

# Über einen Phasenindicator und einige mit demselben ausgeführte Messungen

Prof. J. Puluj.

(Mit 9 Textfiguren.)

Herr O. Fröhlich<sup>1</sup> hat in zwei Abhandlungen dargelegt, wie man das Telephon dazu benützen kann, um den Einfluss der Selbstinduction auf Wechselströme und veränderliche Gleichströme objectiv darzustellen und die verursachten Stromänderungen qualitativ zu verfolgen. In jenen Abhandlungen wurde an einer Stelle bemerkt, dass man das Telephon auch zur Messung der Phasendifferenz und der Selbstinduction von Wechselströmen verwenden könnte, es sind aber solche Messungen vom Herrn Verfasser bis jetzt noch nicht veröffentlicht worden.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein Phasenindicator beschrieben, mit welchem eine Reihe von Messungen der Phasendifferenz von Wechselströmen und der Selbstinduction inductiver Stromkreise ausgeführt wurde.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus zwei gleich langen, mit silberplattirten, ebenen Glasspiegeln und eisernen konischen Ankern versehenen Stahlfedern, welche mit Hilfe von zwei kleinen Elektromagneten und Wechselströmen in schwingende Bewegung versetzt werden können. Die Stahlfedern sind  $7 \cdot 5 \text{ mm}$  breit,  $0 \cdot 3 \text{ mm}$  dick und  $21 \text{ mm}$  lang. Die Elektromagnete sind  $21 \text{ mm}$  lang und haben je  $6 \times 15$  Windungen eines  $1 \text{ mm}$  dicken, gut isolirten Kupferdrahtes von  $29 \text{ mm}$

äusserem und  $13.4 \text{ mm}$  innerem Durchmesser. Je eine Spule und Feder sind an einem rechtwinklig gebogenen eisernen Ständer, wie in Fig. 1 dargestellt ist, befestigt, und der  $9 \text{ mm}$  dicke, vorn konisch abgedrehte, rückwärts mit Gewinde und Schraubenkopf versehene Eisenkern lässt sich durch Drehung im Ständer und Spule dem Federanker nähern oder von demselben entfernen und dadurch die Grösse der Schwingungsamplitude der Feder beliebig ändern. Zwei so ausgestattete Elektromagnetspulen sind auf Säulen verschiebbar angebracht und zusammen auf einem Holzbrett mit drei Stellschrauben montirt. Die eine der Federn ist nur für verticale, die zweite

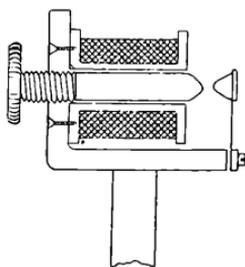


Fig. 1.

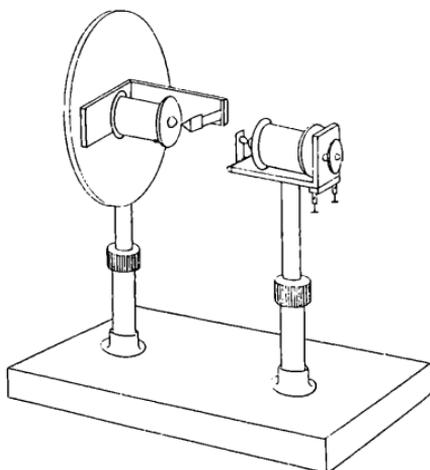


Fig. 2.

für verticale und horizontale Schwingungen eingerichtet und beide werden entweder in verticaler oder in gekreuzter Stellung verwendet, je nachdem man die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten direct oder indirect beobachten, beziehungsweise messen will. Der ganze Apparat ist in Fig. 2 perspectivisch in  $\frac{1}{4}$  natürlicher Grösse dargestellt.<sup>1</sup>

Bei Anwendung der Lissajous'schen Schwingungsmethode geben die Federn bekanntlich im Allgemeinen eine elliptische Schwingungscurve, welche je nach der Grösse der Schwingungsamplituden und der Phasendifferenz der Wechsel-

---

Der Apparat wurde in der Werkstatt des Physikalischen Cabinets vom Mechaniker Ludwig Castagna ausgeführt.

ströme ihre Gestalt und Lage ändert, bei beliebigem Verhältniss der Schwingungsamplituden und  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$ ,. Phasendifferenz in eine gerade Linie und bei Gleichheit der Amplituden und einer Phasendifferenz von  $90^\circ$ ,  $270^\circ$  in einen Kreis übergeht.

Es muss vor Allem bemerkt werden, dass die Federn doppelt so viele Schwingungen machen als der erregende Wechselstrom, da bei jeder Stromrichtung der weiche Anker der schwingenden Feder von dem Eisenkern des Elektromagnets angezogen wird. Eine Feder mit polarisirtem Anker würde dagegen ebensoviele Schwingungen machen wie der erregende Wechselstrom, und dasselbe müsste der Fall sein, wenn der Eisenkern des Elektromagnets, wie beim Telefon, polarisirt wäre.

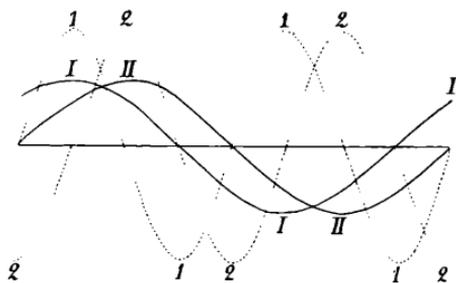


Fig. 3.

Für die Zwecke der Messungen werden die Federn so abgestimmt, dass ihre Schwingungszahl nahezu ein ganzes Vielfaches der Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes ist. Dies geschieht in der Weise, dass man den Grundton der schwingenden Feder mit dem Ton vergleicht, den der Wechselstrom in einem dazu passenden Elektromagnet, einem Transformator u. s. w. erzeugt und durch Änderung der Länge der Federn eine angenäherte Consonanz der Töne herstellt. Es wäre jedoch überflüssig, eine vollständige Übereinstimmung der beiden Töne herbeiführen zu wollen, da es nicht möglich ist, bei Wechselstrommaschinen einen vollkommen gleichmässigen Gang, wenn auch nur für die Dauer eines Versuches, zu erzielen. Nach meiner Erfahrung ist es für die Messungen sogar vortheilhafter, die schwingende Feder gegen den Wechselstrom ein wenig zu verstimmen. Die Schwingungscurve zeigt

allerdings rasch auf einander folgende kleine Zuckungen, diese sind aber bei den Messungen nicht so störend wie die grösseren und langsameren Veränderungen der Schwingungscurve, welche durch Interferenz der eigenen und der elektromagnetisch erzeugten Schwingungen der Feder entstehen.

Wie bereits oben bemerkt wurde, wird der Federanker vom Elektromagnet bei jeder Richtung des erregenden Wechselstromes angezogen. Dieser Umstand hat zur Folge, dass die Phasendifferenz der beiden Schwingungscomponenten doppelt so gross sein muss wie die Phasendifferenz der beiden Wechselströme. Dies ist aus Fig. 3 deutlich zu ersehen, in welcher mit I und II die Stromcurven, mit 1 und 2 die Schwingungscurven einer Feder für den Fall dargestellt sind, dass die Wechselströme eine Phasendifferenz von  $45^\circ$  die Schwingungscomponenten eine solche von  $90^\circ$  haben.

