Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen

Prof. **Emanuel Czuber.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1893.)

Der leitende Gedanke vorliegender Untersuchungen besteht in Folgendem. Die Gleichung eines Systems von ∞^r Curven in der Ebene enthält neben den Coordinaten x, y noch r von einander unabhängige Parameter. In der von diesen Parametern freien Differentialgleichung des Systems erscheinen dagegen ausser x, y im Allgemeinen die r Differentialquotienten von y in Bezug auf x von der ersten bis zur r^{ten} Ordnung einschliesslich. Werden diese wieder als von einander unabhängige Parameter aufgefasst, so stellt die Differentialgleichung abermals ein System von ∞^r Curven dar, das zu dem ersten in gewissen Beziehungen stehen wird und welches wir als das abgeleitete des ursprünglichen Systems bezeichnet haben. In den Fällen $r = 1$ und $r = 2$, auf die wir uns hier beschränken, nehmen diese Beziehungen einen einfachen geometrischen Ausdruck an; seine Feststellung bildet den ersten Gegenstand der Untersuchung.

Der Zusammenhang beider Systeme gestattet ferner bei gewissen Formen des abgeleiteten Systems einen Rückschluss auf das ursprüngliche; in analytischer Formulirung lehrt dieser Rückschluss für gewisse Formen von Differentialgleichungen die Structur des allgemeinen Integrals kennen. Hierin liegt ein Anknüpfungspunkt an die von Lie in die Theorie der Differentialgleichungen eingeführte geometrische Anschauungsweise.

Eine Gruppe von Problemen, zu welchen jener Gedanke leitet, lässt sich kurz so charakterisiren. Zwei Systeme von je ∞^1 Curven können zu einander in Beziehung gesetzt werden, indem man ihre Individuen mittels einer Relation zwischen den Parametern einander in bestimmter Weise zuordnet; aus dieser Zuordnung (Verwandtschaft) entspringt ein Erzeugniss der Systeme als Ort der Schnittpunkte entsprechender Individuen. Diese Betrachtungsweise kann, allerdings mit einer Modification, auch auf zwei Systeme von je ∞^2 Curven, sowie auf mehrfach unendliche Systeme ausgedehnt werden. Zu Erzeugnissen in einem ganz anderen Sinne wird man aber geführt, wenn die beiden Systeme durch Vermittlung ihrer abgeleiteten, analytisch gesprochen durch Vermittlung ihrer Differentialgleichungen auf einander bezogen werden. Bemerkenswerthe Beispiele solcher Erzeugnisse in übertragenem Sinne des Wortes bilden den weiteren Inhalt dieser Abhandlung.

I.

1. Ein System von ∞^1 Curven wird durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und einem veränderlichen Parameter λ dargestellt, deren allgemeine Form lautet

$$f(x, y, \lambda) = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung und die durch Differentiation daraus gebildete

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0, \tag{2}$$

in welcher p den Differentialquotienten von y in Bezug auf x bedeutet, können dazu dienen, für einen gegebenen Punkt (x, y) die Parameterwerthe und die Richtungscoëfficienten der Tangenten der durch ihn gehenden Curven des Systems zu bestimmen. Eliminirt man zwischen (1) und (2) den Parameter λ, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$\varphi(x, y, p) = 0, \tag{3}$$

welche für jeden Punkt der Ebene die Richtungen der Tangenten bestimmt, die an die durch ihn gehenden Curven des Systems gezogen werden können; man bezeichnet sie als die Differentialgleichung des Curvensystems.

In der Gleichung (3) kann der Differentialquotient p wieder als veränderlicher Parameter angesehen werden, und von diesem Gesichtspunkte stellt sie ein neues System von ∞^1 Curven dar, welches zu dem ursprünglichen in einer bemerkenswerthen Beziehung steht. Da nämlich in allen Punkten einer Curve des Systems (3) p den nämlichen Werth hat, so geht diese Curve durch Punkte gleicher Tangenten-, also auch gleicher Normalenrichtung auf den Curven des Systems (1). Insbesondere wird beispielsweise die Curve $\varphi(x, y, 0) = 0$ durch die extremen Punkte der Curven (1) bezüglich der x-Axe, die Curve $\varphi(x, y, \infty) = 0$ durch die extremen Punkte in Bezug auf die y-Axe gehen.

Um das Verhältniss dieser beiden Curvensysteme kurz zu bezeichnen, soll das System (3) das abgeleitete des Systems (1), dieses dagegen das ursprüngliche oder das Integralsystem von (3) heissen. Da der angedeutete Process auf (3) von Neuem angewendet und dies im Allgemeinen beliebig oft wiederholt werden kann, so gibt ein vorgelegtes System (1) Veranlassung zur Entstehung einer unbeschränkten Anzahl neuer Systeme, welche als das erste, zweite, . . abgeleitete System von (1) benannt werden sollen.

Daraus, dass

$$\varphi\left(x, y, -\frac{1}{p}\right) = 0$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien von (1) ist, folgt die auch geometrisch einleuchtende Thatsache, dass ein Curvensystem und das System seiner orthogonalen Trajectorien zu demselben abgeleiteten System führen. Die Bemerkung bliebe übrigens auch für schiefe Trajectorien in Kraft.

2. Der Übergang von einem Curvensystem (1) zu seinem abgeleiteten (3) und die Umkehrung dieses Processes stellen sich geometrisch wie folgt dar. Man verzeichne die zu einer Reihe aufeinander folgender Werthe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von λ gehörigen Curven des Systems (1) und führe an sie die möglichen Tangenten einer beliebigen Richtung, deren Coëfficient p sei; die Berührungspunkte dieser Tangenten in der durch die Para-

meterwerthe bedingten Reihenfolge geben die Ecken eines Polygons, dessen Grenze bei beständig näher zusammenrückenden $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, .$ eine Curve des Systems (3) ist.

Ist umgekehrt das abgeleitete System durch die Gleichung (3) gegeben, so stelle man eine Reihe aufeinander folgender Werthe $p_0, p_1, p_2, .$ von p auf, verzeichne die zugehörigen Curven, führe durch einen beliebigen Punkt der Curve p_0 eine Gerade vom Richtungscoëfficienten p_0 bis an die Curve p_1, durch diesen Punkt eine Gerade vom Richtungscoëfficienten p_1 bis an die Curve p_2 u. s. f.; dadurch entsteht ein Polygon, dessen Grenze, wenn die Intervalle zwischen den Werthen $p_0, p_1, p_2, .$ der Null sich nähern, eine Curve des Systems (1) sein wird.

3. Besitzt ein Curvensystem eine Enveloppe, so hüllt diese auch das abgeleitete Curvensystem und somit auch die abgeleiteten Systeme aller Ordnungen ein.

Es seien $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2,$ unendlich benachbarte Werthe des Parameters λ; $C_0, C_1, C_2, \ldots$ die zugehörigen Curven des Systems (1); $M_0, M_1, M_2, \ldots$ die ebenfalls unendlich benachbarten Grenzpunkte, welche diese Curven mit der Enveloppe E gemein haben. Dann ist die Gerade $M_0 M_1$, deren Richtungscoëfficient p_0 heissen möge, Tangente an E sowohl als an die Nachbarcurven C_0, C_1 des Systems, $M_0 M_1$ daher ein Element der zum Parameterwerth p_0 gehörigen Curve des abgeleiteten Systems (3); ebenso erweist sich $M_1 M_2$ als Element der zu einem unendlich benachbarten Parameterwerth p_1 gehörigen Curve des abgeleiteten Systems u. s. w. Daraus folgt in der That, dass die Curve E auch das abgeleitete System einhüllt.

Dieses Theorem schliesst die bekannte Thatsache ein, dass man eine singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung ebensowohl und auf demselben Wege aus der Differentialgleichung wie aus dem allgemeinen Integral finden kann. Es zeigt ferner, dass und wie man aus einem Curvensystem mit einer Einhüllenden im Allgemeinen unbeschränkt viele andere Curvensysteme mit derselben Einhüllenden abzuleiten im Stande ist.

Aus der am Schlusse des Artikels 2 gemachten Bemerkung folgt: Hat ein Curvensystem oder das System seiner Trajectorien oder haben beide Systeme Enveloppen, so hüllen diese zugleich das gemeinsame abgeleitete System ein.

4. Zur Erläuterung des bisher Vorgeführten mögen die folgenden Beispiele dienen.

α) Die von Lagrange[1] behandelte Gleichung

$$y^2-ax^2-\frac{B^2a}{a-A^2}=0, \tag{1}$$

in welcher a einen veränderlichen Parameter, A, B constante Grössen bedeuten, gehört einem System coaxialer Kegelschnitte zu; bringt man sie auf die Form

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

wobei

$$\alpha^2=-\frac{B^2}{a-A^2}, \quad \beta^2=\frac{B^2a}{a-A^2}$$

so ist aus der Beziehung

$$A^2\alpha^2+\beta^2=B^2$$

leicht zu schliessen, dass sich die Halbaxen der Kegelschnitte construiren lassen als Coordinaten der Punkte eines festen Kegelschnittes mit den Halbaxen $\frac{B}{A}$, B. Das System besteht aus Ellipsen ($a<0$) und Hyperbeln ($a>0$), letztere in verschiedener Lage gegen das Axensystem angeordnet, je nachdem $a<A^2$ oder $a>A^2$; es bedeckt die Ebene doppelt und hat zur Einhüllenden das Vierseit

$$y=\pm Ax\pm B. \tag{2}$$

Durch Elimination von a ergibt sich aus (1) die Differentialgleichung

$$A^2px^2-(A^2+p^2)xy+py^2-B^2p=0; \tag{3}$$

dieselbe stellt, wenn p als veränderlicher Parameter aufgefasst wird, ein System concentrischer Hyperbeln dar, welches die

[1] Leçons sur le calcul des fonctions, p. 223 (nation. édit.).

