt mit dem Hauptpunkte $(\xi\eta\zeta)$ verbindenden Strecke auf die Axe a ist, so muss $u = \alpha_\xi\xi + \alpha_\eta\eta + \alpha_\zeta\zeta$ sein. Ferner ist nach (53)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_n^2 + \eta_n^2 + \zeta_n^2 + u^2 = n^2 + u^2$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\xi\xi + \mathrm{M}_\eta\eta + \mathrm{M}_\zeta\zeta &= \mathrm{M}_\xi\xi_n + \mathrm{M}_\eta\eta_n + \mathrm{M}_\zeta\zeta_n + u\,(\mathrm{M}_\xi\alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta\alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta\alpha_\zeta) \\ &= Mn^2u + u\,(\mathrm{M}_\xi\alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta\alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta\alpha_\zeta), \end{aligned}$$

daher, wenn n^2 aus den beiden letzten Gleichungen eliminirt und u aus der drittletzten Gleichung eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\xi\xi + \mathrm{M}_\eta\eta + \mathrm{M}_\zeta\zeta = (\xi\alpha_\xi + \eta\alpha_\eta + \zeta\alpha_\zeta)\,[M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \\ - M(\xi\alpha_\xi + \eta\alpha_\eta + \zeta\alpha_\zeta)^2 + \mathrm{M}_\xi\alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta\alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta\alpha_\zeta]. \end{aligned} \tag{59}$$

Diese Gleichung, in welche für $\mathrm{M}_\xi\,\mathrm{M}_\eta\,\mathrm{M}_\zeta$ die Werthe aus (54) oder (55) einzusetzen sind, ist in Bezug auf $\xi\eta\zeta$ eine algebraische Gleichung dritten Grades, welcher auch die Werthe $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ und $\frac{\xi}{\alpha_\xi} = \frac{\eta}{\alpha_\eta} = \frac{\zeta}{\alpha_\zeta}$ Genüge leisten. Es ist sonach der geometrische Ort der Hauptpunkte sämmtlicher zueinander parallelen Axen eine algebraische Mittelpunktsfläche dritter Ordnung, welche die zu diesen Axen parallele Schweraxe enthält, deren Mittelpunkt ferner der Schwerpunkt und deren Gleichung (59) ist.

Wählt man nunmehr der Einfachheit halber die zu diesen Axen parallele Schweraxe s zur ζ-Axe und die Richtung des auf diese Axe bezogenen, durch (58) bestimmbaren Deviationsmomentes $D_s = D_\zeta$ nunmehr zur ξ-Axe, und bezeichnet man den Radius $\sqrt{\frac{D_s}{M}}$ dieses Deviationsmomentes D_s durch δ, so ist in (59) $\alpha_\xi = \alpha_\eta = M_\eta = 0$, $\alpha_\zeta = 1$ und $\mathrm{M}_\xi = D_s = M\delta^2$ zu setzen, daher ist der Gleichung (59) zufolge für den gesuchten geometrischen Ort der Hauptpunkte

$$\zeta(\xi^2+\eta^2) = \delta^2\xi. \tag{60}$$

Bei Zugrundelegung eines Polarcoordinatensystems, dessen Pol der Schwerpunkt ist und für welches $\xi = \rho \cos\varphi \cos\vartheta$, $\eta = \rho\cos\varphi \sin\vartheta$, $\zeta = \rho\sin\varphi$ ist, zerfällt die Gleichung (60) in $\rho = 0$, $\cos\varphi = 0$ und

$$\rho^2 = \delta^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin\varphi\cos\varphi} = 2\,\vartheta^2\frac{\cos\vartheta}{\sin 2\varphi}. \tag{61}$$

Der Gleichung (60) gemäss sind die Schnitte der Fläche parallel zur $\xi\eta$-Ebene im Abstande ζ — also senkrecht zu den parallelen Axen a — Kreise, deren Durchmesser $\frac{\delta^2}{\zeta}$ sind und deren Mittelpunkte die Coordinaten

$$\xi_0 = \frac{\delta^2}{2\zeta}, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \zeta \tag{62}$$

haben. Die Kreismittelpunkte liegen sonach in der $\zeta\xi$-Ebene, d. i. in der Ebene des auf die Schweraxe s bezogenen Deviationsmomentes D_s, und zwar den Gleichungen (62) zufolge in der gleichseitigen Hyperbel $\xi_0\zeta_0 = \frac{\delta^2}{2}$, deren Asymptoten die Axen ξ und ζ sind. Sämmtliche Kreise berühren ferner die Axe ζ.

Die Schnitte der Fläche (60) mit irgend einer durch die Schweraxe ζ gelegten Ebene sind, abgesehen von der Axe ζ, ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, deren gemeinsame Asymptote die ζ-Axe ist und die schon früher betrachtet worden sind. Ist ϑ das Azimut einer Schnittebene, welche die $\xi\eta$-Ebene in der Axe ξ' durchschneidet, so nimmt nach (60) die Gleichung der diesem Azimut entsprechenden hyperbolischen Schnittlinie, da $\xi' = \pm\sqrt{\xi^2+\eta^2} = \rho\cos\varphi$ und $\xi = \rho\cos\varphi\cos\vartheta = \xi'\cos\vartheta$ ist, die Form $\xi'\zeta = \delta^2\cos\vartheta$ an, so dass, wie dies schon früher bemerkt wurde, diese Hyperbel in der $\eta\zeta$-Ebene, (d. i. für $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$) mit den Axen ξ und ζ zusammenfällt, welche beide Axen in der Fläche (60) gelegen sind. Bloss die in der $\zeta\xi$-Ebene gelegenen Axen sind nach Früherem Trägheitshauptaxen für ihre in der Hyperbel $\xi\zeta = \delta^2$ gelegenen Punkte. Für den besonderen Fall, dass die Axe ζ eine Hauptcentralaxe ist, ist $D_s = 0$, also auch $\delta = 0$, daher reducirt sich dann die Fläche (60) auf die $\xi\eta$-Ebene und die ζ-Axe; die Ebene des Deviationsmomentes D_s wird dann unbestimmt, und alle Axen a sind Trägheitshauptaxen für den in der $\xi\eta$-Ebene gelegenen Fusspunkt derselben.