### Theorie des Phasenindicators.

Haben die erregenden Wechselströme bei gekreuzter Stellung der Federn des Phasenindicators eine Phasendifferenz  $\varphi$  und die Periodicität  $p = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$  wird also mit  $2n$  die Anzahl Stromwechsel in einer Secunde und mit  $T$  die Periode bezeichnet, so sind die horizontale und die verticale Schwingung der Federn durch die Formeln

$$\begin{aligned} x &= A \sin 2pt & 1) \\ y &= B \sin (2pt - 2\varphi) & 2) \end{aligned}$$

gegeben, in welchen  $A$  und  $B$  die Amplituden und  $t$  die Zeit bedeuten. Die beiden Schwingungscomponenten geben für die Phasendifferenz  $2\varphi = 0^\circ$  eine in Fig. 4 dargestellte geradlinige Schwingung  $GG$ , deren Lage die erste Nullage heissen soll. Diese geradlinige Schwingung übergeht bei zunehmender Phasendifferenz in eine elliptische Schwingungscurve, die im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Bei wachsender Phasendifferenz dreht sich die Ellipse mit ihrer längeren Axe gegen die positive Ordinatenaxe, fällt mit derselben bei  $90^\circ$  Phasendifferenz zusammen, dreht sich bei weiter zunehmender Phasendifferenz im nächsten Quadranten in der Richtung gegen die negative

Abscissenaxe und übergeht bei  $180^\circ$  Phasendifferenz wieder in eine geradlinige Schwingung  $G'G'$ , deren Lage die zweite Nulllage heissen soll. Bei weiterer Zunahme der Phasendifferenz wird die resultierende Schwingung wieder elliptisch, erfolgt aber von nun an entgegen dem Sinne des Uhrzeigers und die Axe der Ellipse nähert sich in entgegengesetzter Richtung abermals der positiven Ordinatenaxe, fällt mit derselben bei  $270^\circ$  Phasendifferenz zusammen, dreht sich bei weiter zunehmender Phasendifferenz gegen die erste Nulllage  $GG$  und erreicht dieselbe bei  $360^\circ$  Phasendifferenz, wobei die elliptische Schwingung wieder in eine geradlinige übergeht.

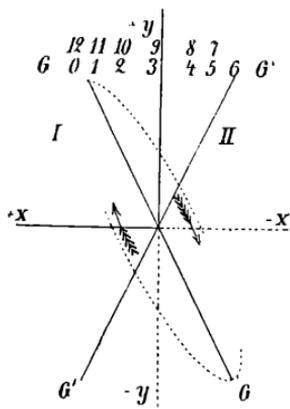


Fig. 4.

In Fig. 4 ist die resultierende Schwingung der Componenten

$$x = 0,5 \sin 2pt,$$

$$y = \sin (2pt - 30^\circ)$$

dargestellt. Der Endpunkt der längeren Axe der Ellipse fällt bei einer Phasendifferenz von  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$   $330^\circ$  und  $360^\circ$  nacheinander mit den Punkten 1, 2, 3, 11 und 12 zusammen.

Aus dem Gesagten folgt, dass die elliptische Schwingungscurve entweder links von der positiven Ordinatenaxe, im Quadranten der ersten Nulllage, oder rechts, im Quadranten der zweiten Nulllage, liegen kann: links für Phasendifferenzen der Schwingungscomponenten von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  und von  $270^\circ$  bis  $360^\circ$  rechts dagegen für Phasendifferenzen von  $90^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $180^\circ$  bis  $270^\circ$ .

Die elliptische Schwingungscurve hat bei einer gegebenen Phasendifferenz der Schwingungscomponenten eine bestimmte Lage und schneidet von der Abscissen- und Ordinatenaxe die Längen  $2a$  und  $2b$  ab, deren Grösse von der betreffenden Amplitude und der Phasendifferenz der Wechselströme abhängt. Diese Abhängigkeit ergibt sich aus den Ausdrücken 1) und 2); man erhält

$$\begin{aligned} \text{für } t = 0, \quad x = 0, \quad y = -b = B \sin(-2\varphi), \\ \text{für } t = \frac{\pi}{2p}, \quad x = 0, \quad y = +b = B \sin(\pi - 2\varphi), \end{aligned}$$

somit in beiden Fällen

$$\sin 2\varphi = \frac{b}{B} \quad 3)$$

und analog

$$\sin 2\varphi = \frac{a}{A}, \quad 4)$$

welche Beziehungen zunächst für alle Phasendifferenzen zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  gelten.

Liegt die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten im zweiten Quadranten, also zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ , so wird man setzen müssen:

$$\frac{b}{B} = \sin(180^\circ - 2\varphi). \quad 5)$$

Bei Phasendifferenzen im dritten und vierten Quadranten ist noch zu berücksichtigen, dass  $b$  sein Zeichen ändert und somit zu setzen ist im dritten Quadranten

$$\frac{b}{B} = \sin(2\varphi - 180^\circ) \quad 6)$$

und im vierten Quadranten

$$\frac{b}{B} = \sin(360^\circ - 2\varphi). \quad 7)$$

Aus dem Gesagten ist zu ersehen, dass es möglich ist, mit Hilfe von Schwingungscurven die Phasendifferenz  $\varphi$  der Wechselströme zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wird man entweder den Abschnitt  $b$  der Ordinatenaxe und die Amplitude  $B$  oder die analogen Längen  $a$  und  $A$  messen und aus dem Verhältnisse derselben  $\varphi$  nach einer von den obigen Formeln 3), 5), 6), 7) berechnen.

Zur leichteren Messung der Längen  $b$  und  $B$  werden auf einem Projectionsschirme zwei gekreuzte und auf einander

senkrecht stehende Centimeterscalen angebracht und an denselben der innerhalb der Ellipse liegende Abschnitt der Ordinatenaxe  $2b$  und die Höhe der Ellipse  $2B$  unmittelbar abgelesen. Dabei muss die elliptische Schwingungcurve zu dem Kreuzungspunkte der Scalen symmetrisch liegen, und ausserdem müssen die beiden Schwingungscomponenten, wenn dieselben einzeln erregt werden, genau parallel zu den betreffenden Scalenrichtungen erfolgen.

Es muss hier noch bemerkt werden, dass aus der Schwingungcurve nicht entnommen werden kann, wann die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten im ersten oder vierten, beziehungsweise im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Dies könnte nur dann der Fall sein, wenn die Rotationsrichtung der Lichtcurve wahrgenommen werden könnte, was jedoch nicht möglich ist; es lässt sich absolut nicht unterscheiden, in welchem Sinne die elliptische Schwingung erfolgt. Es muss daher anderweitig bekannt sein, in welchem Quadranten die Phasendifferenz der Wechselströme liegen muss, und dementsprechend wird man im Quadranten der ersten Nullage zwischen den Formeln

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B} \quad \text{und} \quad \varphi = \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B}$$

und im Quadranten der zweiten Nullage zwischen den Formeln

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B}$$

zu wählen haben.

Die erste Nullage der resultirenden Schwingung lässt sich dagegen leicht experimentell in der Weise bestimmen, dass man die hintereinander geschalteten Elektromagnete des Phasenindicators mit dem Wechselstrom erregt und die Lage der resultirenden Schwingungcurve beobachtet. Noch einfacher lässt sich der Quadrant der ersten Nullage dadurch ermitteln, dass man die Ablenkung des Lichtbildes beobachtet, wenn beide Federn an die Eisenkerne der Elektromagnete angedrückt werden.