Ebene ebenfalls zweifach, jedoch in eigenthümlicher Weise, bedeckt. Löst man nämlich (3) in Bezug auf p auf und bezeichnet die eine Wurzel mit p, so ist $\frac{A^2}{p}$ die andere; wird aber in der genannten Gleichung p durch $\frac{A^2}{p}$ ersetzt, so geht sie in sich selbst über: es fallen also die Kegelschnitte des Systems (3) paarweise zusammen. Dies ist so zu deuten: durch jeden Punkt einer Hyperbel des Systems (3) geht ein Kegelschnitt aus dem System (1) mit bestimmter Tangentenrichtung p und gleichzeitig ein zweiter Kegelschnitt dieses Systems mit der Tangentenrichtung $\frac{A^2}{p}$ p und $\frac{A^2}{p}$ sind zugleich die Asymptotenrichtungen der betreffenden Hyperbel (3). Alle diese Hyperbeln gehen durch die Ecken des Vierseits (2) und haben dieses Vierseit zur Einhüllenden in dem Sinne, dass durch dasselbe die Ebene in Gebiete getrennt wird, welche zweifach und nullfach durch das System (3) bedeckt sind. (Fig. 1; die den Linien beigesetzten Nummern deuten auf die Gleichungen hin.)

β) Wenn λ einen veränderlichen Parameter, c eine Constante bedeutet, so stellt die Gleichung

$$(\lambda^2-c^2)x^2+\lambda^2y^2 = \lambda^2(\lambda^2-c^2) \tag{1}$$

ein System confocaler Centralkegelschnitte dar; als Einhüllende desselben ergeben sich die beiden Brennpunkte, die als Nullkreise aufgefasst thatsächlich mit jedem der Kegelschnitte in ideeller Doppelberührung stehen.

Die Differentialgleichung des Systems lautet

$$xy[(y-px)(py+x)+c^2p] = 0$$

und zerfällt in die drei

$$x = 0, \quad y = 0$$

und

$$px^2+(p^2-1)xy-py^2 = c^2p; \tag{2}$$

die beiden ersten entsprechen nur im uneigentlichen Sinne Örtern von Punkten gleicher Tangentenrichtung, insofern nämlich die doppelt gelegten Geraden $x = 0$, $y = 0$ als degenerirte Kegelschnitte dem System (1) angehören; die dritte Gleichung, die allein von Interesse ist, entspricht bei variablem p einem System concentrischer gleichseitiger Hyperbeln, das die Ebene doppelt, jedoch in solcher Weise bedeckt, dass die zu Werthepaaren des Parameters von der Form $p, -\frac{1}{p}$ gehörigen Hyperbeln in je eine zusammenfallen. Die geometrische Deutung hiervon ist nach dem Vorangehenden leicht gegeben. Als Einhüllende ergeben sich wieder die Brennpunkte des confocalen Systems, durch welche alle Hyperbeln (2) hindurchgehen.

Bildet man für das System (2) abermals das abgeleitete, indem man den Parameter p eliminirt, so ergibt sich als Gleichung desselben, wenn neuerdings $\frac{dy}{dx}$ mit p bezeichnet wird,

$$(x^2+y^2)(px-y)-c^2(px+y) = 0. \tag{3}$$

Das abgeleitete System zweiter Ordnung ist also ein System circularer Curven dritter Ordnung, welche ebenfalls durch die Brennpunkte und überdies durch den Mittelpunkt des confocalen Systems hindurchgehen; letzterer ist zugleich Mittelpunkt aller der Curven, d. h. jener Punkt, in welchem sich ihre Kreisasymptoten schneiden.

Für das System confocaler Parabeln

$$y^2 = 2\lambda x+\lambda^2 \tag{4}$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$y[(1-p^2)y-2px] = 0;$$

von dem Bestandtheil $y = 0$ gilt eine ähnliche Bemerkung wie oben; der andere

$$(1-p^2)y-2px = 0 \tag{5}$$

stellt ein Strahlenbüschel dar mit dem Brennpunkt des Parabelsystems als Träger, welches die Ebene doppelt bedeckt in der Weise, dass zu Werthepaaren wie $p, -\frac{1}{p}$ in einen zusammen-fallende Strahlen gehören. Gemeinsame Einhüllende beider Systeme ist der Brennpunkt des ersten.

γ) Im Wesentlichen zu denselben Resultaten führt das Kreisbüschel

$$x^2+y^2-2by-\pi=0, \tag{1}$$

dessen Differentialgleichung, durch Elimination des variabeln b gebildet,

$$px^2-2xy-py^2=\pi p \tag{2}$$

lautet und ein die Ebene nur einfach bedeckendes Büschel gleichseitiger Hyperbeln darstellt, dessen Basispunkte die Grundpunkte des Büschels (1) und des zugehörigen Orthogonalbüschels sind und das formell mit dem System (2), β) übereinfällt. Daraus resultirt auch die Übereinstimmung der abgeleiteten Systeme zweiter Ordnung, für welches hier die Gleichung

$$(x^2+y^2)(px-y)-\pi(px+y)=0 \tag{3}$$

besteht (Fig. 2).

δ) Über einem System paralleler Sehnen eines gegebenen Kreises als Durchmessern werden Kreise beschrieben; ihr System ist, wenn man den Mittelpunkt des gegebenen Kreises (vom Radius r) als Ursprung und die Sehnrichtung als Ordinatenrichtung wählt, dargestellt durch die Gleichung

$$(x-a)^2+y^2=r^2-a^2 \tag{1}$$

mit dem veränderlichen Parameter a. Die zugehörige Differentialgleichung ist

$$x^2+2pxy+(1+2p^2)y^2=r^2 \tag{2}$$

und gehört bei veränderlichem p einem System concentrischer Ellipsen zu, welche durch die festen Punkte $(\pm r, 0)$ gehen und zu denen der gegebene Kreis, entsprechend $p=0$, mit gehört.

Das abgeleitete System zweiter Ordnung hat die Gleichung

$$(x^2+y^2)(px-y)^2-(3p^2x^2-4pxy+y^2)r^2+2p^2r^4=0 \tag{3}$$

und ist ein System circularer Curven vierter Ordnung. Jede derselben ist, wie man unmittelbar aus der Gleichung erkennt, centralsymmetrisch in Bezug auf den Ursprung, geht durch die vier festen Punkte $(\pm r, 0)$, $(\pm r\sqrt{2}, 0)$, durch das erste Paar in der durch p charakterisirten Richtung, durch das zweite normal zur x-Axe und besteht aus zwei Ovalen. Bringt man nämlich die Curve mit dem Strahl

$$y = \lambda x$$

in Verbindung, so ergibt sich zur Bestimmung der Abscissen der Schnittpunkte die Gleichung

$$(1+\lambda^2)(p-\lambda)^2x^4-(3p^2-4p\lambda+\lambda^2)r^2x^2+2p^2r^4 = 0;$$

diese liefert für x^2 zwei gleiche Werthe, sobald λ der Gleichung genügt:

$$(\lambda-p)^2[(1-8p^2)\lambda^2-6p\lambda+p^2] = 0;$$

die stets reellen Lösungen von

$$(1-8p^2)\lambda^2-6p\lambda+p^2 = 0$$

bestimmen zwei reelle Doppeltangenten, zwischen welchen die Curve in ihrem reellen Verlaufe eingeschlossen ist; die doppelt zählende Lösung $\lambda = p$ dagegen führt zu einer Doppeltangente mit ideeller Doppelberührung im Unendlichen.

Die dem Parameterwerth $p = 0$ entsprechende Curve (3) zerfällt in den gegebenen Kreis $x^2+y^2 = r^2$ und in die doppelt zählende Gerade $y = 0$. Hieraus folgt, dass der genannte Kreis jede der Ellipsen (2) ausser in $(\pm r, 0)$ in zwei weiteren Punkten schneidet, in welchen die Tangenten parallel sind der Abscissenaxe, mit andern Worten, dass die jenem Kreise und einer Ellipse des Systems (2) gemeinsamen Durchmesser für letztere das Paar gleicher conjugirter Durchmesser bedeuten.

Alle drei Systeme, (1), (2) und (3), haben die Ellipse

$$x^2+2y^2 = 2r^2, \tag{4}$$

für welche die Punkte $(\pm r, 0)$ Brennpunkte und die Punkte $(\pm r\sqrt{2}, 0)$ Hauptscheitel sind, zur Einhüllenden (Fig. 3).