Während wir uns bisher mit der Aufgabe beschäftigt haben, für die verschiedenen parallelen Axen die Lage der zugehörigen Hauptpunkte zu bestimmen, soll nunmehr die Aufgabe behandelt werden, für einen gegebenen Punkt O des Punktsystems den geometrischen Ort aller in diesem Punkte O sich schneidenden Axen zu bestimmen, deren zugehöriger Hauptpunkt O ist.

Um die Gleichung dieser Kegelfläche zu ermitteln, deren Mittelpunkt O ist, wollen wir die Richtung der von diesem Punkte O nach dem Schwerpunkte S des Systems geführten Geraden zur positiven Richtung der z-Axe eines orthogonalen Axensystems xyz wählen und O zum Anfangspunkte desselben.

Es seien nun $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Richtungscosinus irgend einer Erzeugenden a der gesuchten Kegelfläche in Bezug auf die Axen xyz und der Punkt M, dessen Coordinaten xyz sind und der von O die Entfernung $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ hat, sei irgend ein Punkt dieser Erzeugenden. Dann ist

$$\frac{\alpha_x}{x} = \frac{\alpha_y}{y} = \frac{\alpha_z}{z} = \pm\frac{1}{R}. \tag{63}$$

Da der Punkt O der Axe a als Hauptpunkt dieser Axe durch die Eigenschaft charakterisirt ist, dass das Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ für diesen Punkt O zu der durch die Axe a gelegten Schwerebene, sonach auch zur z-Axe normal gerichtet ist, so ist in den Gleichungen (23) $\delta_z = 0$ zu setzen, und es ist somit die z-Componente des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ gleich der z-Componente des Trägheitsmomentes J_a, also $M_a^{(O)}.\mu_z = J_a \alpha_z$. Substituirt man die Werthe aus (10) und (7) unter Beachtung der Werthe (9), so findet man

$$a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y + a_{33}\alpha_z = (a_{11}\alpha_x^2 + a_{22}\alpha_y^2 + a_{33}\alpha_z^2 + 2a_{23}\alpha_y\alpha_z + \\ + 2a_{31}\alpha_z\alpha_x + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y).\alpha_z \quad (64)$$

oder nach (63)

$$(x^2+y^2)(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z) - z(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}yz + \\ + a_{31}zx + 2a_{12}xy) = 0. \quad (65)$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kegelfläche, die sich übrigens auch leicht aus der Gleichung (49) deduciren lässt. Es ist dies eine Kegelfläche dritter Ordnung, deren Gleichung für $x = y = 0$ verificirt wird, welche Fläche sonach die z-Axe zur Erzeugenden hat, was schon daraus erhellt, dass ein jeder Punkt einer Schwerpunktsaxe als ein Hauptpunkt dieser Axe angesehen werden kann.

Für ein mit dem Axensystem xyz gleichgerichtetes Axensystem $\xi\eta\zeta$, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S ist, ergibt sich die Gleichung der Kegelfläche (65), wenn man $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta + z_s$, ferner den Gleichungen (31) zufolge, in welchen $x_s = y_s = 0$ zu setzen ist, $a_{11} = \alpha_{11} + M.z_s^2$, $a_{22} = \alpha_{22} + M.z_s^2$, $a_{33} = \alpha_{33}$, $a_{23} = \alpha_{23}$, $a_{31} = \alpha_{31}$ und $a_{12} = \alpha_{12}$ in die Gleichung (65) einsetzt, wo $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots$ die durch (29) bestimmten Werthe bedeuten.

Legt man, um die Leitlinie der Kegelfläche (65) zu bestimmen, senkrecht zur z-Axe eine Ebene, etwa durch den Schwerpunkt S, so dass in den folgenden Gleichungen z constant, etwa $z = z_s$ ist, so ersieht man aus der Form der Gleichung (65), in welcher alle jene Glieder, welche bezüglich der Coordinaten x und y vom dritten Grade sind, in dem Producte $(x^2+y^2)(a_{13}x + a_{23}y)$ zusammenzufassen sind, dass diese zur z-Axe senkrechte ebene Leitlinie eine circulare Curve dritter Ordnung ist, welche[1]

---

[1] Siehe E. Czuber, »Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen«. Zeitschrift für Mathem. und Physik, XXXII, S. 257—286. — Eckardt, »Über die Curven dritter Ordnung, welche durch die zwei imaginären unendlich entfernten Kreispunkte gehen«. Zeitschrift für Mathem. und Physik, XIV, S. 368.