### Objective Darstellung der Schwingungscurven.

Bei allen Versuchen, die weiter mitgetheilt werden sollen, wurden die Schwingungscurven auf einem mit gekreuzter Centimeterscala versehenen, vom Phasenindicator ungefähr 3 *m* weit entfernten Schirme in der in Fig. 5 angedeuteten Weise projectirt und zu diesem Zwecke ein paralleles Strahlenbündel von einer elektrischen Lampe verwendet. Das auf dem Schirme mit

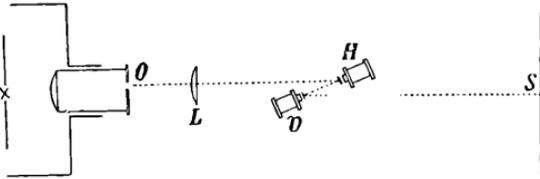


Fig.

der Linse *L* entworfene Bild der Öffnung, von welcher das Strahlenbündel kam, war eine scharf begrenzte runde Lichtscheibe von ungefähr 1 *cm* Durchmesser, infolge dessen die in Fig. 7 dargestellte Schwingungcurve aus einem ebenso breiten Lichtband bestand. Der Projectionsschirm wurde durch Ver-

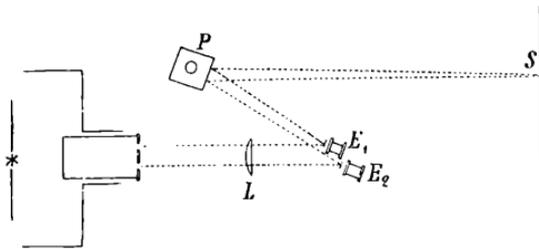


Fig. 6.

schiebung so eingestellt, dass auf der horizontalen Scala beiderseits vom Kreuzungspunkte durch den äusseren Rand der Lichtcurve links und durch den inneren Rand derselben rechts gleiche Stücke begrenzt wurden und dieselbe Symmetrie der Lichtcurve auch bezüglich der verticalen Scala erreicht wurde.

Nach dieser Justirung des Schirmes wurde im geeigneten Momente wiederholt der Abschnitt *2b* auf der verticalen Centimeterscala abgelesen und abwechselnd die Höhe *2B* der elliptischen Schwingungcurve (Fig. 7) in der Weise bestimmt, dass

die tiefste Stelle des äusseren und die höchste Stelle des inneren Randes der Lichtcurve auf dem Schirme mit Bleistift bezeichnet und dann auf die verticale Scala projicirt wurden. Oft bediente ich mich zur Bestimmung der Höhe  $2B$  eines Blattes Papier mit vielen parallel gezogenen geraden Linien. Dieser Hilfschirm wurde auf dem Projectionsschirme so eingestellt, dass die erste Linie, bei Parallelstellung derselben zur horizontalen Scala, die höchste Stelle des inneren Randes der Lichtcurve berührte, worauf die tiefste Stelle des äusseren Randes der Lichtcurve markirt wurde. Der Abstand dieser Stelle von der ersten Linie in Centimetern gemessen gibt die Höhe der Schwingungcurve.

Dass die Messung von  $2b$  und  $2B$  in der angedeuteten Weise vorgenommen werden muss, ergibt sich aus der einfachen Überlegung, dass bei der schwingenden Bewegung eines ausgedehnten Lichtbildes der

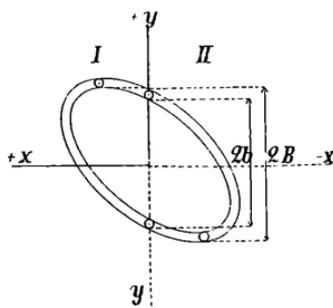


Fig. 7.

Weg zu messen ist, den ein und derselbe Punkt des Lichtbildes in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Es ist daher selbstverständlich, dass die genannten Längen auch von Mitte zur Mitte der bandförmigen Lichtcurve gemessen werden können.

Will man die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten, beziehungsweise der Wechselströme nicht messen, sondern direct beobachten, so kann dieselbe in der in Fig. 6 angedeuteten Weise objectiv dargestellt werden. Aus zwei runden kleinen Öffnungen der elektrischen Lampe fallen zwei parallele Strahlenbündel auf die Spiegel des Phasenindicators und werden nach ihrer Reflexion von denselben und dem Polygonalspiegel  $P$  durch die Linse  $L$  auf dem Projectionsschirme zu zwei Lichtbildern vereinigt. Durch Drehung eines der beiden Elektromagnete des Phasenindicators um die verticale Axe werden die Bilder zum Decken gebracht. Die beiden Federn des Phasenindicators sind in diesem Falle für verticale Schwingungen eingestellt und geben daher im schwingenden Zustande nur eine einzige verticale Lichtlinie, welche durch Drehung des Polygonalspiegels analysirt werden kann und zwei in der Phase

gegeneinander verschobene Sinuslinien gibt. In dieser Weise lässt sich mit dem Phasenindicator die Wirkung der Selbstinduction auf Wechselströme demonstrieren, wenn man in einem von zwei Stromzweigen die Selbstinduction durch Hineinschieben eines entsprechend grossen Eisenkernes in eine Drahtspule ändert.

### Messung der Phasendifferenz verzweigter Wechselströme.

Mit dem beschriebenen Phasenindicator wurde nach der Lissajous'schen Schwingungsmethode zunächst eine Reihe von Messungen der Phasendifferenz zwischen verzweigten Wechselströmen ausgeführt und zu diesem Zwecke eine Normalrolle von bekanntem Selbstinductionscoefficienten verwendet, aus welchem die Phasendifferenz auch berechnet werden konnte. Bei diesen Versuchen bildeten die Normalrolle und eine Spule des Phasenindicators den einen Stromzweig, während in dem zweiten Stromkreise 12 parallel geschaltete Glühlampen von je 100 Volt und die zweite Spule des Phasenindicators eingeschaltet waren.

Die verwendete Normalrolle wurde in einer früheren Abhandlung beschrieben<sup>1</sup> und hatte 16 Lagen von je 17, zusammen 272 Windungen von 23·634 *cm* mittlerem Radius eines 0·11765 *cm* dicken, gut isolirten Kupferdrahtes von 8·71  $\Omega$  Widerstand bei 20° C. Für den Selbstinductionscoefficienten dieser Rolle wurde nach der Maxwell-Stefan'schen Formel der Werth 0·077295

10<sup>9</sup> *cm* berechnet und ausserdem experimentell nach zwei Methoden ein etwas grösserer Mittelwerth 0·08077  $\times$  10<sup>9</sup> *cm* gefunden.

Zur Berechnung der Phasendifferenz aus der Selbstinduction der Normalrolle diente die bekannte Formel

$$\tan \varphi = p \frac{L_2 r_1 - L_1 r_2}{r_1 r_2 + p^2 L_1 L_2}, \quad 8)$$

in welcher  $p$  die Periodicität der beiden Wechselströme,  $r_1 r_2$  die Ohm'schen Widerstände und  $L_1 L_2$  die Selbstinductionscoefficienten der Stromzweige bedeuten. Aus dieser Formel ist

<sup>1</sup> Diese Sitzungsber., 1891, Bd. 100, S. 332.

zu ersehen, dass zur Berechnung der Phasendifferenz ausser dem Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle die Selbstinductionscoëfficienten der Spulen des Phasenindicators bekannt sein müssen. Die letzteren wurden mit dem Phasenindicator selbst in folgender Weise bestimmt.