5. Einen bemerkenswerthen Fall bietet ein von einem veränderlichen Parameter abhängiges System von Geraden dar. Da die Gerade eine Linie ist, welche bei jeder Lage des

Berührungspunktes mit ihrer Tangente zusammenfällt, so sind Örter von Punkten gleicher Tangentenrichtung die Geraden des Systems selbst; demnach ist das abgeleitete System erster Ordnung und folglich auch jedes abgeleitete System höherer Ordnung mit dem ursprünglichen identisch. Der Satz, dass die Einhüllende des ursprünglichen Systems, falls eine solche vorhanden, zugleich Einhüllende der abgeleiteten Systeme ist, wird hier evident und gilt auch in der Umkehrung.

Dieses durch geometrische Erwägung gefundene Resultat wird auch durch die Analyse bestätigt. Die Gleichung eines Geradensystemes wie das besprochene kann immer auf die Form

$$y = \lambda x + f(\lambda) \tag{1}$$

gebracht werden, wo λ den Parameter bedeutet und f das Zeichen für eine beliebige Function ist. Durch Elimination von λ zwischen (1) und der daraus durch Differentiation abgeleiteten

$$p = \lambda$$

entsteht die Differentialgleichung

$$y = px + f(p), \tag{2}$$

welche bei veränderlichem p dasselbe Geradensystem darstellt wie (1). Als Differentialgleichung führt sie den Namen Clairaut's und ist für die Geschichte der Theorie der Differentialgleichungen von hervorragender Bedeutung. Die eben angestellte Betrachtung lässt deutlich den geometrischen Grund erkennen, warum sie mit ihrem allgemeinen Integral formell zusammenfällt.

Die Clairaut'sche Differentialgleichung ist der analytische Ansatz für ein inverses Tangentenproblem, welches der Tangente einer zu bestimmenden Curve eine Eigenschaft auferlegt, die unabhängig ist von der Lage des Berührungspunktes auf der Tangente und daher von allen Punkten der letzteren gleichmässig erfüllt wird.

Um dies zu zeigen, werde die Gleichung der Tangente in einem Punkte (x, y) der verlangten Curve in der Gestalt

$$\eta = p\xi + y - px \tag{3}$$

geschrieben; der Abschnitt auf der Ordinatenaxe ist hier durch $y-px$ vertreten; anderseits ergibt sich für ihn vermöge der Bedingung, welche der Tangente durch das Problem vorgeschrieben ist, ein Ausdruck, der im Allgemeinen von x, y, p abhängen wird. Ist nun das Problem solcher Art, dass dieser Ausdruck sich auf eine Function von p allein, etwa $f(p)$, reducirt so ist

$$y-px = f(p) \tag{4}$$

die dem Problem entsprechende Differentialgleichung. Hält man sie neben die aus (3) durch die Substitution (4) hervorgehende Form der Tangentengleichung

$$\eta = p\xi + f(p),$$

so ist zu erkennen, dass alle Punkte der Tangente die Differentialgleichung erfüllen, dass also die Tangente einen Theil des allgemeinen Integrals, die Gesammtheit aller Tangenten das Integralsystem selbst darstellt.

Zwei Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Stellt man die Frage nach einer Curve, bei welcher die Tangente mit dem aus dem Ursprung nach dem Berührungspunkte gezogenen Strahl einen constanten Winkel arctg k einschliesst, so handelt es sich um eine Tangenteneigenschaft, bei welcher die Lage des Berührungspunktes in der Tangente von Einfluss ist; sind x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, so liefert die Bedingung des Problems den Ansatz

$$\frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x}p} = k$$

und daraus folgt

$$y-px = k(x+py),$$

d. h. der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe ist von x, y und p abhängig.

Wird dagegen um eine Curve gefragt, deren Tangenten vom Ursprung einen gegebenen Abstand a haben, so ist dies eine Tangenteneigenschaft, bei welcher es auf die Lage des

Berührungspunktes in der Tangente nicht ankommt; mittels der allgemeinen Gleichung der Tangente

$$\eta = p\xi + y - px$$

drückt sich die Bedingung des Problems durch

$$\frac{y-px}{\sqrt{1+p^2}} = a$$

aus und ergibt

$$y-px = a\sqrt{1+p^2},$$

d. h. für den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe einen von p allein abhängigen Ausdruck.

Von letzterer Art ist das geometrische Problem, an welchem Clairaut zum erstenmale die Thatsache nachgewiesen hat, dass eine Differentialgleichung ausser dem allgemeinen Integral eine singuläre Lösung besitzen kann;[1] es wird um eine Curve gefragt, auf welcher die Schenkel eines rechten Winkels gleiten, während sein Scheitel eine gegebene Curve beschreibt.[2] Auch die geometrischen Aufgaben, welche Euler der Erläuterung der beiden »Paradoxa der Integralrechnung«[3] unterlegt, wonach es möglich ist, zu einer vorgelegten Differentialgleichung ein Integral zu finden nicht durch Integration, sondern durch Differentiation, und wonach eine Differentialgleichung neben ihrem allgemeinen noch ein besonderes durch Integration nicht auffindbares Integral besitzen kann, sind sämmtlich von der bezeichneten Art. Einige dieser Aufgaben hat Lagrange[4] wieder aufgenommen, als er den von ihm erkannten inneren Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und dem singulären Integral darlegte, der den beiden vorgenannten Geometern noch verborgen geblieben war.

---

[1] Histoire de l'Académie royale des Sciences; année 1734, p. 196—215.

Von diesem Problem leitet sich die Benennung der Gleichung (2) als Clairaut'sche Differentialgleichung her.

[3] Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres, Berlin, 1756, p. 300—321.

[4] Théorie des fonctions, p. 207; Leçons sur le calcul des fonctions, p. 169, 260 (nation. édit.).

6. Der in Artikel 3 bewiesene Satz, dass die Enveloppe eines Curvensystems auch Einhüllende aller abgeleiteten Systeme ist, lässt sich im Allgemeinen nicht umkehren.

Es sei $\varphi(x, y, p) = 0$ das abgeleitete System von $f(x, y, \lambda) = 0$, E seine Einhüllende; die Curven $C_0, C_1, C_2, \ldots$, zu benachbarten Werthen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ des Parameters p gehörig, mögen mit E die Grenzpunkte M_0, M_1, M_2, gemein haben. Jede der Curven C verbindet Punkte einer oder mehrerer bestimmten Tangentenrichtungen im Integralsystem, so C_0 Punkte der durch p_0 (oder die Werthgruppe p_0) charakterisirten Richtung u. s. w.; sind nun die Richtungen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ verschieden von den Tangentenrichtungen der E in $M_0, M_1, M_2, \ldots$, so schneiden die durch $M_0, M_1, M_2, \ldots$ gehenden Curven des Integralsystems die E unter endlichen Winkeln und somit ist E nicht auch Einhüllende des letztgenannten Systems; nur wenn jene Richtungen durchwegs übereinstimmen, hüllt E auch das System $f(x, y, \lambda) = 0$ ein.

Hiermit hängt die Thatsache zusammen, dass der aus einer Differentialgleichung erster Ordnung durch Elimination des Differentialquotienten p gewonnene Ort, den Cayley[1] »p-discriminant locus« nennt, nicht nothwendig eine singuläre Lösung der Gleichung darzustellen braucht.

Einen sehr anschaulichen Beleg zu der oben aufgestellten Behauptung bietet das System der Evolventen einer Curve oder ein System von Parallelcurven und sein abgeleitetes. Weil nämlich die Berührungspunkte paralleler Tangenten an ein solches System auf Geraden liegen, so setzt sich das abgeleitete System aus von einem Parameter abhängigen Geraden zusammen; es hat eine Einhüllende, nämlich die Evolute, welche aber das ursprüngliche System, das der Evolventen, nicht einhüllt; sie spielt für dasselbe eine andere Rolle, indem sie den Ort seiner Spitzen (»cuspidal locus« nach Cayley) bildet.

Die Bemerkung, welche soeben über ein Parallelcurvensystem und sein abgeleitetes gemacht worden ist, gestattet in sehr einfacher Weise die Differentialgleichung der Evolventen einer Curve aufzustellen. Punkte gleicher Tangentenrichtung p

---

[1] The Messenger of Mathematics, vol. II (1873), p. 6—12.

liegen auf einer Geraden, welche zu dieser Richtung normal ist und deren Axenabschnitt von den Coordinaten des Punktes x, y der Evolvente, durch welchen sie geht, nicht abhängt; mithin hat die Gerade eine Gleichung von der Form

$$y = -\frac{1}{p}x + \varphi(p)$$

oder

$$x + py = \psi(p), \tag{1}$$

wobei φ, ψ Zeichen für willkürliche Functionen sind. Die Bedeutung von $\psi(p)$ ergibt sich leicht; dieselbe Gerade (1) hat nämlich als Tangente an einen bestimmten Punkt X, Y der zu Grunde liegenden Curve $F(X, Y) = 0$ die Gleichung

$$y = -\frac{1}{p}x + Y + \frac{1}{p}X; \tag{2}$$

vergleicht man die Ausdrücke für den Axenabschnitt in den Formen (1) und (2), so folgt

$$\frac{1}{p}\psi(p) = Y + \frac{1}{p}X$$

und daraus

$$\psi(p) = X + pY; \tag{3}$$

in dem rechtsstehenden Ausdrucke sind schliesslich X, Y durch jene Werthe zu ersetzen, welches sich dafür aus den Gleichungen

$$F(X, Y) = 0$$
$$p\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial Y} = 0 \tag{4}$$

ergeben, deren zweite ausdrückt, dass die Tangente der Evolute Normale der Evolventen ist.