»vermöge des Umstandes, dass sie durch die unendlich fernen Kreispunkte geht, unter den Linien gleicher Ordnung eine ähnliche Stellung einnimmt wie der Kreis unter den Kegelschnitten«. Diese Curve hat im Allgemeinen eine Asymptote, der eine wichtige Rolle zukommt. In der Gleichung $y = Ax+B$ dieser Asymptote lässt sich der Coëfficient A dadurch bestimmen, dass man den zweiten Factor $a_{11}x+a_{23}y$ des obigen Productes nach der Substitution von $y = Ax$ annullirt, wodurch man $A = -\frac{a_{13}}{a_{23}}$ erhält, während B gefunden wird, indem man $y = Ax+B = -\frac{a_{13}}{a_{23}}x+B$ in die Gleichung (65) substituirt und den Coëfficienten von x^2 gleich Null setzt, wonach die Asymptote, wenn kürzehalber

$$u = \frac{a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2-2a_{12}a_{13}a_{23}}{a_{23}^2+a_{13}^2}$$

ist, die Gleichung hat:

$$a_{23}y+a_{13}x = (u-a_{33}).z.$$

Führt man Polarcoordinaten ein, für welche

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,\quad R^2 = r^2+z^2 \tag{66}$$

ist und bei welchen der Einfachheit halber der Polarwinkel ϑ nur innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, daher der Radius vector r sowohl positiv, als auch negativ in Rechnung gezogen ist, so zerfällt durch Einsetzung von (66) in (65) die Gleichung dieser ebenen Leitlinie in zwei Gleichungen, nämlich in die Gleichung $r = 0$, welche der z-Axe entspricht, und in die zweite Gleichung

$$r^2-rz\frac{a_{11}\cos^2\vartheta+a_{22}\sin^2\vartheta+2a_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta-a_{33}}{a_{13}\cos\vartheta+a_{23}\sin\vartheta}-z^2 = 0. \tag{67}$$

Massgebend ist in dieser Gleichung der Coëfficient von rz.

Wird nun durch 2γ jener Winkel bezeichnet, dessen Cotangente der Hälfte dieses Coëfficienten von rz in (67) gleichkommt, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$r^2+2rz.\cot 2\gamma-z^2 = 0, \tag{68}$$

welche identisch ist mit

$$(r - z.\operatorname{tg}\gamma)(r + z.\cot\gamma) = 0. \tag{69}$$

Die Leitlinie der Kegelfläche (65), sonach auch diese Kegelfläche selbst, besteht zufolge (69) aus zwei Theilen, I und II, deren Gleichungen $r_1 = z$ tang γ und $r_2 = -z.\cot\gamma$ sind. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass für denselben Werth des Polarwinkels ϑ, wie dies schon die Gleichung (67) lehrt, das Product der zugehörigen Radien vectoren $r_1 r_2 = -z^2$ ist. Sind demnach M_1 und M_2 jene Punkte, in welchen eine beliebige, durch den Schwerpunkt S senkrecht zu OS gelegte Gerade die Fläche (65) — abgesehen von dem in dieser Fläche stets gelegenen Schwerpunkte — durchschneidet, so sind M_1 und M_2 auf entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes gelegen, und es ist OS die mittlere geometrische Proportionale zwischen M_1S und SM_2, woraus gefolgert werden muss, dass je zwei in derselben Schwerebene gelegenen Erzeugenden OM_1 und OM_2 der Kegelfläche (65) aufeinander senkrecht stehen. Diese beiden Leitstrahlen SM_1 und SM_2 sind zudem dann einander gleich, nämlich gleich z, mit anderen Worten: es sind beide Erzeugende OM_1 und OM_2 dann unter demselben Winkel von 45° gegen die z-Axe, d. i. gegen die Schweraxe OS geneigt, wenn die Gleichung (67) eine reine quadratische Gleichung ist, also der Zähler des Coëfficienten von rz verschwindet, was für einen reellen Werth von ϑ nur dann der Fall ist, wenn $a_{12}^2 - (a_{33} - a_{22})(a_{33} - a_{11}) = p^2$ positiv ist, und zwar sind die beiden zugehörigen Werthe des Polarwinkels ϑ_1 und ϑ_2 bestimmt durch $\operatorname{tg}\vartheta_1 = \dfrac{a_{12} + p^2}{a_{33} - a_{22}}$ und $\operatorname{tg}\vartheta_2 = \dfrac{a_{12} - p^2}{a_{33} - a_{22}}$.

Da das Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ sowohl zur Axe a, als auch zur z-Axe normal gerichtet ist, so ist dessen Richtung parallel zur xy-Ebene und senkrecht zum Radius vector r, also der Richtungswinkel von $D_a^{(O)}$ in Bezug auf die x-Axe entweder $\vartheta + \dfrac{\pi}{2}$ oder $\vartheta - \dfrac{\pi}{2}$. Wird $D_a^{(O)}$ im ersten Falle positiv, im zweiten Falle dagegen negativ in Rechnung gezogen, was im Folgenden vorausgesetzt werden soll, so sind $-\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, O die Richtungscosinus von $D_a^{(O)}$. Da nun das Massenmoment $M_a^{(O)}$

die geometrische Summe aus dem Trägheitsmomente J_a und aus $D_a^{(O)}$ ist, so ergeben sich durch Projection auf die Coordinatenaxen den Werthen (10) zufolge die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha_x+a_{21}\alpha_y+a_{31}\alpha_z &= J_a\,.\,\alpha_x-D_a^{(O)}\sin\vartheta \\ a_{12}\alpha_x+a_{22}\alpha_y+a_{32}\alpha_z &= J_a\,.\,\alpha_y+D_a^{(O)}\cos\vartheta \\ a_{13}\alpha_x+a_{23}\alpha_y+a_{33}\alpha_z &= J_a\,.\,\alpha_z \end{aligned}\right\}. \qquad (70)$$