Da beide Spulen des Phasenindicators gleich gross sind und gleich viele Windungen haben, so kann angenommen werden, dass sie auch gleiche Selbstinductionscoëfficienten  $\lambda$  haben. Setzt man nun in die obige Formel  $L_1 = L_2 = \lambda$ , so ergibt sich

$$\tan \varphi = p \frac{(r_1 - r_2)\lambda}{r_1 r_2 + p^2 \lambda^2} \quad (9)$$

und wenn wegen der Kleinheit von  $\lambda$  das quadratische Glied  $p^2 \lambda^2$  gegen  $r_1 r_2$  vernachlässigt wird,

$$\tan \varphi = \frac{p(r_1 - r_2)\lambda}{r_1 r_2} \quad (10)$$

Nach der Gleichung 10) lässt sich aus der mit dem Phasenindicator beobachteten Phasendifferenz  $\varphi$  der Selbstinductionscoëfficient  $\lambda$  angenähert bestimmen. Die Gleichung 9) liefert für  $\lambda$  zwei Werthe:

$$\lambda = \frac{r_1 - r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - 4 r_1 r_2 \tan^2 \varphi}}{2 p \tan \varphi},$$

von denen der mit dem Näherungswerthe von  $\lambda$  besser übereinstimmende Werth der richtige sein wird.

Zur Bestimmung von  $\lambda$  wurden die beiden Spulen des Phasenindicators in Parallelschaltung mit verzweigten Wechselströmen erregt. Da beide Stromzweige gleiche Widerstände hatten, so wurde als resultirende Schwingung, wie zu erwarten war, eine gerade Linie in der ersten Nullage erhalten. Nach Zuschaltung eines inductionlosen Widerstandes von  $0 \cdot 208 \Omega$  in einem der beiden Stromzweige verwandelte sich dagegen die gerade Linie in eine Ellipse mit den Abmessungen  $2b = 25 \text{ mm}$ ,  $2B = 76 \text{ mm}$ . Es ist daher

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 32895 = \sin 2\varphi$$

$$2\varphi = 19^\circ 2$$

$$\varphi = 9^\circ 6$$

$$\tan \varphi = 0 \cdot 169137$$

Während dieses Versuches machte die sechspolige Wechselstrommaschine 1026 Touren in einer Minute, daher war die Periodicität  $p = 322 \cdot 3$ ; die Widerstände der beiden Stromzweige waren:

$$r_1 = 0 \cdot 3326 \Omega$$

$$r_2 = 0 \cdot 5326 \Omega$$

Mit diesen Werthen erhält man nach 10) den angenäherten Werth

$$0 \cdot 00047 \times 10^9 \text{ cm}$$

und nach Gleichung 9) die Werthe:

$$0 \cdot 00055 \times 10^9 \text{ cm}$$

und

$$0 \cdot 00312 \times 10^9 \text{ cm},$$

von denen der erstere der richtige sein wird.

Der Controle halber wurde der Selbstinductionscoefficient der beiden Spulen des Phasenindicators auch nach der Rayleigh'schen Brückenmethode mit einem ballistischen Galvanometer, das eine Schwingungsdauer  $T = 7 \cdot 67$  Secunden hatte, bestimmt und für beide hintereinander geschaltete Spulen der Werth

$$0 \cdot 00114 \times 10^9 \text{ cm}$$

erhalten. Es ist daher der Selbstinductionscoefficient einer Spule

$$\lambda = 0 \cdot 00057 \times 10^9 \text{ cm},$$

welcher nur um  $3 \cdot 5\%$  grösser ist als der aus der beobachteten Phasendifferenz berechnete Werth

$$0 \cdot 00055 \times 10^9 \text{ cm}.$$

Dieser Unterschied könnte auch damit erklärt werden, dass nach der Rayleigh'schen Messungsmethode nur schwache

Ströme verwendet wurden, während die Elektromagnete des Phasenindicators bei der Bestimmung der Phasendifferenz mit Strömen von ungefähr 1 Ampère erregt wurden.

Es sei noch bemerkt, dass das quadratische Glied  $p^2\lambda^2$  durch zwei Beobachtungen eliminirt werden könnte, wenn es möglich wäre, die Tourenzahl der Wechselstrommaschine innerhalb entsprechender Grenzen zu ändern. In diesem Falle wäre die Selbstinduction der Elektromagnete des Phasenindicators durch den Ausdruck

$$\lambda = \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_1 p_2} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \frac{\tan \varphi_1 \tan \varphi_2}{p_2 \tan \varphi_2 - p_1 \tan \varphi_1}. \quad (11)$$

bestimmt.

Hier folgen die Resultate der Messungen, welche mit der Normalrolle ausgeführt wurden. Bei diesen war die Selbstinduction des einen Stromzweiges, in welchem die Normalrolle und ein Elektromagnet des Phasenindicators eingeschaltet waren,

$$L_2 = 0.077845 \times 10^9 \text{ cm}$$

und die Selbstinduction des zweiten Stromzweiges

$$L_1 = 0.00055 \times 10^9 \text{ cm}.$$

Die Widerstände der beiden Zweige waren

$$r_2 = 9.535 \Omega$$

$$r_1 = 28.000 \Omega$$

Bei der Periodicität des Wechselstromes  $p = 319.5$  lag die elliptische Schwingungcurve im Quadranten der zweiten Nullage, und ihre Abmessungen waren:

$$2b = 8.6 \text{ cm}$$

$$2B = 13.0 \text{ cm}$$

In Berücksichtigung, dass die Phasendifferenz der beiden Zweigströme höchstens  $90^\circ$  betragen kann, somit die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten im zweiten Quadranten liegen muss, wird in diesem Falle zu setzen sein:

$$\frac{b}{B} = 0.6615 = \sin(180^\circ - 2\varphi)$$

$$180^\circ - 2\varphi = 41^\circ 42'$$

$$2\varphi = 138.58$$

$$\varphi = 69.29.$$

Mit Zugrundelegung des theoretischen Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle erhält man nach den Formeln

$$\tan \varphi_2 = \frac{pL_2}{r_2}, \quad \tan \varphi_1 = \frac{pL_1}{r_1}$$

die Werthe:

$$\varphi_2 = 69^\circ 02'$$

$$\varphi_1 = 0.36,$$

somit

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 68^\circ 66'.$$

Wird aber bei der Berechnung für den Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle der experimentell bestimmte Mittelwerth  $0.08077 \cdot 10^9 \text{ cm}$  gesetzt, so findet man für die Phasendifferenz den Werth:

$$\varphi = 69^\circ 49',$$

welcher mit dem aus den Abmessungen der Schwingungscurve berechneten Werthe bis auf  $0.3\%$  übereinstimmt. Die aus dem theoretischen Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle berechnete Phasendifferenz  $68^\circ 66'$  stimmt dagegen mit  $69^\circ 29'$  nur bis auf  $0.9\%$  überein.