Jede Differentialgleichung von der Form (1) gehört einem System von Evolventen an, dessen Evolute durch Bildung der Discriminante in Bezug auf p erhalten wird; die Auffindung des Systems der Evolventen selbst erfordert die Integration von (1). Es sei beispielsweise $\psi(p) = ap + b$, dann lautet (1)

$$x - a + p(y - b) = 0$$

und stellt ein Strahlenbüschel dar, dessen Mittelpunkt (a, b) zugleich als Einhüllende anzusehen ist; das zugehörige Evolventensystem besteht in allen Kreisen um (a, b) als Centrum. Die Annahme $\psi(p) = ap^2$ führt auf die Gleichung

$$x+py = ap^2,$$

welche das Tangentensystem der Parabel

$$y^2+4ax = 0$$

darstellt; die Evolventen dieser Parabel ergeben sich durch Integration in der Form

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \{C+al.(p+\sqrt{1+p^2})\}$$

$$y = ap - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \{C+al.(p+\sqrt{1+p^2})\}$$

7 Das Curvensystem sei, auf ein Polarcoordinatensystem bezogen, dargestellt durch die Gleichung

$$f(r, \omega, \lambda) = 0; \tag{1}$$

diese und die aus ihr durch Differentiation abgeleitete Gleichung

$$p\frac{\partial f}{\partial \omega} + r\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

in welcher $p = \dfrac{rd\omega}{dr}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, den die Tangente der Curve mit dem Leitstrahl des Berührungspunktes bildet, sind geeignet, für die durch einen gegebenen Punkt (r, ω) laufenden Curven des Systems Parameterwerthe und Tangentenrichtungen zu bestimmen.

Die letzteren allein berechnen sich aus der Gleichung

$$\varphi(r, \omega, p) = 0, \tag{3}$$

welche aus (1) und (2) durch Elimination von λ hervorgeht und als Differentialgleichung des Curvensystems bezeichnet wird.

Fasst man in ihr p als veränderlichen Parameter auf, so ist sie der analytische Ausdruck für ein neues System von ∞^1

Curven, welches zu dem ursprünglichen in solcher Beziehung steht, dass jede Curve (3) solche Punkte auf den Curven (1) verbindet, in welchen die Tangente gegen den Leitstrahl des Berührungspunktes unter ein und demselben Winkel geneigt ist. Dieses neue System soll wieder das abgeleitete von (1), (1) hingegen das Integralsystem von (3) heissen.

Die Ausführungen der Artikel 3 und 6 gelten auch in dem vorliegenden Falle.

8. Es gibt Fälle, in welchen sich aus der Natur des abgeleiteten Systems gewisse geometrische Eigenschaften des ursprünglichen leicht erschliessen lassen; in analytischer Deutung sind dies ebensoviele Fälle von Differentialgleichungen, für welche sich die allgemeine Form des Integrals angeben lässt. Hier mögen die einfachsten dieser Fälle kurz erörtert werden.[1]

α) Die Gleichung des abgeleiteten Systems enthalte die Variabeln x, y nicht, laute also

$$\varphi(p) = 0. \tag{1}$$

Dann kann jede wie immer in der Ebene gezogene Linie als zum abgeleiteten System gehörig angesehen werden, ein abgeleitetes System im eigentlichen Sinne gibt es also hier nicht. Das ursprüngliche System muss infolge dessen aus einem oder mehreren Systemen paralleler Geraden bestehen, deren Richtungscoëfficienten die Wurzeln von (1) sind; mit anderen Worten: die Differentialgleichung (1) hat ein oder mehrere Integrale der Form

$$y = ax + \lambda. \tag{2}$$

β) Das abgeleitete System habe die Gleichung

$$\varphi(x, p) = 0, \tag{1}$$

bestehe also in zur y-Axe parallelen Geraden. Das ursprüngliche System kann dann aus einem seiner Individuen durch Verschiebung parallel zur y-Axe erzeugt werden oder es gestattet

[1] Vergl. Sophus Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, S. 140—147, wo zu gegebenen eingliedrigen Gruppen die zugehörigen Differentialgleichungen gesucht werden.

die eingliedrige Gruppe der Translationen dieser Richtung, hat also eine Gleichung von der allgemeinen Form

$$f(x, y+\lambda) = 0. \tag{2}$$

γ) Durch ganz analoge Betrachtungen ergibt sich, dass zu einem abgeleiteten System von der Form

$$\varphi(y, p) = 0 \tag{1}$$

ein Ursprüngliches der allgemeinen Gleichung

$$f(x+\lambda, y) = 0 \tag{2}$$

gehört.

δ) Allgemeiner: Zu einem abgeleiteten System von der Form

$$\varphi(\alpha x+\beta y, p) = 0 \tag{1}$$

gehört ein Ursprüngliches, welches die Gruppe der Translationen parallel zur Geraden $\alpha x+\beta y = 0$ gestattet, dessen allgemeine Gleichung daher lautet

$$f(x-\beta\lambda, y+\alpha\lambda) = 0. \tag{2}$$

ε) In Polarcoordinaten habe das abgeleitete System die Gleichung

$$\varphi(r, p) = 0,$$

sei also ein System von Kreisen um den Pol als Mittelpunkt. Das ursprüngliche System kann dann aus einem seiner Individuen durch Rotation um den Pol erzeugt werden, hat also eine Gleichung von der Form

$$f(r, \omega+\lambda) = 0. \tag{2}$$

Der Fall ist äquivalent jenem α) in rechtwinkligen Coordinaten. Geht man auch hier zu solchen über, so ist r zu ersetzen durch $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, ω durch $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ und p als Tangens des Winkels der Tangente mit dem Leitstrahl des Berührungspunktes durch

$$\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} \quad \text{oder} \quad \frac{px-y}{x+py},$$

wenn man für $\frac{dy}{dx}$ neuerdings den Buchstaben p verwendet; hat also, in rechtwinkligen Coordinaten, das abgeleitete System eine Gleichung von der Form

$$\Phi\left(x^2+y^2, \frac{px-y}{x+py}\right)=0, \tag{1*}$$

so kommt dem ursprünglichen System eine Gleichung der Gestalt

$$F\left(x^2+y^2, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\lambda\right)=0 \tag{2*}$$

zu.

ζ) Die Gleichung des abgeleiteten Systems laute

$$\varphi(\omega, p)=0; \tag{1}$$

es ist ein Strahlenbüschel aus dem Pol; da jeder seiner Strahlen Punkte gleicher Tangentenrichtung auf den Integralcurven verbindet, so ist das ursprüngliche System aus einem seiner Individuen ableitbar durch die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen aus dem Pol, hat infolge dessen eine Gleichung der Form

$$f(\lambda r, \omega)=0. \tag{2}$$

Vollzieht man den Übergang zu rechtwinkligen Coordinaten, so ergibt sich, dass einem abgeleiteten System von der Gleichungsform

$$\varphi\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \frac{p-\frac{y}{x}}{1+p\frac{y}{x}}\right)=0$$

oder

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, p\right)=0 \tag{1*}$$

ein ursprüngliches System entspricht, welches sich darstellen lässt durch $f\left(\lambda(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=0$ oder

$$F\left(\lambda x, \frac{y}{x}\right)=0. \tag{2*}$$

Zu allen vorangeführten Fällen sei bemerkt, dass die jeweilen mit (1) bezeichnete Gleichung das System der Bahncurven jener Gruppe von Transformationen darstellt, bei welcher das zugehörige ursprüngliche System (2) invariant bleibt. Im Falle ζ) gilt zwischen (1*) und (2*) dieselbe Beziehung, nicht so im Falle ε).

Zu der zuletzt behandelten homogenen Differentialgleichung (1*) möge noch folgende Bemerkung gemacht werden. Nach $\frac{y}{x}$ aufgelöst laute sie

$$\frac{y}{x} = \psi(p);$$

für solche Werthe von p, welche der Gleichung

$$\psi(p) = p$$

genügen, ist der Strahl des abgeleiteten Systems Tangente an die Curven des Integralsystems in den Punkten, welche er miteinander verbindet; jeder solche Strahl hüllt also die Integralcurven ein und bildet daher einen Theil der singulären Lösung der betreffenden Differentialgleichung, sofern er nicht zu einem particulären Integral derselben gehört.

Die Differentialgleichung

$$p^2x - 2py + x + 2y = 0$$

gibt beispielsweise bei obiger Behandlung

$$\frac{y}{x} = -\frac{1+p^2}{2(1-p)},$$

und aus der Gleichung

$$-\frac{1+p^2}{2(1-p)} = p$$

findet man die beiden Werthe $p = 1 \pm \sqrt{2}$, welche zu den beiden ausgezeichneten, zu einander senkrechten Geraden des abgeleiteten Systems gehören

$$\frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dieselben bilden im vorliegenden Falle die singuläre Lösung der Differentialgleichung; denn sie hüllen das Integralsystem

$$(x+\lambda)^2 = 2\lambda y - \lambda^2,$$

ein System von Parabeln, deren Brennpunkte die Gerade $x+y=0$ erfüllen, während die Gerade $y=0$ ihre gemeinsame Directrix ist, ein, ohne in dem allgemeinen Integral enthalten zu sein.