Der Vereinfachung halber werde nunmehr die bisher unbestimmt gelassene Richtung der x-Axe übereinstimmend gewählt mit der Richtung des auf die z-Axe bezogenen Deviationsmomentes $D_z^{(O)}=D_z^{(S)}$, so dass von den beiden Componenten a_{31} und a_{32} dieses Deviationsmomentes D_z die letztere verschwindet, also $a_{32}=\alpha_{32}=0$ und $a_{31}=\alpha_{31}=D_z^{(O)}=D_z^{(S)}>0$ ist. Es ist dann die yz-Ebene — der Gleichung des Trägheitsellipsoids zufolge — die Ebene jenes elliptischen Schnittes dieses Ellipsoids, für welche die z-Axe mit einer Axe dieses elliptischen Schnittes gleichgerichtet ist, so dass die y-Axe die Richtung der zweiten Ellipsenaxe hat. Für diesen Fall ist den Gleichungen (67) und (68) zufolge

$$\cot 2\gamma = \\ = -\frac{1}{2}\,\frac{(a_{11}-a_{33})\cos^2\vartheta+(a_{22}-a_{33})\sin^2\vartheta+2a_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta}{a_{13}\cos\vartheta} \qquad (71)$$

und die Gleichung (65) nimmt die Form an:

$$(x^2+y^2)(a_{31}x+a_{33}z)-z(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{31}zx+2a_{12}xy)=0. \quad (72)$$

Da diese Gleichung für $x=z=0$ verificirt wird, so ist die y-Axe, d. i. die Axe des auf die z-Axe bezogenen Deviationsmomentes D_z in der Fläche (65) gelegen; es ist sonach O ein Hauptpunkt der y-Axe, was übrigens schon daraus hervorgeht, dass von den zu den Axen x und z parallelen Componenten a_{21} und a_{23} des auf die y-Axe bezogenen, dem Punkte O entsprechenden Deviationsmomentes $D_y^{(O)}$ die letztere Componente verschwindet, sonach das zur x-Axe parallele Deviationsmoment $D_y^{(O)}$ zur yz-Ebene, d. i. zu der durch den Punkt O gelegten Schwerebene normal ist, welcher Umstand für einen Hauptpunkt charakteristisch ist. Es bilden daher die in der Fläche (65) gelegenen drei Axen, nämlich die y-Axe und die in der zx-Ebene gelegenen Erzeugenden dieser Kegelfläche ein orthogonales Axensystem.

Wählt man, wie schon erwähnt wurde, der Wahl des Doppelzeichens des Radius vectors r entsprechend, den Polarwinkel ϑ nur zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und den der Gleichung (71) entsprechenden Hilfswinkel 2γ zwischen den Grenzen 0 und π, also $0<\gamma<+\frac{\pi}{2}$, so ist, da z positiv ist, in dem Theile I der Leitlinie (69) $r_1 = z.\operatorname{tg}\gamma$ stets positiv, und zwar bedeutet γ dieser Gleichung zufolge den Winkel, den die nach dem Endpunkte M_1 dieses positiven Radius $r_1 = \overline{SM_1}$ gerichtete Erzeugende OM_1 der Kegelfläche (65) mit der Richtung OS der z-Axe einschliesst, so dass in (64) für den Theil I der Kegelfläche $\alpha_z = \cos\gamma$ ist. Für den Theil II der Leitlinie ist $r_2 = -z\cot\gamma$ stets negativ, und es ist nach Früherem der Winkel SOM_2 complementär zum Winkel γ, also $\alpha_z = \sin\gamma$.

a) Ist nun $a_{22} \gtrless a_{33}$ und $a_{13} = D_z$ von Null verschieden, so besteht diese Leitlinie aus zwei von einander vollständig getrennten Theilen I und II, und zwar nähert sich, wofern $a_{22} > a_{33}$ ist (siehe Fig. 1), der auf der positiven Seite der yz-Ebene gelegene Theil I, dessen Gleichung $r_1 = z.\operatorname{tang}\gamma$ ist, zufolge der Gleichung (72), beziehungsweise (71) beiderseits einer zur y-Axe parallelen Asymptote, deren Entfernung vom Schwerpunkte $\overline{SC} = \frac{a_{22}-a_{33}}{a_{13}}z$ ist, welche Asymptote überdies die Curve in einem Punkte D schneidet, für welchen $y = \frac{1}{2}\,\frac{(a_{22}-a_{33})(a_{22}-a_{11})-a_{13}^2}{a_{12}a_{13}}z$ ist, zudem enthält dieser unendliche Theil I drei Wendepunkte (ist $a_{12} = 0$, also die y-Axe eine Trägheitshauptaxe für O, so rückt ein Wendepunkt in unendliche Entfernung, so dass die Asymptote zur Inflexionsasymptote wird; ist $a_{12} = 0$ und $a_{13}^2 = (a_{22}-a_{33})(a_{22}-a_{11})$, so dass das Trägheitsellipsoid des Punktes O ein Rotationsellipsoid wird, so geht die Curve I in ihre Asymptote über).

Der auf der entgegengesetzten Seite der y-Axe gelegene Theil II, dessen Gleichung $r_2 = -z\cot\gamma$ ist, bildet eine in sich geschlossene Ovallinie, in welcher der Schwerpunkt S gelegen ist und welche im Schwerpunkte S von der yz-Ebene tangirt wird. (Ist $a_{12} = 0$ und $a_{13}^2 = (a_{22} - a_{33})(a_{22} - a_{11})$, so wird aus der Ovalen II ein Kreis.) Ist $a_{22} < a_{33}$, so gilt das von der Curve I Gesagte für die Curve II und umgekehrt.