Der Versuch mit der Normalrolle wurde bei derselben Anordnung wiederholt und dabei die Klemmenspannung an den Verzweigungspunkten mit dem Cardew'schen Voltmeter, die unverzweigte Stromstärke mit einem Siemens'schen Elektrodynamometer gemessen. Es war

$$e = 37 \text{ Volt}$$

$$i = 1.42 \text{ Ampère}$$

$$r_1 = 26.01 \Omega$$

$$r_2 = 9.622 \Omega$$

$$L_1 = 0.00055 \times 10^9 \text{ cm}$$

$$L_2 = 0.077845 \times 10^9 \text{ cm}$$

$$2n = 101.1$$

$$p = 317.6$$

Die elliptische Schwingungscurve lag wieder im Quadranten der zweiten Nullage, und für das Verhältniss ihrer Abmessungen wurde als Mittelwerth aus fünf Beobachtungen erhalten:

$$\frac{b}{B} = 0.6928.$$

Die Berechnung der Phasendifferenz der beiden Stromzweige aus den Abmessungen der Schwingungscurve, aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle liefert folgende Werthe:

$$\varphi = 68^{\circ}07, 68^{\circ}36, 69^{\circ}21.$$

Die voranstehenden Messungen wurden durch ziemlich starke Schwankungen der Lichtcurve erschwert, welche zum Theil durch mechanische Erschütterungen der rotirenden Feldmagnete der Wechselstrommaschine, zum Theil durch Funkenbildung am Commutator der Selbsterregung der Wechselstrommaschine verursacht wurden. Die Axe der Maschine wurde daher mit einem neuen Stelling versehen und die Feldmagnete bei allen nachfolgenden Messungen von aussen mit Gleichstrom erregt, der einer Dynamomaschine entnommen wurde. Die Schwankungen der Lichtcurve wurden dadurch grösstentheils beseitigt.

Die Wiederholung der Messungen ergab folgende Resultate

$$\begin{aligned} r_1 &= 9.62 \Omega \\ r_2 &= 27.70 \Omega \\ 2n &= 102.6 \end{aligned}$$

und als Mittel aus 11 Beobachtungen

$$\frac{b}{B} = 0.6237$$

Aus diesem Verhältnisse der Abmessungen der Schwingungscurve, aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle ergibt die Rechnung für die Phasendifferenz der Stromzweige die Werthe:

$$\varphi = 70^{\circ}66, 68^{\circ}66, 69^{\circ}49.$$

Zum Vergleich sind nachstehend die Resultate der drei Versuche mit der Normalrolle und ihre Mittelwerthe zusammengestellt:

69°29	68°66	69°49	$2n = 101\cdot7$
68·07	68·36	69·21	101·1
<u>70·66</u>	<u>68·66</u>	<u>69·49</u>	<u>102·6</u>
69°34	68°56	69°40	101°8

Aus dieser Zusammenstellung ist zu ersehen, dass der aus dem experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten berechnete Mittelwerth der Phasendifferenz 69°4 mit dem Mittelwerthe 69°34, der mit dem Phasenindicator erhalten wurde, bis auf 0·1% übereinstimmt, während der aus dem theoretischen Selbstinductionscoëfficienten berechnete Mittelwerth 68°56 nur eine Übereinstimmung bis auf 1·1% zeigt.

#### Bestimmung der Phasendifferenz der Zweigströme mit Hilfe eines Elektrodynamometers.

Die Phasendifferenz verzweigter Wechselströme wurde mit dem Phasenindicator und zur Controlle auch mit einem Elektrodynamometer für schwache Ströme in der Weise gemessen,

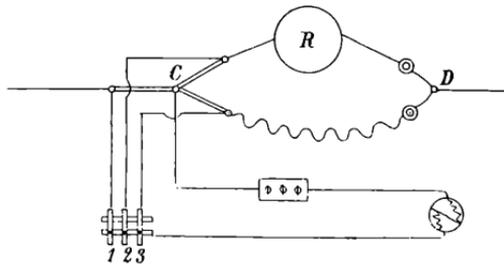


Fig. 8.

dass mit dem letzteren die Potentialdifferenzen an den Enden von drei ganz gleichen inductionslosen Widerständen im Hauptstromkreise und in den Verzweigungen bestimmt wurden. Die Anordnung der Apparate bei diesem Versuche ist aus Fig. 8 ersichtlich.

Die drei im Verzweigungspunkte C zusammenstossenden Hilfswiderstände von je  $1\cdot36\ \Omega$  bei  $20^\circ\text{C}$ . bestanden aus bifilar gespannten Neusilberdrähten. Der Widerstand des die Normal-

rolle enthaltenden Stromzweiges wurde unmittelbar nach dem Versuche mit einem Differentialgalvanometer gemessen und war

$$r_2 = 10 \cdot 95 \Omega.$$

Der Widerstand des zweiten aus bifilar gespannten Neusilberdrähten bestehenden Stromzweiges war

$$r_1 = 33 \cdot 96 \Omega.$$

Die Selbstinductionscoëfficienten der beiden Stromzweige waren, wie früher,

$$L_2 = 0 \cdot 077845 \times 10^9 \text{ cm}$$

$$L_1 = 0 \cdot 00055 \times 10^9 \text{ cm}.$$

Durch Stöpseln der verticalen Lamellen 1, 2 oder 3 konnte man die Potentialdifferenzen an den Enden der drei Hilfs-widerstände im Hauptstromkreise und in den Verzweigungen, beziehungsweise die entsprechenden Ausschläge des Elektrodynamometers  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  beobachten, welche auch den effectiven Stromstärken in den genannten Stromkreisen proportional waren. Der Widerstand im Elektrodynamometerkreise war  $1246 \Omega$ .

In dem betrachteten Falle ist, wie in einer früheren Mittheilung gezeigt wurde,<sup>1</sup> die Phasendifferenz der beiden Stromzweige durch die Beziehung

$$\cos \varphi = \frac{\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \quad (12)$$

bestimmt.

Der Phasenindicator zeigte wieder eine elliptische Schwingungscurve im Quadranten der zweiten Nullage, und fünf Messungen ergaben für  $\frac{b}{B}$  den Mittelwerth

$$0 \cdot 69646.$$

Unmittelbar nach diesem Versuche wurden die Ausschläge des Elektrodynamometers  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  mit Fernrohr und einer vom Elektrodynamometer  $3 \text{ m}$  weit entfernten Millimeterscala beobachtet und für dieselben folgende Werthe erhalten:

<sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 102, Abth. II. a, 1893.

	105 5	46·6	30·2
	105 5	47·0	30·3
	106·0	47·1	31·0
Mittel	105·7	46·9	31·5

Während der Messungen mit dem Phasenindicator und dem Elektrodynamometer machte die Wechselstrommaschine 1027, 1038, 1030, im Mittel 1032 Touren in einer Minute; es war also

$$2n = 103 \text{ 2.}$$

Für die Phasendifferenz der beiden Zweigströme erhält man aus den Beobachtungen mit dem Phasenindicator

$$\varphi = 67^{\circ}93$$

und aus den Ablesungen am Elektrodynamometer nach Gleichung 12)

$$\varphi = 68^{\circ}03,$$

welche Werthe eine sehr gute Übereinstimmung zeigen.

Die Berechnung der Phasendifferenz aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle liefert etwas kleinere Werthe

$$\varphi = 66^{\circ}25$$

und

$$\varphi = 67^{\circ}15,$$

von denen der letztere auch in diesem Falle mit dem aus den Abmessungen der Schwingungscurve berechneten etwas besser übereinstimmt.