Die Differentialgleichung

$$x+p^2y = 0$$

dagegen führt zunächst auf $\frac{y}{x} = -\frac{1}{p^2}$ und die Gleichung $-\frac{1}{p^2} = p$ ergibt $p^3+1 = 0$; hiedurch ergibt sich in

$$x^3+y^3 = 0$$

eine Gruppe von drei ausgezeichneten Geraden des abgeleiteten Systems, eine davon reell, die beiden andern conjugirt imaginär: diese Geraden bilden aber einen particulären Fall des allgemeinen Integrals

$$(y^{\frac{3}{2}}-C)^2+x^3 = 0,$$

entsprechend dem Werthe $C=0$ der willkürlichen Constanten

9. Zwei Systeme von je ∞^1 Curven

$$f(x, y, \lambda) = 0 \tag{1}$$

$$g(x, y, \mu) = 0 \tag{2}$$

können zu einander in Beziehung gesetzt werden, indem man solche Curven aus beiden Systemen einander zuordnet, deren Parameterwerthe eine gegebene Relation

$$\chi(\lambda, \mu) = 0 \tag{3}$$

erfüllen. Der Ort der Schnittpunkte zugeordneter Curven wird als das aus der Verwandtschaft (3) hervorgehende Erzeugniss der beiden Curvensysteme bezeichnet; man erhält seine Gleichung durch Elimination von λ, μ zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3).

Die einfachste Relation

$$\lambda = \mu$$

ordnet Curven mit gleichen Parameterwerthen einander zu: man kann diesem Fall folgende raumgeometrische Deutung unterlegen. Wird in den Gleichungen $f(x, y, \lambda) = 0$ und $g(x, y, \lambda) = 0$ $\lambda = z$ als dritte Ordinate eines Punktes im Raume aufgefasst, dessen zwei erste Ordinaten x, y sind, so stellt jede dieser Gleichungen eine Fläche dar; die beiden Curvensysteme sind die Projectionen der Niveaulinien dieser Flächen in der xy-Ebene und derart aufeinander bezogen, dass derselben Ebene angehörende Niveaulinien zugeordnete Curven ergeben; das Erzeugniss der Curvensysteme ist dann die Projection des Durchschnittes der beiden Flächen.

Jeder andere Fall kann auf diesen einfachsten zurückgeführt werden; man braucht nur mittels (3) μ aus (2) zu eliminiren.

10. Die beiden Curvensysteme (1) und (2) können aber auch in anderer Weise zu einander in Beziehung gebracht werden, nämlich durch Vermittlung ihrer Differentialgleichungen; diese seien

$$\varphi(x, y, p) = 0 \tag{1*}$$

$$\psi(x, y, P) = 0; \tag{2*}$$

p und P haben analytisch dieselbe Bedeutung, beide stellen den Differentialquotienten von y in Bezug auf x vor. Fügt man zu (1*) und (2*) eine Beziehung zwischen p, P und x, y, etwa

$$\chi(x, y, p, P) = 0 \tag{3*}$$

und eliminirt nun zwischen den drei Gleichungen p und P, so ergibt sich der geometrische Ort solcher Punkte der Ebene, für welche die Richtungscoëfficienten der Tangenten an die Curve des Systems (1) einer- und des Systems (2) anderseits im Verein mit den Coordinaten die Bedingung (3*) erfüllen. Die Beziehung der Tangentenrichtungen ist von der Lage des Punktes unabhängig und für alle Punkte dieselbe, wenn die Relation (3*) die Grössen x, y nicht enthält, also von der Form ist

$$\chi(p, P) = 0. \tag{3**}$$

Handelt es sich beispielsweise um den Ort solcher Punkte, in welchen die Tangenten an zwei durchlaufende Curven aus (1) und (2) auf der Ordinatenaxe Abschnitte von constanter Summe $= c$ bilden, so heisst die Bedingung

$$2y-(p+P)x = c$$

und ist von der Lage des Punktes beeinflusst; verlangt man dagegen den Ort von Punkten, in welchen die beiderseitigen Subtangenten ein constantes Verhältniss $= \gamma$ bilden, so ist die zugehörige Relation

$$\frac{P}{p} = \gamma$$

von der Lage des Punktes unabhängig.

Jeder auf solche Weise gewonnene Ort kann als Erzeugniss der Curvensysteme (1) und (2) in erweitertem Sinne des Wortes angesehen werden.

In den folgenden Beispielen beschränken wir uns auf eine specielle Beziehung von der Form (3**).

11. Es sei der gleichwinklige Durchschnitt der beiden Curvensysteme $f(x, y, \lambda) = 0$ und $g(x, y, \mu) = 0$, d. h. der Ort solcher Punkte der Ebene zu bestimmen, in welchen sich die durchlaufenden Curven je aus dem ersten und zweiten System unter einem constanten Winkel $=$ arctg k schneiden.

Die Bedingung, welcher p und P zu genügen haben, lautet

$$\frac{P-p}{1+pP} = k;$$

bestimmt man hieraus $P = \frac{k+p}{1-kp}$ und setzt dies in (2*) ein, so löst das Eliminationsresultat von p zwischen

$$\varphi(x, y, p) = 0$$

und

$$\psi\left(x, y, \frac{k+p}{1-kp}\right) = 0$$

die gestellte Aufgabe.

Das $k = 0$ entsprechende Erzeugniss möge als Berührungsort bezeichnet werden; es verbindet Punkte, in welchen sich Curven der Systeme (1) und (2) gegenseitig berühren; das $k = \infty$ entsprechende Erzeugniss ist der orthogonale Durchschnitt dieser Systeme.

Nachstehend sollen einige bemerkenswerthe Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

α) Es sei der gleichwinklige Durchschnitt des Kreisbüschels

$$x^2+y^2-2\lambda y-\pi = 0 \qquad (A$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ zu bestimmen.

Die Differentialgleichungen der beiden Systeme

$$(x^2-y^2-\pi)p-2xy = 0 \qquad (1)$$

$$y-b = P(x-a) \qquad (2)$$

in der erörterten Weise mit einander combinirt liefern das Resultat:

$$(x^2+y^2)(y+kx)-(ak-b)(x^2-y^2)-2(a+bk)xy+$$
$$+\pi(y-kx)+\pi(ak-b) = 0. \qquad (B)$$

Der gleichwinklige Durchschnitt eines Kreisbüschels mit einem Strahlenbüschel ist also eine circulare Curve dritter Ordnung, welche durch die Grundpunkte F, G des Kreisbüschels und den Mittelpunkt M des Strahlenbüschels hindurchgeht; es ist eine Curve von derjenigen Species, bei welcher die imaginären Kreispunkte conjugirte Punkte sind in dem Sinne, dass die Tangenten in denselben auf der Curve sich schneiden; denn die imaginären Asymptoten haben die Gleichungen

$$y = \pm ix+b\mp ai$$

und ihr Schnittpunkt ist der Punkt $M(a, b)$. Die reelle Asymptote hat die Gleichung

$$y = -kx-(ak+b),$$

liegt also zu der durch M parallel zu ihr gezogenen Geraden symmetrisch bezüglich des Ursprunges.

Ist das Kreisbüschel ein Berührungsbüschel ($\pi = 0$), so hat die Curve im Berührungspunkte einen Doppelpunkt mit zu einander senkrechten Tangenten.

Von besonderem Interesse sind die beiden Curven, welche den Werthen $k = 0$ und $k = \infty$ entsprechen; ihre Gleichungen lauten

$$(x^2+y^2)\,y+b\,(x^2-y^2)-2\,axy+\pi y-\pi b = 0 \qquad (C)$$

$$(x^2+y^2)\,x-a\,(x^2-y^2)-2\,bxy-\pi x+\pi a = 0 \qquad (D)$$

Die erste verbindet die Berührungspunkte der Tangenten, die zweite die Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Punkte M nach den Kreisen des Büschels (A) gezogen werden können. Gerade die umgekehrte Rolle spielen diese Curven in Bezug auf das zu (A) conjugirte Kreisbüschel

$$x^2+y^2-2\,\mu x+\pi = 0. \qquad (A')$$

Man kann die Curve (C) in zweifacher Weise als Erzeugniss eines Kreisbüschels und eines dazu projectivischen Strahlenbüschels auffassen, und zwar des Kreisbüschels (A) mit dem zu M gehörigen Polarenbüschel, dessen Träger der Punkt $R\left(\frac{b^2+\pi}{a}\quad -b\right)$ auf der reellen Asymptote $y = -b$ von (C) ist; und des Kreisbüschels (A') mit dem Durchmesserbüschel aus M In gleicher Weise ergibt sich (D) einerseits aus dem Kreisbüschel (A) und dem Durchmesserbüschel aus M, anderseits aus dem Kreisbüschel (A') und dem Polarenbüschel zu M, dessen Scheitel $S\left(-a, \frac{a^2-\pi}{b}\right)$ auf der reellen Asymptote $x = -a$ dieser Curve liegt.