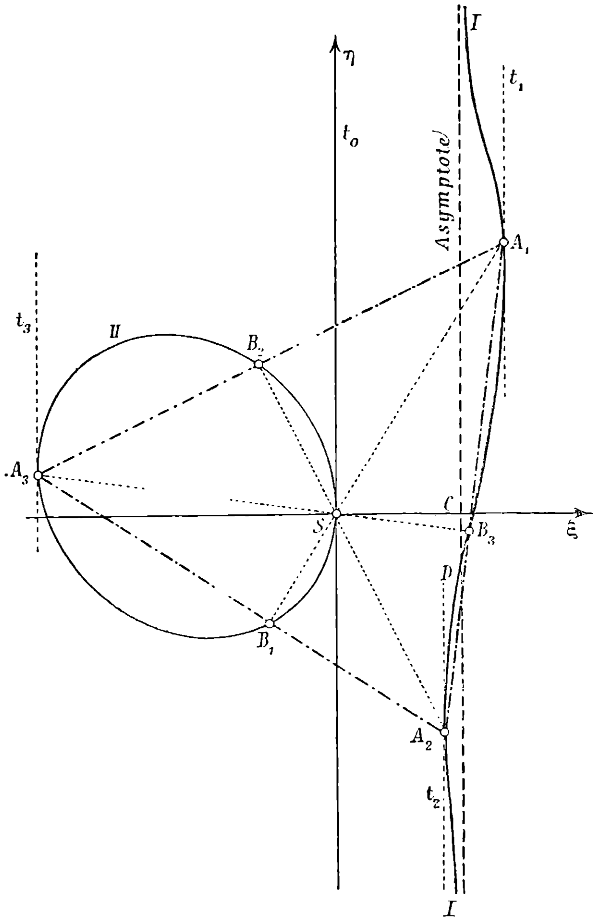

Fig. 1.

b) Ist $a_{22} = a_{33}$, also die yz-Ebene eine Kreisschnittsebene des Trägheitsellipsoids, und ist zudem a_{13} von Null verschieden, so lautet die Gleichung (72)

$$x[a_{13}(x^2 + y^2 - z^2) + (a_{33} - a_{11})zx - 2a_{12}yz] = 0.$$

Die Theile der Fläche (65) sind sonach in diesem Falle die yz-Ebene selbst, für welche $x = 0$ ist, und eine elliptische Kegelfläche, deren im Schwerpunkte S zur z-Axe senkrechter Querschnitt ein Kreis ist, innerhalb dessen der Schwerpunkt liegt. Ist zudem $a_{12} = 0$, also die y-Axe eine Trägheitshauptaxe, so liegt die Axe dieser Kegelfläche in der zx-Ebene; ist dagegen $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist diese Axe in der yz-Ebene gelegen. Ist sowohl $a_{12} = 0$, als auch $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist diese Kegelfläche eine senkrechte Kreiskegelfläche, deren Axe die z-Axe ist und deren Öffnungswinkel ein rechter Winkel ist.

c) Ist $a_{13} = D_z = 0$, also die z-Axe eine Hauptaxe für den Punkt O, sonach auch für den in der z-Axe gelegenen Schwerpunkt, kurz eine Hauptcentralaxe, so lassen sich die beiden anderen Axen x und y so wählen, dass sie mit den beiden anderen Hauptaxen des Punktes O übereinstimmen, dass also auch $a_{12} = 0$ ist. Die Gleichung (65) hat dann die Form

$$z.[(a_{33}-a_{11})x^2+(a_{33}-a_{22})y^2] = 0.$$

Die Theile dieser Fläche sind demnach in diesem Falle die zur Schweraxe z senkrechte xy-Ebene und, wofern $a_{11} \gtrless a_{33} \gtrless a_{22}$ ist, zwei durch diese Axe z gelegte Ebenen, deren Neigungswinkel durch die zx- und yz-Ebene halbirt wird, und deren Gleichungen $y = x.\sqrt{\frac{a_{11}-a_{33}}{a_{33}-a_{22}}}$ und $y = -x\sqrt{\frac{a_{11}-a_{33}}{a_{33}-a_{22}}}$ sind. Für $a_{11} = a_{33} \gtrless a_{22}$, d. h. für den Fall, dass das Trägheitsellipsoid des Punktes O ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe die y-Axe ist, reduciren sie sich auf die zx-Ebene und für $a_{22} = a_{33} \gtrless a_{11}$ auf die yz-Ebene. Ist $a_{33} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}$, so halbiren diese Ebenen die entsprechenden Coordinatenwinkel und stehen zueinander senkrecht. Ist $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist O der Hauptpunkt für sämmtliche durch O gelegte Axen. Liegt a_{33} nicht zwischen a_{11} und a_{22}, so reducirt sich die Fläche (65) auf die xy-Ebene.

Besonders wichtig unter allen Erzeugenden der Kegelfläche (65) sind die drei Trägheitshauptaxen OA_1, OA_2 und OA_3 des Punktes O, für welche O gleichfalls ein Hauptpunkt ist. Da für diese drei zueinander senkrechten Axen $a_1 a_2 a_3$ das

Deviationsmoment verschwindet, so ist das auf diese Axen bezogene Massenmoment, dessen Componenten durch (10) gegeben sind, mit der betreffenden Trägheitshauptaxe gleichgerichtet, sonach besteht, wenn $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Richtungscosinus der letzteren Axe sind, die bekannte Beziehung

$$\frac{a_{11}\alpha_x+a_{21}\alpha_y+a_{31}\alpha_z}{\alpha_x} = \frac{a_{12}\alpha_x+a_{22}\alpha_y+a_{32}\alpha_z}{\alpha_y} = \\ = \frac{a_{13}\alpha_x+a_{23}\alpha_y+a_{33}\alpha_z}{\alpha_z}. \quad (73)$$