Es sei noch bemerkt, dass bei diesen Versuchen gemessen wurde

$$e = 29 \text{ V}$$

$$i_1 = 0\cdot853 \text{ A.}$$

### **Messung der Phasendifferenz beim veränderlichen Widerstande des einen der beiden Stromzweige.**

Bei diesen Versuchen enthielt der eine Stromzweig acht parallel geschaltete Glühlampen und eine Spule des Phasen-

indicators, der zweite Stromzweig die zweite Spule des Phasenindicators, die Normalrolle und einen inductionslosen Widerstand, der aus mehreren circa 3 m langen bifilar gespannten Neusilberdrähten von solcher Dicke bestand, dass derselbe durch die verwendeten Ströme nicht merklich erwärmt wurde.

Nachstehend sind die Widerstände des die Normalrolle enthaltenden Stromzweiges  $r_2$  und die entsprechenden, aus je drei Beobachtungen gewonnenen Mittelwerthe des Verhältnisses der Abmessungen  $b$  und  $B$  zusammengestellt

Versuch 1.	$r_2 = 9.77 \Omega,$	$\frac{b}{B} = 0.65422$
	15.39	0.86056
3.	26.29	1.00000
4.	36.31	0.92274
5.	42.08	0.86943
6.	58.20	0.76545

Bei den Versuchen 1 und 2 lag die elliptische Schwingungscurve mit der längeren Axe im Quadranten der zweiten Nulllage, beim Versuche 3 fiel diese Axe mit der verticalen Scala zusammen, und die Ellipse verwandelte sich bei gleichen Schwingungsamplituden in einen Kreis; bei den Versuchen 4, 5 und 6 lag dagegen die Ellipse mit ihrer grösseren Axe im Quadranten der ersten Nulllage.

Während dieser Versuche machte die Wechselstrommaschine im Mittel 1030 Touren in einer Minute, es war somit  $2n = 103$  und  $p = 323.6$ .

Nachstehend folgen die Widerstände und die entsprechenden, aus  $\frac{b}{B}$  berechneten Werthe der Phasendifferenz der beiden Stromzweige.

$r_2 = 9.77 \Omega$	$180 - 2\varphi = 40^\circ 87$	$\varphi = 69^\circ 57$
15.39	$180 - 2\varphi = 59.39$	60.31
26.29	$2\varphi = 90.00$	45.00
36.31	$2\varphi = 67.33$	33.67
42.08	$2\varphi = 60.38$	30.19
58.20	$2\varphi = 49.95$	24.98

Weiter sind diese Phasendifferenzen  $\varphi$  mit den aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle bestimmten Werthen  $\varphi'$  und  $\varphi''$  und die Differenzen  $\varphi - \varphi'$  und  $\varphi - \varphi''$  zusammengestellt.

		$\varphi - \varphi'$		$\varphi - \varphi''$
69°57	68°47	+1°10	69°30	+0°27
60·31	58·24	+2·07	59·34	+0·97
45·00	43·44	+1·56	44·68	+0·32
33·67	34·40	-0·73	35·60	-1·93
30·19	30·57	-0·38	31·68	-0·49
24·98	23·07	+1·91	23·98	+1·00

Auch hier ist die bessere Übereinstimmung der Werthe  $\varphi''$  mit  $\varphi$  nicht zu verkennen.

Die mit dem Phasenindicator erhaltenen Werthe  $\varphi$  können dazu benützt werden, um aus denselben den Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle nach der Formel

$$L = \frac{r_2 \tan(\varphi + \varphi_1)}{p} - \lambda \quad (13)$$

zu berechnen. Mit Benützung der Werthe

$$\lambda = 0\cdot00055 \times 10^9 \text{ cm}$$

$$p = 323\cdot6$$

$$r_1 = 30 \Omega$$

$$\varphi_1 = 0^\circ 34$$

gibt die Rechnung folgende Werthe für  $L$ :

$\varphi = 69^\circ 57$	$L = 0\cdot0820 \text{ Q.}$
60·31	840
45·00	817
33·67	751
30·19	761
24·98	845
	Mittel 0·0806 Q.

Der letzte Mittelwerth stimmt mit dem experimentell bestimmten Werthe 0·08077 Q. bis auf  $\frac{1}{4}$  Procent überein.

### Versuche mit einer zweispuligen Normalrolle.

Es wurde mit dem Phasenindicator auch die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome in einer zweispuligen Normalrolle gemessen, welche im Physikalischen Cabinete angefertigt und 1891 von Herrn Dr. Sahulka in einer Abhandlung beschrieben wurde.<sup>1</sup> Die Normalrolle besteht aus zwei gleichen Spulen von  $24\cdot07\text{ cm}$  mittlerem Radius und je 561 Windungen eines  $0\cdot636\text{ mm}$  dicken, gut isolirten Kupferdrahtes. Der Abstand der Mittelpunkte der beiden Spulen beträgt  $5\cdot008\text{ cm}$  und die Widerstände derselben bei  $20^\circ\text{ C.}$  sind  $39\cdot24\ \Omega$  und  $40\cdot23\ \Omega$ .

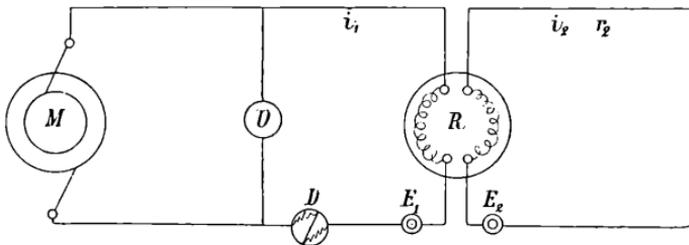


Fig. 9.

Für den Selbstinductionscoëfficienten jeder Spule ergab die Rechnung nach der Maxwell-Stefan'schen Formel den Werth

$$L = 0\cdot32583 \times 10^9\text{ cm},$$

während die Messungen des Herrn Dr. Sahulka einen etwas grösseren Mittelwerth

$$L = 0\cdot33657 \times 10^9\text{ cm}.$$

lieferten.

Fig. 9 zeigt die Anordnung der Apparate:  $M$  ist eine Wechselstrommaschine,  $V$  ein Hummel'sches Voltmeter,  $D$  ein Siemens'sches Elektrodynamometer für starke Ströme,  $R$  die zweispulige Normalrolle,  $E_1$ ,  $E_2$  die beiden Elektromagnete des Phasenindicators. Bei den weiter folgenden Versuchen wurde gemessen:  $e_1$  die Klemmenspannung und  $i_1$  die Stromstärke des

Sahulka, Bestimmung der Coëfficienten der Selbstinduction und gegenseitigen Induction mit dem Differentialgalvanometer. Elektrotechnische Zeitschrift, 1891, Heft 28, S. 371.

primären Stromkreises,  $r_2$  Widerstand des secundären Stromkreises im warmen Zustande unmittelbar nach den Versuchen,  $N$  die Tourenzahl der Wechselstrommaschine und die Längen  $2b$  und  $2B$  der Schwingungcurve.