Wie leicht zu zeigen ist, aus geometrischen Gründen übrigens unmittelbar einleuchtet, schneiden sich die Curven (C) und (D) in den Punkten F, G, M unter rechtem Winkel. Bemerkt sei noch, dass (C) für $b = 0$ in die Gerade $y = 0$ und einen Kreis des Büschels (A'), (D) dagegen für $a = 0$ in die Gerade $x = 0$ und einen Kreis des Büschels (A) zerfällt; die geometrische Bedeutung hievon ist leicht zu erkennen (Fig. 4).

β) Es soll der gleichwinklige Durchschnitt des Systems confocaler Centralkegelschnitte

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2} = 1 \qquad (A)$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ bestimmt werden.

Mit Hilfe der Differentialgleichungen (vergl. Artikel 4, β))

$$p(x^2-y^2)+(p^2-1)xy-c^2p = 0 \tag{1}$$

$$y-b = P(x-a) \tag{2}$$

der beiden Liniensysteme erhält man als Gleichung des verlangten Durchschnittes

$$\begin{aligned} k(x^2+y^2)^2 - \{[2ak-b(1-k^2)]x+[2bk+a(1-k^2)]y\}(x^2+y^2) - \\ - \{(b^2+c^2-a^2)k+ab(1-k^2)\}(x^2-y^2)+ \\ + \{4abk+(a^2+c^2-b^2)(1-k^2)\}xy+ \\ + c^2\{[2ak-b(1-k^2)]x-[2bk+a(1-k^2)]y\} - \\ - \{(a^2-b^2)k-ab(1-k^2)\}c^2 = 0. \end{aligned} \tag{B}$$

Der isogonale Durchschnitt eines Systems confocaler Centralkegelschnitte mit einem Strahlenbüschel ist also eine bicirculare Curve vierter Ordnung, welche durch die Brennpunkte F, G des Systems und den Scheitel M des Büschels hindurchgeht; letzterer Punkt ist Doppelpunkt mit zu einander rechtwinkligen Tangenten. Die Gleichung (B) ändert sich nicht, wenn man k ersetzt durch $-\frac{1}{k}$; von den acht Punkten, in welchen die Curve (B) einen Kegelschnitt des Systems (A) schneidet, entsprechen also vier dem Schnitt unter dem Winkel arctg k, die vier andern dem Schnitt unter dem Winkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$

---

[1] Die Aufgabe: aus dem Punkte $M(a, b)$ nach dem Kegelschnitt

$$Bx^2+Ay^2 = AB \tag{α}$$

Strahlen zu ziehen, welche mit letzterem einen gegebenen Winkel arctg k bilden, findet ihre Lösung in der Hyperbel

$$(A-B)kxy+B(a+bk)x+A(b-ak)y = AB; \tag{β}$$

die vier Schnittpunkte beider Linien sind die Fusspunkte der gesuchten Strahlen. Die dem Winkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$ entsprechende Hyperbel

$$(A-B)xy-B(ak-b)x-A(bk+a)y = -ABk \tag{γ}$$

Von besonderem Interesse sind die beiden Curven, welche den Werthen $k = 0$ und $k = \infty$ entsprechen; ihre Gleichungen lauten

$$(x^2+y^2)\,y+b\,(x^2-y^2)-2\,axy+\pi y-\pi b = 0 \qquad (C)$$

$$(x^2+y^2)\,x-a\,(x^2-y^2)-2\,bxy-\pi x+\pi a = 0 \qquad (D)$$

Die erste verbindet die Berührungspunkte der Tangenten, die zweite die Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Punkte M nach den Kreisen des Büschels (A) gezogen werden können. Gerade die umgekehrte Rolle spielen diese Curven in Bezug auf das zu (A) conjugirte Kreisbüschel

$$x^2+y^2-2\,\mu x+\pi = 0. \qquad (A')$$

Man kann die Curve (C) in zweifacher Weise als Erzeugniss eines Kreisbüschels und eines dazu projectivischen Strahlenbüschels auffassen, und zwar des Kreisbüschels (A) mit dem zu M gehörigen Polarenbüschel, dessen Träger der Punkt $R\left(\frac{b^2+\pi}{a}\;-b\right)$ auf der reellen Asymptote $y = -b$ von (C) ist; und des Kreisbüschels (A') mit dem Durchmesserbüschel aus M. In gleicher Weise ergibt sich (D) einerseits aus dem Kreisbüschel (A) und dem Durchmesserbüschel aus M, anderseits aus dem Kreisbüschel (A') und dem Polarenbüschel zu M, dessen Scheitel $S\left(-a, \frac{a^2-\pi}{b}\right)$ auf der reellen Asymptote $x = -a$ dieser Curve liegt.

Wie leicht zu zeigen ist, aus geometrischen Gründen übrigens unmittelbar einleuchtet, schneiden sich die Curven (C) und (D) in den Punkten F, G, M unter rechtem Winkel. Bemerkt sei noch, dass (C) für $b = 0$ in die Gerade $y = 0$ und einen Kreis des Büschels (A'), (D) dagegen für $a = 0$ in die Gerade $x = 0$ und einen Kreis des Büschels (A) zerfällt; die geometrische Bedeutung hievon ist leicht zu erkennen (Fig. 4).

β) Es soll der gleichwinklige Durchschnitt des Systems confocaler Centralkegelschnitte

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2} = 1 \qquad (A)$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ bestimmt werden.

Mit Hilfe der Differentialgleichungen (vergl. Artikel 4, β))

$$p(x^2-y^2)+(p^2-1)xy-c^2p = 0 \tag{1}$$

$$y-b = P(x-a) \tag{2}$$

der beiden Liniensysteme erhält man als Gleichung des verlangten Durchschnittes

$$\begin{aligned} k(x^2+y^2)^2-\{[2ak-b(1-k^2)]x+[2bk+a(1-k^2)]y\}(x^2+y^2)- \\ -\{(b^2+c^2-a^2)k+ab(1-k^2)\}(x^2-y^2)+ \\ +\{4abk+(a^2+c^2-b^2)(1-k^2)\}xy+ \\ +c^2\{[2ak-b(1-k^2)]x-[2bk+a(1-k^2)]y\}- \\ -\{(a^2-b^2)k-ab(1-k^2)\}c^2 = 0. \end{aligned} \tag{B}$$

Der isogonale Durchschnitt eines Systems confocaler Centralkegelschnitte mit einem Strahlenbüschel ist also eine bicirculare Curve vierter Ordnung, welche durch die Brennpunkte F, G des Systems und den Scheitel M des Büschels hindurchgeht; letzterer Punkt ist Doppelpunkt mit zu einander rechtwinkligen Tangenten. Die Gleichung (B) ändert sich nicht, wenn man k ersetzt durch $-\frac{1}{k}$; von den acht Punkten, in welchen die Curve (B) einen Kegelschnitt des Systems (A) schneidet, entsprechen also vier dem Schnitt unter dem Winkel arctg k, die vier andern dem Schnitt unter dem Winkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$

---

[1] Die Aufgabe: aus dem Punkte $M(a, b)$ nach dem Kegelschnitt

$$Bx^2+Ay^2 = AB \tag{α}$$

Strahlen zu ziehen, welche mit letzterem einen gegebenen Winkel arctg k bilden, findet ihre Lösung in der Hyperbel

$$(A-B)kxy+B(a+bk)x+A(b-ak)y = AB; \tag{β}$$

die vier Schnittpunkte beider Linien sind die Fusspunkte der gesuchten Strahlen. Die dem Winkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$ entsprechende Hyperbel

$$(A-B)xy-B(ak-b)x-A(bk+a)y = -ABk \tag{γ}$$

Dies hat weiter zur Folge, dass den Werthen $k=0$ und $k=\infty$ eine und dieselbe Curve, nämlich

$$(x^2+y^2)(bx-ay)-ab(x^2-y^2)+ \\ +(a^2+c^2-b^2)xy-(bx+ay)c^2+abc^2=0 \quad (C)$$

entspricht; diese circulare Curve dritter Ordnung verbindet also die Berührungspunkte der Tangenten, sowie die Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Punkte M an die Kegelschnitte des confocalen Systems zu führen sind; ihre reelle Asymptote ist dem durch M laufenden Durchmesser parallel und hat die Gleichung

$$y=\frac{b}{a}x+\frac{bc^2}{a^2+b^2}.$$

Kommt M in eine der Axen zu liegen, so zerfällt die Curve in die betreffende Axe und einen Kreis, der diese rechtwinklig schneidet und die in ihr gelegenen (reellen oder imaginären) Brennpunkte der Kegelschnitte harmonisch von einander trennt.

Fällt der Punkt M mit dem Centrum des Kegelschnittsystems zusammen, ist also $a=0=b$, so vereinfacht sich die Gleichung (B) zu

$$k(x^2+y^2)^2-c^2k(x^2-y^2)+c^2(1-k^2)xy=0 \quad (D)$$

und geht für $k^2=1$ insbesondere über in

$$(x^2+y^2)^2-c^2(x^2-y^2)=0, \quad (E)$$

d. h. die Endpunkte jener Durchmesser eines confocalen Systems von Centralkegelschnitten, welche die Kegelschnitte unter den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ schneiden, liegen auf einer **Lemniscate**, deren Scheitel die Brennpunkte des Systems sind.

---

bestimmt vier weitere Punkte auf (α), und jede acht Punkte solcher Art liegen auf ein und derselben Curve vierter Ordnung (B).