Setzt man in dieser Doppelgleichung für $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Werthe aus (63) ein, so ergibt sich, dass die Hauptaxen OA_1, OA_2, OA_3 folgenden Gleichungen genügen müssen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}(y^2-x^2)+(a_{11}-a_{22})xy+(a_{13}y-a_{23}x)z=0 \\ a_{23}(z^2-y^2)+(a_{22}-a_{33})yz+(a_{21}z-a_{31}y)x=0 \\ a_{31}(x^2-z^2)+(a_{33}-a_{11})zx+(a_{32}x-a_{12}z)y=0 \end{array}\right\}. \quad (74)$$

Jede dieser drei Gleichungen lässt sich aus den beiden anderen deduciren. Es sind dies die Gleichungen dreier Kegelflächen zweiter Ordnung, deren gemeinsamen Durchdringungslinien die drei Hauptaxen sind und deren Wurzeln offenbar auch der Gleichung (65) genügen müssen, zumal da (64) auch aus (73) deducirbar ist. Um die charakteristische Eigenschaft der Lage dieser Hauptaxen a_1, a_2 und a_3 in der Kegelfläche (65) zu ermitteln, wollen wir an diese Fläche durch die Erzeugende a dieser Fläche eine Berührungsebene legen. Sind $\nu_x \nu_y \nu_z$ die Richtungscosinus der Normalen n dieser Ebene und bedeutet F die Function der linken Seite der Gleichung (65), so ist den Gleichungen (70) und (63), beziehungsweise (66) zufolge

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R^2[a_{13}+2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \sin\vartheta]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = R^2[a_{23}-2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \cos\vartheta]$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = R^2[a_{33}-J_a] = -R^2.\frac{a_{13}\alpha_x+a_{23}\alpha_y}{\alpha_z} = \\ = -R^2\,\frac{r(a_{13}\cos\vartheta+a_{23}\sin\vartheta)}{z},$$

demnach

$$\frac{\nu_x}{a_{13}+2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \sin\vartheta} = \frac{\nu_y}{a_{23}-2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \cos\vartheta} = \frac{\nu_z}{a_{33}-J_a}. \tag{75}$$

Für die Durchschnittslinie t dieser Berührungsebene mit der xy-Ebene, beziehungsweise für die mit t gleichgerichtete Tangente der zur xy-Ebene parallelen Leitlinie der Kegelfläche (65) im Punkte (xyz) ist, da $\cos(z,t)=0$ und $\nu_x \cos(x,t)+$ $+\nu_y \sin(x,t)=0$ ist,

$$\operatorname{tang}(x,t) = -\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{a_{13}+2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \sin\vartheta}{2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \cos\vartheta - a_{23}}. \tag{76}$$

Wählt man demnach, wie früher, als Richtung der x-Axe die Richtung des auf die Schwerpunktaxe OS bezogenen Deviationsmomentes, so dass $a_{23}=0$ ist, so ersieht man aus der letzten Gleichung, dass, wenn man von den Werthen $\cos\vartheta=0$ und $\alpha_z=0$, d. i. von der im Schwerpunkte S an die Leitlinie (69) geführten Tangente t_0 und von der Asymptote derselben absieht, die Tangente an die Leitlinie sicher dann und nur dann zur Richtung des auf die Schwerpunktsaxe OS bezogenen Deviationsmomentes a_{13} senkrecht, also zur y-Axe parallel ist, wenn $D_a^{(O)}=0$ ist, d. h. wenn die zu diesen Berührungspunkten von O aus geführten Erzeugenden der Kegelfläche (65) die Trägheitshauptaxen des Punktes O sind. Es gibt sonach — abgesehen von der mit der y-Axe gleichgerichteten Tangente t_0 für den Schwerpunkt S — nur drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ der Curve (69), für welche die Tangenten $t_1 t_2 t_3$ zur Asymptote dieser Curve parallel sind und diese drei charakteristischen Punkte $A_1 A_2 A_3$ bestimmen die Lagen der drei Hauptaxen OA_1, OA_2 und OA_3. Zwei von diesen Punkten A_1 und A_2 liegen, wofern $a_{22} \gtreqless a_{33}$ und $a_{13} \gtreqless 0$ ist, in dem unendlichen Theile der Curve, während der dritte Punkt A_3 in dem zweiten geschlossenen ovalen Theile dieser Curve gelegen ist (siehe Fig. 1). Sind $B_1 B_2 B_3$ die dritten Punkte, in welchen die Geraden A_1S, A_2S, A_3S die Leitlinie durchschneiden, so ist $A_1B_1 \perp A_2A_3$, $A_2B_2 \perp A_3A_1$, $A_3B_3 \perp A_1A_2$, denn, da die Hauptaxe OA_1 auf der Ebene der beiden anderen Hauptaxen OA_2 und OA_3 senkrecht steht, so ist $A_2A_3 \perp OA_1$, aber auch $A_2A_3 \perp OS$

also A_2A_3 senkrecht zur Ebene des Dreiecks OA_1B_1 u. s. w. Es ist sonach der Schwerpunkt S der Durchschnittspunkt der Höhenlothe des Fundamentaldreiecks $A_1A_2A_3$, welches die Basis jenes Fundamentaltetraëders bildet, dessen zueinander senkrechte Seitenkanten OA_1, OA_2 und OA_3 in unserem Falle von den Trägheitshauptaxen des Punktes O gebildet werden.[1]

Während die den Axen OA_1, OA_2, OA_3 entsprechenden Deviationsmomente verschwinden, sind die den Höhen OB_1, OB_2, OB_3 der drei Seitenflächen unseres Fundamentaltetraëders zugehörigen Deviationsmomente, da ihre Richtungen zu den entsprechenden Schwerpunktsebenen normal sind, mit den Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 des Fundamentaldreiecks gleichgerichtet.