Am 25. Mai wurden zwei Versuche mit folgenden Resultaten ausgeführt:

### 1. Versuch.

$$\begin{array}{ll} e_1 = 403 \text{ V} & N = 1014 \\ i_1 = 3 \cdot 63 \text{ A.} & 2n = 101 \cdot 4 \\ r_2 = 40 \cdot 527 \ \Omega & p = 318 \cdot 6 \end{array}$$

Die Schwingungcurve lag im Quadranten der ersten Nulllage, und ihre Abmessungen waren:

$$\begin{aligned} 2b &= 11 \cdot 3 \text{ cm} \\ 2B &= 17 \cdot 3 \text{ cm} \\ \frac{b}{B} &= 0 \cdot 65318 \end{aligned}$$

Nun ist hier Folgendes zu berücksichtigen. Die Theorie der Wechselwirkung zweier Stromkreise bei Anwendung harmonischer Wechselströme liefert für die Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen dem primären und secundären Stromkreise die Beziehungen:

$$\varphi = 90^\circ + \psi \quad 14)$$

$$\tan \psi = \frac{pL_2}{r_2}, \quad 15)$$

aus denen zu ersehen ist, dass, wie gross auch  $L_2$  sein mag, der Winkel  $\psi$  höchstens den Werth  $90^\circ$  erreichen kann, und die von der Selbstinduction des primären Stromkreises unabhängige Phasendifferenz  $\varphi$  im zweiten Quadranten liegen muss. Daraus folgt weiter, dass die Phasendifferenz der schwingenden Federn  $2\varphi$  im vierten Quadranten liegen muss und somit im vorliegenden Falle zu setzen ist:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 65318 &= \sin (360^\circ - 2\varphi) \\ 360^\circ - 2\varphi &= 40^\circ 78 \\ 2\varphi &= 319 \cdot 22 \\ \varphi &= 159 \cdot 61 \end{aligned}$$

## 2. Versuch.

$$2b = 11.4 \text{ cm}, \quad 2B = 18.0 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{B} = 0.63333 = \sin(360^\circ - 2\varphi)$$

$$\varphi = 160^\circ 35.$$

Beide Versuche geben den Mittelwerth:

$$\varphi = 159^\circ 98.$$

Nach den Formeln 14) und 15) erhält man mit Zugrundelegung des theoretischen Selbstinductionscoëfficienten des secundären Stromkreises:

$$\tan \psi = \frac{318.6 \times 0.32583}{40.527} = 2.5615$$

$$\psi = 68^\circ 68$$

und die Phasendifferenz

$$\varphi = 158^\circ 68.$$

Wenn dagegen für den Selbstinductionscoëfficienten  $L_2$  der experimentell bestimmte Mittelwerth gesetzt wird, so ist

$$\tan \psi = \frac{318.6 \times 0.336578}{40.527} = 2.6460$$

$$\psi = 69^\circ 3$$

und

$$\varphi = 159^\circ 3.$$

Dieser Werth stimmt mit dem Mittelwerthe, der mit dem Phasenindicator erhalten wurde, besser überein als der aus dem theoretischen Selbstinductionscoëfficienten berechnete Werth der Phasendifferenz  $\varphi = 158^\circ 68$ . Die Differenz beträgt nur  $0.4\%$ .

Es muss noch bemerkt werden, dass bei dieser Berechnung die Selbstinduction des Phasenindicators vernachlässigt wurde und dass mit Berücksichtigung derselben die Phasendifferenz im letzten Falle, statt  $159^\circ 3$ ,  $159^\circ 33$  wäre.

Am 26. Mai wurde die Spule mit dem Widerstande  $r_2 = 39.24 \Omega$  als secundäre verwendet und die Phasendifferenz der beiden Ströme bei  $e_1 = 413 \text{ V}$   $i_1 = 3.64 \text{ A}$ ,  $2n = 1017$ ,  $p = 319.5$  bestimmt. Die elliptische Schwingungscurve lag mit

ihrer grösseren Axe wieder im Quadranten der ersten Nullage, und es wurde gemessen:

$$2b = 9 \cdot 8 \text{ cm}$$

$$2B = 15 \cdot 5 \text{ cm},$$

daher

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 632258,$$

und

$$\varphi = 160^\circ 4.$$

Die Berechnung der Phasendifferenz aus der Selbstinduction des secundären Stromkreises gibt mit Zugrundelegung des theoretischen Werthes von  $L$

$$\varphi = 159^\circ 21$$

und mit dem experimentell bestimmten Selbstinductionscoefficienten

$$\varphi = 159^\circ 81.$$

Auch in diesem Falle stimmt der letzte Werth mit dem aus den Abmessungen der Schwingungcurve berechneten besser, und zwar bis auf  $0 \cdot 37\%$  überein.

Aus den Gleichungen 14) und 15) ergibt sich noch eine einfache Methode, nach welcher die Selbstinduction der Bewicklungen eines Transformators bestimmt werden kann. Zu diesem Zwecke wird zuerst die eine und dann die andere Bewicklung als secundärer Stromkreis verwendet, in beiden Fällen mit dem Phasenindicator die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome bestimmt und  $L_2$  aus den Phasendifferenzen nach der Formel

$$L_2 = \frac{r_2 \tan(\varphi - 90^\circ)}{p} \quad 16)$$

berechnet.

Aus den voranstehenden drei Versuchen erhält man für den Selbstinductionscoefficienten der Spulen der Normalrolle:

$$0 \cdot 342$$

$$0 \cdot 356$$

$$0 \cdot 345$$

---


$$\text{Mittel } 0 \cdot 348 \text{ Q.},$$

welcher Mittelwerth mit dem experimentell bestimmten bis auf  $3 \cdot 2^0\%$  übereinstimmt.

### Versuche mit einem Transformator.

Im Nachstehenden werden noch einige Messungen mitgetheilt, welche in Gemeinschaft mit meinen Schülern an einem ringförmigen Transformator von Ganz & Co. in den praktischen Übungen ausgeführt wurden.

Der für eine Leistung von 1400 Watt construirte Transformator hat eine primäre und zwei secundäre Bewicklungen aus einem  $1 \cdot 8 \text{ mm}$ , beziehungsweise  $1 \cdot 2 \text{ mm}$  dicken Kupferdrahte. Die secundären Bewicklungen können mit Hilfe einer einfachen Vorrichtung entweder serienweise oder parallel geschaltet werden. Die primäre Bewicklung hat einen Widerstand von  $1 \cdot 204 \Omega$ , die secundäre einen solchen von  $0 \cdot 0466 \Omega$  bei Hintereinanderschaltung der beiden Spulen und bei  $20^\circ \text{ C}$ . Das Umsetzungsverhältniss des Transformators bei Hintereinanderschaltung der secundären Spulen ist 6.

Bei den Messungen war in den primären und secundären Stromkreis je eine Spule des Phasenindicators eingeschaltet, und der Gesamtwiderstand des secundären Stromkreises war  $2 \cdot 2844 \Omega$ .

Es wurde gemessen: die Klemmenspannung des primären Stromkreises  $e$  mit dem Cardew'schen Voltmeter, die Tourenzahl der Wechselstrommaschine  $N$  in einer Minute und die Längen  $2b$  und  $2B$  und diese Messungen ergaben folgende Werthe.

$$e = 29 \text{ V}$$

$$N = 1016$$

$$2b = 20 \text{ cm}$$

$$2B = 35 \text{ cm},$$

somit

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 57143.$$

Die Schwingungcurve lag mit ihrer grösseren Axe im Quadranten der ersten Nullage. Aus diesem und dem bereits auf S. 836 mitgetheilten Grunde muss daher gesetzt werden:

$$0.57143 = \sin(360^\circ - 2\varphi),$$

$$\varphi = 162^\circ 58'.$$

Die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Stromkreise lässt sich aber, wie bereits oben dargelegt wurde, aus dem Selbstinductionscoefficienten der secundären Bewicklung nach den Formeln 14) und 15) berechnen.