Für $k=0$ geht die Gleichung (β) in

$$Bax+Aby=AB,$$

d. in die Gleichung der Polare des Punktes M bezüglich des Kegelschnittes (α) über.

γ) Es sei der isogonale Durchschnitt des Systems confocaler Parabeln

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2 \tag{A}$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ zu bestimmen.

Die Differentialgleichungen (vergl. Artikel 4, β))

$$(1-p^2)y^2 - 2pxy = 0 \tag{1}$$

$$y - b = P(x-a) \tag{2}$$

ergeben, wenn man sie in der oben angegebenen Weise miteinander combinirt, als Durchschnitt eine circulare Curve vierter Ordnung, von welcher sich jedoch die Axe

$$y = 0$$

als uneigentlicher Ort ablöst; der eigentliche Durchschnitt ist eine circulare Curve dritter Ordnung, deren Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)[2kx-(1-k^2)y]-2[2ak-b(1-k^2)](x^2+y^2)+\\+2[(a^2-b^2)k-ab(1-k^2)]x+[(a^2-b^2)(1-k^2)+4abk]y=0.\end{aligned} \tag{B}$$

Die Curve geht durch den Brennpunkt der Parabeln und hat den Punkt M zum Knotenpunkt mit zu einander rechtwinkligen Tangenten. Die reelle Asymptote

$$y = \frac{2k}{1-k^2}x - \frac{4ak-2b(1-k^2)}{1-k^2}$$

hat eine von der Lage des Punktes M unabhängige Richtung, die imaginären Asymptoten $y = \pm ix$ schneiden sich im Ursprung, also auf der Curve, so dass für diese die imaginären Kreispunkte conjugirte Punkte sind. Ersetzt man in (B) k durch $-\frac{1}{k}$, so erleidet die Gleichung dadurch keine Änderung; von den sechs Punkten, welche die Curve mit einer Parabel des Systems bestimmt, entsprechen drei dem Schnittwinkel arctg k, die andern drei dem Schnittwinkel arctg$\left(-\frac{1}{k}\right)$[1] Dieses Verhalten

[1] Die Fusspunkte der Strahlen, welche aus dem Punkte $M(a, b)$ nach der Parabel

$$y^2 = 2\,Qx + Q^2 \tag{\alpha}$$

der Gleichung hat auch zur Folge, dass die den Werthen 0 und ∞ von k entsprechenden Curven in eine zusammenfallen, welche analytisch charakterisirt ist durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)y-2b(x^2+y^2)+2abx-(a^2-b^2)y=0; \qquad (C)$$

dieselbe geht durch die Berührungspunkte der Tangenten und durch die Fusspunkte der Normalen aus M an die Parabeln (A); die reelle Asymptote dieser Curve ist $y=2b$.

Fällt der Punkt M in die Axe des Parabelsystems $(b=0)$, so zerfällt (C) in die Axe $y=0$ und den Kreis $x^2+y^2=a^2$; kommt M auf den Brennpunkt des Parabelsystems zu liegen $(a=0=b)$, so zerfällt (C) wie auch (B) in drei durch ihn gehende Geraden, wovon zwei die absoluten Richtungen anzeigen.

II.

12. Ein System von ∞^2 Curven ist dargestellt durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und zwei veränderlichen Parametern λ, μ, also durch eine Gleichung von der Form

$$f(x, y, \lambda, \mu)=0. \qquad (1)$$

Für stehende Werthe von x, y gibt diese die Beziehung an, welche zwischen den Parameterwerthen aller durch den Punkt (x, y) laufenden Curven stattfindet.

---

so gezogen werden, dass sie mit ihr den gegebenen Winkel arctg k bilden, ergeben sich als Schnittpunkte von (α) mit der gleichseitigen Hyperbel

$$kxy-Qx+[b-(a-Q)k]y-Q(a+Q+bk)=0; \qquad (\beta)$$

da eine der Asymptoten dieser Hyperbel der Parabelaxe parallel ist, so fällt einer der vier Schnittpunkte mit dem unendlich fernen Parabelpunkt zusammen und ist als Lösung nur insofern anzusehen, als der unendlich fernen Parabeltangente jede beliebige Richtung zugeschrieben werden kann. Die dem Schnittwinkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$ entsprechende Hyperbel

$$xy+Qkx-(bk+a-Q)y+Q[k(a+Q)-b]=0 \qquad (\gamma)$$

liefert ausser dem unendlich fernen drei weitere Punkte auf (α), und die sechs Punkte liegen auf ein und derselben Curve dritter Ordnung (B). Für $k=0$ verwandelt sich, wie es sein muss, (β) in die Gleichung der Polare des Punktes M in Bezug auf (α), nämlich

$$by=Q(a+x)+Q^2.$$

Fügt man zu der Gleichung (1) die beiden neuen

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}p+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}p^2+\frac{\partial f}{\partial y}q=0 \tag{3}$$

hinzu, in welchen $p=\frac{dy}{dx}$ und $q=\frac{d^2y}{dx^2}$ ist, und eliminirt zwischen allen drei Gleichungen λ und μ, so kommt eine Gleichung von der Form

$$\varphi(x, y, p, q)=0 \tag{4}$$

zu Stande, welche bei festen Werthen von x, y die Beziehung ausdrückt, welche für alle durch den Punkt (x, y) laufenden Curven zwischen dem ersten und zweiten Differentialquotienten der Ordinate nach der Abscisse in jenem Punkte besteht. Einen andern, anschaulicheren Ausdruck erhält man hiefür, wenn man mit Hilfe der Beziehung

$$\rho=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

q aus (4) entfernt; die neue Gleichung

$$\Phi(x, y, p, \rho)=0 \tag{5}$$

bedeutet die Relation zwischen Tangentenrichtung und Krümmungsradius aller Curven durch den Punkt (x, y).

Man kann nun in (5) p, ρ als veränderliche Parameter ansehen; dann stellt diese Gleichung wieder ein System von ∞^2 Curven dar, welches zu dem ursprünglichen (1) in solcher Beziehung steht, dass jede Curve des Systems (5) Punkte gleicher Tangentenrichtung und gleicher (und gleichartiger) Krümmung auf Curven des Systems (1) verbindet. Beispielsweise wird $\Phi(x, y, p=0, \rho)=0$ ein System von ∞^1 Curven repräsentiren, welche durch extreme Punkte gleicher Krümmung $\frac{1}{\rho}$ bezüglich der x-Axe gehen; $\Phi(x, y, p, \rho=\infty)=0$ ein System von ∞^1 Curven, dessen Individuen durch Wende- (oder Undulations-) Punkte gleicher Tangentenrichtung p laufen.

Früher eingeführten Benennungen entsprechend soll das System (4) oder das äquivalente (5) als abgeleitetes in Bezug auf (1), dieses hinwiederum als Integralsystem in Bezug auf (4) oder (5) bezeichnet werden.

13. Zur Erläuterung mögen die folgenden Beispiele dienen.

α) Ein Kreisnetz mit dem Radicalcentrum $C(a, b)$ und der Potenz π ist dargestellt durch die Gleichung

$$x^2+y^2-2\alpha(x-a)-2\beta(y-b)-a^2-b^2+\pi=0, \tag{1}$$

in welcher α, β unabhängig veränderlich sind. Durch ihre Elimination ergibt sich die Gleichung

$$[(x-a)^2+(y-b)^2-\pi]q-2p(1+p^2)(x-a)+ \\ +2(1+p^2)(y-b)=0 \tag{2}$$

des abgeleiteten Systems. Dieses ist wieder ein System von ∞^2 Kreisen, und zwar wieder ein Kreisnetz mit dem Radicalcentrum C; setzt man nämlich in dem Polynom der linken Seite von (2) a, b an die Stelle von x, y, so reducirt es sich auf $-\pi q$, und da q der Coëfficient von x^2+y^2 ist, so kommt dem Punkte C in Bezug auf alle Kreise des Systems (2) die Potenz $-\pi$ zu. Hiernach ist das abgeleitete System eines Kreisnetzes wieder ein Kreisnetz mit demselben Radicalcentrum; im übrigen sind beide Netze so geartet, dass der Orthogonalkreis des einen Diametralkreis des andern ist.

Mit $q=0$ reducirt sich die Gleichung (2) auf die Gleichung des Strahlenbüschels

$$y-b=p(x-a)$$

aus C als Ort der Punkte in (1), welchen ein unendlicher Krümmungsradius zukommt; es sind die zu Geraden degenerirten Kreise von (1).

Mit $p=0$ geht Gleichung (2) über in

$$[(x-a)^2+(y-b)^2-\pi]q+2(y-b)=0$$

und stellt, wie man leicht erkennt, ein Kreisbüschel mit der Potenzaxe $y=b$ und der Centrale $x=a$ dar als Ort der extremen Punkte in (1) bezüglich der x-Axe. Man überzeugt sich leicht, dass die extremen Punkte in Bezug auf die y-Axe auf einem Kreisbüschel mit der Potenzaxe $x = a$ und der Centrale $y = b$ liegen, indem man (2) durch $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ dividirt und hierauf $\lim p = \infty$ setzt, beachtend, dass $\dfrac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ dabei einer endlichen Grenze sich nähert.

Als Ort der Punkte im System (1), für welche der Krümmungsradius Null ist, ergibt sich aus (2) mit $q = \infty$

$$(x^2-a)^2+(y-b)^2 = \pi,$$

d. i. der Hauptkreis des Netzes als Ort seiner Nullkreise.