Für die Normale n irgend einer der drei durch die y-Axe gelegten Ebenen, welche die Kegelfläche (65) in einer der drei Trägheitshauptaxen OA_1, OA_2, OA_3 tangiren, ist zufolge (75), da $a_{23} = 0$, $D_a^{(O)} = 0$, $\nu_x = \cos(xn) = \sin(zn)$, $\nu_y = 0$, $\nu_z = \cos(zn)$ ist, $\operatorname{tg}(zn) = \frac{a_{13}}{a_{33} - J_a}$ und da die x-Axe die Richtung des auf die z-Axe bezogenen Deviationsmomentes $D_z^{(O)} = a_{13}$ hat, so ist a_{13} positiv. Ist sonach der Fig. 1 entsprechend $a_{22} > a_{33}$, so ist, da für den in der Ovalen II gelegenen Punkt A_3 offenbar $\operatorname{tg}(zn) > 0$ ist, $a_{33} > J_{a_3}$, dagegen ist für die in dem unendlichen Theile I der Leitlinie gelegenen Punkte A_2 und A_1, wenn A_2 jenen der beiden Punkte bedeutet, dessen Tangente t_2 dem Schwerpunkte S näher liegt, $\operatorname{tg}(zn) < 0$ und $a_{33} < J_{a_2} < J_{a_1}$. Es ist sonach von den drei Hauptträgheitsmomenten J_{a_1}, J_{a_2} und J_{a_3} das der Axe OA_1 entsprechende ein Maximum und dasjenige für die Axe OA_3 ein Minimum. OA_1 hat somit die Richtung der kleinsten, OA_3 jene der grössten Halbaxe des Cauchy-Poinsot'schen Trägheitsellipsoids. Das Umgekehrte findet statt, wenn $a_{22} < a_{33}$ ist, in welchem Falle man sich etwa die Fig. 1 um die y-Axe unter Beibehaltung der Richtungen der

---

[1] Es ist dies im Besonderen jenes Fundamentaltetraëder, welches in der allgemeinen Theorie der bicircularen Curven vierter Ordnung und der circularen Curven dritter Ordnung von massgebender Bedeutung ist. — Siehe E. Czuber, »Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen«. Zeitschrift für Mathem. und Physik, XXXII.

Coordinatenaxen um 180° herumgedreht zu denken hat. (Ist $a_{12}=0$, so rücken die Punkte D und A_2 in unendliche Entfernung.) Ist dagegen $a_{22}=a_{33}$, also die Leitlinie der Kegelfläche (65)' ein Kreis, dessen Mittelpunkt C die Coordinaten $x_0=\frac{a_{11}-a_{33}}{2a_{13}}z$ und $y_0=\frac{a_{12}}{a_{13}}z$ hat und dessen Radius $\rho=$ $=\sqrt{z^2+x_0^2+y_0^2}$ der Entfernung des Kreismittelpunktes C vom Punkte O gleich ist, so sind die Punkte A_1 und A_2 die Endpunkte des zur x-Axe parallelen Durchmessers, welcher die zur y-Axe parallele Schwerpunktsaxe im Punkte B_3 schneidet. Verbindet man die Punkte A_1 und A_2 mit dem Schwerpunkte und verlängert diese Gerade A_1S und A_2S, bis sie die Kreisperipherie in B_1, beziehungsweise B_2 schneiden, so kann man den Punkt A_3 dadurch erhalten, dass man die Geraden A_2B_1 und A_1B_2 bis zu ihrem Durchschnittspunkte A_3 verlängert, welcher auch ein Punkt der Geraden B_3S ist. Die Coordinaten der drei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks $A_1A_2A_3$ sind

$$x_1=\frac{a_{11}-a_{33}}{2a_{13}}z+\rho,\quad x_2=\frac{a_{11}-a_{33}}{2a_{13}}z-\rho,\quad x_3=0$$

$$y_1=y_2=\frac{a_{12}}{a_{13}}z,\quad y_3=-\frac{a_{13}}{a_{12}}z.$$

Während nun bisher die Lage jener durch den Punkt O gelegten Axen in der Kegelfläche (65) untersucht wurde, welche für den Punkt O selbst Trägheitshauptaxen sind, möge jetzt der geometrische Ort jener durch O gelegte Axen a bestimmt werden, die überhaupt für irgend einen ihrer Punkte Trägheitshauptaxen sind. Diese Axen müssen zufolge früherer Erörterungen in der Ebene des auf die parallele Schwerpunktsaxe bezogenen Deviationsmomentes gelegen sein. Eine fernere charakteristische Eigenschaft dieser Axen liegt nach Früherem in dem Umstande, dass die Ebene des Deviationsmomentes für irgend einen ihrer Punkte, also auch für den Punkt O den Schwerpunkt S, sonach auch die Axe OS, d. i. die z-Axe enthalten muss. Da sonach, wenn man die in (43) und (44) angewendeten Zeichen beibehält, in der Gleichung $A_z.\sin(a,M_a^{(O)})=$ $=\alpha_x\mu_y-\alpha_y\mu_x$ der Richtungscosinus A_z der Axe A des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ verschwinden muss, so besteht für die gesuchten Trägheitshauptaxen die charakteristische Beziehung $\frac{\mu_x}{\alpha_x} = \frac{\mu_y}{\alpha_y}$ oder zufolge (10)

$$\frac{a_{11}\alpha_x + a_{21}\alpha_y + a_{31}\alpha_z}{\alpha_x} = \frac{a_{12}\alpha_x + a_{22}\alpha_y + a_{32}\alpha_z}{\alpha_y}. \qquad (77)$$

Ersetzt man $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ durch die proportionalen Coordinaten xyz, so gelangt man zu der ersten der drei Gleichungen (74), nämlich zu der Gleichung der Kegelfläche zweiter Ordnung

$$a_{12}(y^2 - x^2) + (a_{11} - a_{22})xy + (a_{13}y - a_{23}x).z = 0. \qquad (78)$$

Diese Kegelfläche ist sonach der geometrische Ort aller jener durch den Anfangspunkt O gelegten Axen, die für irgend einen ihrer Punkte Trägheitshauptaxen sind.