Im vorliegenden Falle wurde der Selbstinductionscoefficient der secundären Bewicklung des Transformators nach einer von Prof. Ferraris zuerst angewendeten Methode aus dem Verhältnisse der effectiven Stromstärken des primären und secundären Stromkreises, jedoch mit dem Unterschiede bestimmt, dass zur indirecten Messung der Ströme nicht ein Elektrometer, sondern ein Siemens'sches Elektrodynamometer für schwache Ströme mit dem Selbstinductionscoefficienten  $l = 0.4436 \times 10^9 \text{ cm}$  und Widerstand  $\rho = 302.2 \Omega$  benützt wurde. Die zu diesem Zwecke im primären und secundären Stromkreise eingeschalteten inductionlosen Widerstände, an deren Enden die Potentialdifferenzen gemessen wurden, waren  $\rho_1 = 1.36 \Omega$  und  $\rho_2 = 0.2 \Omega$ .

Die Theorie der Wechselwirkung zweier Stromkreise mit gegenseitiger Induction liefert bei Anwendung harmonischer Wechselströme, wenn mit  $J_1 J_2$  die maximale, mit  $i' i''$  die effective primäre, beziehungsweise secundäre Stromstärke, mit  $L_2$  der Selbstinductionscoefficient des secundären Stromkreises und mit  $M$  die gegenseitige Induction der beiden Stromkreise bezeichnet wird, die bekannte Beziehung

$$\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^2 = \left(\frac{i'}{i''}\right)^2 = \frac{r_2 + p^2 L_2^2}{p^2 M^2}. \quad (17)$$

Diese Beziehung gestattet, wenn das Verhältniss der effectiven Stromstärken bei zwei oder mehreren Werthen des Widerstandes  $r_2$  des secundären Stromkreises gemessen wird, sowohl  $M$  als  $L_2$  zu berechnen.

Betreffend die Anwendung des Elektrodynamometers zur Messung der Potentialdifferenzen muss hier jedoch Folgendes bemerkt werden. Wenn ein Elektrodynamometer mit dem Widerstande  $\rho$  und Selbstinduction  $l$  in einer Zweigleitung an zwei

Punkte des Hauptkreises angelegt wird, zwischen denen sich ein Widerstand  $\rho_1$  befindet, so ist die unverzweigte effective Stromstärke  $i'$  des primären Stromkreises durch den Ausdruck

$$i'^2 = A^2 \alpha_1 \left( \frac{\rho + \rho_1}{\rho_1} \right)^2 \left[ 1 + \frac{p^2 l^2}{(\rho + \rho_1)^2} \right]$$

gegeben, in welchem  $A$  den Reductionsfactor und  $\alpha_1$  den Ausschlag des Elektrodynamometers bezeichnet. Für den secundären Stromkreis ist analog:

$$i''^2 = A^2 \alpha_2 \left( \frac{\rho + \rho_2}{\rho_2} \right)^2 \left[ 1 + \frac{p^2 l^2}{(\rho + \rho_2)^2} \right],$$

daher

$$\left( \frac{i'}{i''} \right)^2 = \frac{1}{m^2} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (18)$$

worin der Kürze halber

$$m^2 = \frac{(\rho + \rho_2)^2 + p^2 l^2}{(\rho + \rho_1)^2 + p^2 l^2}$$

gesetzt wurde.

Nach Einsetzung des unter 18) stehenden Ausdruckes in die Gleichung 17) erhält man:

$$\left( \frac{1}{m} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_2^2 + p^2 L_2^2}{p^2 M^2},$$

oder, wenn der Einfachheit halber gesetzt wird,

$$\left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{m}{pM} \right)^2 = a, \quad \left( \frac{\rho_1 m L_2}{\rho_2 M} \right)^2 = b, \quad (19)$$

die Beziehung

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = a r_2^2 + b. \quad (20)$$

Durch Beobachtung des Verhältnisses  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  bei zwei oder mehreren verschiedenen Werthen des Widerstandes  $r_2$  können die Constanten  $a$  und  $b$  und aus den letzteren  $L_2$  und  $M$  nach den Formeln

$$L_2 = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{und} \quad M = \frac{m \rho_1}{p \rho_2 \sqrt{a}} \quad (21)$$

berechnet werden.

Nachstehend folgen die Ergebnisse der diesbezüglichen Messungen:  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind Mittelwerthe aus je drei Beobachtungen und bedeuten Ausschläge des Elektrodynamometers, welche mit Fernrohr an einer 3 m weit entfernten Millimeter-scala beobachtet wurden und  $r_2$  sind die zugehörigen Widerstände des secundären Stromkreises.

			$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$
2 · 1194 $\Omega$	113 · 35	92 · 65	1 · 223
3 · 8594	43 · 90	30 · 00	1 463

Die Berechnung dieser Beobachtungen nach den Formeln 20) und 21) gibt folgende Werthe:

$$\begin{aligned} a &= 0 \cdot 023059 \\ b &= 1 \cdot 11942 \\ M &= 0 \cdot 13976 \times 10^9 \text{ cm} \\ L_2 &= 0 \cdot 02184 \times 10^9 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Nun lässt sich, wie bereits oben dargelegt wurde, aus dem Selbstinductionscoëfficienten des secundären Stromkreises die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome in der bekannten Weise berechnen.

In Berücksichtigung, dass beim Einschalten des Phasen-indicators die Selbstinduction des secundären Stromkreises um  $0 \cdot 00055 \times 10^9 \text{ cm}$  erhöht wurde, erhält man

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{319 \cdot 2 \times 0 \cdot 02238}{2 \cdot 2844} = 3 \cdot 1247 \\ \psi &= 72^\circ 25' \end{aligned}$$

und somit die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome

$$\varphi = 162^\circ 25',$$

welcher Werth nur um  $0 \cdot 1\%$  kleiner ist als die Phasendifferenz, welche aus den Abmessungen der elliptischen Schwingungs-curve erhalten wurde.

Zum Schlusse sei hier noch Folgendes bemerkt. Aus den Coëfficienten  $L_2$  und  $M$  lässt sich nach der bekannten, für pollose Transformatoren geltenden Näherungsformel

$$M^2 = L_1 L_2$$

der Selbstinductionscoëfficient  $L_1$  des primären Stromkreises berechnen. Man erhält für denselben den Werth

$$L_1 = 0.89436 \times 10^9 \text{ cm.}$$

Würde man die primäre Bewicklung des Transformators als secundären Stromkreis verwenden, so müsste beim Gesamtwiderstande des secundären Stromkreises  $r_2 = 1.44 \Omega$  die Phasendifferenz der beiden Ströme

$$= 179^\circ 7$$

betragen und die Schwingungcurve im Quadranten der ersten Nullage liegen. Die Schwingungcurve wird fast eine gerade Linie bilden, da im angenommenen Falle das Verhältniss der Abmessungen der elliptischen Schwingungcurve

$$\frac{b}{B} = \sin(360^\circ - 2\varphi) = 0.0105$$

sehr klein ist.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: [102\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Puluj J.

Artikel/Article: [Über einen Phasenindicator und einige mit demselben ausgeführte Messungen. 815-843](#)