Da für ein mit dem Axensystem xyz gleichgerichtetes Schwerpunktsaxensystem $\xi\eta\zeta$, wie früher, $\alpha_{11} = a_{11} - Mz_s^2$, $\alpha_{22} = a_{22} - Mz_s^2$, $\alpha_{33} = a_{33}$, $\alpha_{12} = a_{12}$, $a_{13} = \alpha_{13}$ und $a_{23} = \alpha_{23}$, ferner $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta + z_s$ ist, so kann die Gleichung der Kegelfläche (78) auch in der Form

$$\alpha_{12}(\eta^2 - \xi^2) + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\xi\eta + (\alpha_{13}\eta - \alpha_{23}\xi)(\zeta + z_s) = 0 \qquad (79)$$

aufgestellt werden.

Um schliesslich in aller Kürze den geometrischen Ort der Hauptpunkte sämmtlicher Axen a zu bestimmen, die sich in einem gegebenen Punkte O, dessen Coordinaten in Bezug auf irgend ein orthogonales Schwerpunktsaxensystem $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ seien, schneiden, empfiehlt es sich, von der die Hauptpunkte charakterisirenden Gleichung (59) auszugehen. Bedeuten xyz die Coordinaten eines Hauptpunktes jener von O ausgehenden Axe, deren Richtungscosinus $\alpha_\xi = \alpha_x$, $\alpha_\eta = \alpha_y$, $\alpha_\zeta = \alpha_z$ sind, in Bezug auf ein mit dem Schwerpunktsaxensystem consentirendes Axensystem, dessen Anfangspunkt O ist, und bezeichnet R die gesuchte Entfernung dieses Hauptpunktes vom Punkte O, so ist in (59) zu setzen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + x = \xi_0 + R\alpha_x \\ \eta &= \eta_0 + y = \eta_0 + R\alpha_y \\ \zeta &= \zeta_0 + z = \zeta_0 + R\alpha_z \end{aligned}\right\}. \qquad (80)$$

Sonach ist

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi\alpha_x+\eta\alpha_y+\zeta\alpha_z)^2 = (\eta\alpha_z-\zeta\alpha_y)^2+(\zeta\alpha_x-\xi\alpha_z)^2+ \\ +(\xi\alpha_y-\eta\alpha_x)^2 = (\eta_0\alpha_z-\zeta_0\alpha_y)^2+(\zeta_0\alpha_x-\xi_0\alpha_z)^2+ \\ +(\xi_0\alpha_y-\eta_0\alpha_x) = p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2,$$

wofern durch $p_\xi\, p_\eta\, p_\zeta$ die Differenzen

$$\left.\begin{aligned} p_\xi &= \eta_0\alpha_z-\zeta_0\alpha_y \\ p_\eta &= \zeta_0\alpha_x-\xi_0\alpha_z \\ p_\zeta &= \xi_0\alpha_y-\eta_0\alpha_x \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

bezeichnet werden.

Substituirt man diese Werthe und jene aus (80) in die Gleichung (59) und bestimmt hierauf den Radius vector R jener Fläche, die der geometrische Ort aller Hauptpunkte der Axen a ist, so findet man, wenn kürzehalber durch $l_1 l_2 l_3$ jene Längen bezeichnet werden, welche, wenn abermals M die Masse des Systems bedeutet, durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned} Ml_1^3 &= \mathrm{M}_\xi\xi_0+\mathrm{M}_\eta\eta_0+\mathrm{M}_\zeta\zeta_0 \\ l_2 &= \xi_0\alpha_x+\eta_0\alpha_y+\zeta_0\alpha_z \\ Ml_3^2 &= \mathrm{M}_\xi\alpha_x+\mathrm{M}_\eta\alpha_y+\mathrm{M}_\zeta\alpha_z \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

als Polargleichung der gesuchten Fläche für den Punkt O als Pol die Gleichung

$$R = \frac{l_1^3-l_2 l_3^2}{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}-l_2. \tag{83}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für jede Lage des durch die Coordinaten $\xi_0\eta_0\zeta_0$ gegebenen Punktes O und für jede Axenrichtung $(\alpha_x\alpha_y\alpha_z)$ bei Berücksichtigung der Gleichungen (54), beziehungsweise (55) und der Gleichungen (81) und (82) in einfacher Weise der Radius vector R bestimmen. Für die entgegengesetzte Richtung $(-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z)$ ergibt sich, wie aus (54), (82) und (83) zu ersehen ist, bei demselben Punkte O der entgegengesetzt gleiche Werth von R, so dass demgemäss die gesuchte Fläche eine Mittelpunktsfläche ist, deren Mittelpunkt

O ist. Setzt man in den oberen Gleichungen $\alpha_x = \frac{x}{R}$, $\alpha_y = \frac{y}{R}$, $\alpha_z = \frac{z}{R}$ und $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, so erhält man die Gleichung dieser Fläche in linearen orthogonalen Coordinaten, und zwar, wie leicht zu ersehen ist, eine Gleichung vierten Grades.

Der geometrische Ort jener Hauptpunkte, für welche die zugehörigen Axen Trägheitshauptaxen sind, ist jene Curve, in welcher die Fläche (83) von der Kegelfläche (78), beziehungsweise (79) geschnitten wird.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Finger Josef

Artikel/Article: Über den Hauptpunkt einer beliebigen Axe eines materiellen Punktsystems. 592-616