β) Die Gleichung

$$Ax^2+By^2 = 1 \tag{1}$$

stellt bei veränderlichen A und B ein System coaxialer Centralkegelschnitte dar; durch Elimination der Parameter ergibt sich

$$qxy+p^2x-py = 0 \tag{2}$$

oder in anderer Form

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}}xy+p^2\rho x-p\rho y = 0 \tag{3}$$

als Gleichung des abgeleiteten Systems. Hiernach hat das System coaxialer Centralkegelschnitte zum abgeleiteten ein System von ∞^2 gleichseitigen Hyperbeln, welche durch das gemeinsame Centrum der Kegelschnitte gehen und deren gemeinsame Axen zu Asymptotenrichtungen haben.

Die Mittelpunktscoordinaten der Hyperbel (3) ergeben sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}y+p^2\rho &= 0,\\ (1+p^2)^{\frac{3}{2}}x-p\rho &= 0;\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

eliminirt man zwischen diesen einmal ρ, das anderemal p, so kommen die Gleichungen zu Stande:

$$y+px = 0, \tag{5}$$

$$(x^2+y^2)^3-\rho^2x^2y^2 = 0. \tag{6}$$

Ihr Inhalt ist folgender: Die Mittelpunkte aller Hyperbeln, welche Punkte gleicher Tangentenrichtung p in (1) verbinden, liegen auf einem Strahl von der Gleichung (5); die Mittelpunkte aller Hyperbeln, welche durch Punkte gleicher Krümmung 1 gehen, auf einer tricircularen Curve sechster Ordnung von der Gleichung (6), die im Centrum der Kegelschnitte einen vierfachen Punkt besitzt und aus vier gleichen die Axen berührenden Blättern besteht. Die beiden Liniensysteme (5) und (6) bedecken die Ebene derart, dass durch jeden Punkt je eine dieser Linien geht, und es ist der Schnittpunkt der Linien p, ρ Mittelpunkt jener Hyperbel (3), welche in dem System (1) Punkte der Tangentenrichtung p und der Krümmung $\frac{1}{\rho}$ vereinigt.

Den Werthen 0 und ∞ von p entsprechen die Örter

$$x = 0, y = 0; \text{ respective } x = 0;$$

den Werthen 0 und ∞ von ρ die Örter

$$x = 0, y = 0; \text{ respective } y = px;$$

die Deutung dieser Resultate bereitet keine Schwierigkeit.

14. Zwei Systeme von je ∞^2 Curven

$$f_1(x, y, \lambda_1, \mu_1) = 0 \tag{1}$$

$$f_2(x, y, \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{2}$$

können zu einander in Beziehung gesetzt werden dadurch, dass man die veränderlichen Parameter $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ einer Bedingung unterwirft

$$g_1(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = 0; \tag{3}$$

vermöge einer solchen sind einem Individum des einen Systems ∞^1 Curven aus dem andern in bestimmter Weise zugeordnet. Der Ort der Schnittpunkte einander entsprechender Curven ist wieder ein System von ∞^2 Curven, analytisch dargestellt durch das Resultat der Elimination zweier von den vier Parametern zwischen den Gleichungen (1) bis (3). Da aber diese Elimination im Allgemeinen auf vier verschiedene Parameterpaare sich beziehen kann — von den Combinationen λ_1, μ_1; λ_2, μ_2 ist abzusehen — so gibt es auch vier verschiedene Erzeugnisse.

Sind die Parameter noch an eine zweite Bedingung

$$g_2(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{4}$$

gebunden, so ist die Beziehung beider Systeme zu einander derart geregelt, dass jedem Individuum des einen ein oder mehrere Individuen des andern zugeordnet sind, und weil nun drei der Parameter, und zwar im Allgemeinen in vier verschiedenen Combinationen eliminirt werden können, so entspringen hieraus vier verschiedene Erzeugnisse, jedes ein System von ∞^1 Curven darstellend.

Kommt endlich noch eine dritte Bedingung

$$g_3(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{5}$$

hinzu, so ist unter den einander zugeordneten Individuen beider Systeme eine Auswahl getroffen, und das Erzeugniss ist eine Einzelcurve, deren Gleichung sich durch Elimination aller vier Parameter aus den Gleichungen (1) bis (5) ergibt.

Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern.

α) Die beiden Systeme von je ∞^2 Geraden

$$y = \lambda_1 x + \mu_1 \tag{1*}$$

$$y = \lambda_2 x + \mu_2 \tag{2*}$$

seien zunächst nur an die eine Bedingung

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\mu_1 + d\mu_2 = g \tag{3*}$$

geknüpft. Eliminirt man λ_1, λ_2, so entsteht, nach Ablösung von $x = 0$, die Gleichung

$$y = \frac{g - c\mu_1 - d\mu_2}{a+b} x + \frac{a\mu_1 + b\mu_2}{a+b} \tag{A}$$

welche ∞^2 Gerade vorstellt; die zu einem festen μ_1 gehörigen ordnen sich zu Strahlenbüscheln mit Trägern auf der Geraden $x = \frac{b}{d}$, die einem stehenden μ_2 entsprechenden zu Strahlenbüscheln mit Trägern auf $x = \frac{a}{c}$ Das Ergebniss ist synthetisch leicht einzusehen. Bei stehenden μ_1, μ_2 stellen (1*), (2*) zwei Strahlenbüschel dar, deren Träger auf der y-Axe liegen und die vermöge (3*) projectivisch auf einander bezogen sind; da ferner vermöge (3*) λ_1, λ_2 gleichzeitig unendlich werden, so fallen zwei homologe Strahlen mit der y-Axe zusammen und das übrige Erzeugniss ist die Gerade (A).

Die Elimination von μ_1, μ_2 führt auf

$$y = \frac{c\lambda_1 + d\lambda_2}{c+d} x + \frac{g - a\lambda_1 - b\lambda_2}{c+d}, \qquad (B)$$

das entsprechende Erzeugniss ist wieder ein System von ∞^2 Geraden, die sich in Strahlenbüschel mit Trägern auf den Geraden $x = \frac{b}{d}$ und $x = \frac{a}{c}$ ordnen, je nachdem man λ_1 oder λ_2 als fest betrachtet. Geometrisch geht dies aus der Wahrnehmung hervor, dass (1*) und (2*) bei festen λ_1 und λ_2 zwei Parallelstrahlenbüschel repräsentiren, die vermöge (3*) perspectivisch auf einander bezogen sind derart, dass das selbstentsprechende Element die unendlich ferne Gerade der Ebene ist; das übrige Erzeugniss ist die Gerade (B).

Aus der Elimination von λ_1, μ_2 entspringt die Gleichung

$$d\lambda_2 x^2 - dxy + (g - b\lambda_2 - c\mu_1)x - ay + a\mu_1 = 0, \qquad (C)$$

welche ∞^2 Hyperbeln darstellt; ihre Mittelpunkte liegen auf der festen Geraden $x = -\frac{a}{d}$, eine ihrer Asymptoten ist der y-Axe parallel. Synthetisch wird dies sofort klar, wenn man beachtet, dass (1*) bei stehendem λ_1 ein Parallelstrahlenbüschel, (2*) bei festem μ_2 ein Centralstrahlenbüschel darstellt, welche vermöge (3) projectivisch auf einander bezogen sind derart, dass dem unendlich fernen Strahl im ersten die y-Axe im zweiten zugeordnet ist.

Eliminirt man schliesslich λ_2, μ_1, so kommt die Gleichung

$$c\lambda_1 x^2 - cxy + (g - a\lambda_1 - d\mu_2)x - by + b\mu_2 = 0 \qquad (D)$$

zu Stande; ihr geometrisches Äquivalent ist wieder ein System von ∞^2 Hyperbeln, deren Centra auf der Geraden $x = -\frac{b}{c}$ liegen, während eine ihrer Asymptoten der y-Axe parallel ist. Die synthetischen Gründe hiefür sind den vorigen analog.

3) Dieselben Geradensysteme

$$y = \lambda_1 x + \mu_1 \tag{1*}$$

$$y = \lambda_2 x + \mu_2 \tag{2*}$$

sind durch die Relationen

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 = c \tag{3**}$$

$$d\mu_1 + f\mu_2 = g. \tag{4**}$$

zwischen ihren Parametern derart eindeutig auf einander bezogen, dass parallelen Geraden des einen auch parallele Gerade des andern Systems entsprechen und dass einem Strahlenbüschel aus einem Punkte der y-Axe im ersten System ein ebensolches Strahlenbüschel im zweiten System zugeordnet ist.

Die Elimination von μ_1, λ_2, μ_2 ergibt

$$y = \frac{cf - \lambda_1(af - bd)}{b(d+f)} x + \frac{g}{d+f}, \tag{E}$$

d. i. ein Strahlenbüschel aus dem Punkte $\left(0, \frac{g}{d+f}\right)$ Es handelt sich bei stehendem λ_1 um das Erzeugniss zweier projectivischen Parallelstrahlenbüschel, welche die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene als selbstentsprechendes Element gemein haben. Aus dieser Bemerkung folgt zugleich, dass die Elimination von λ_1, μ_1, μ_2 zu demselben Erzeugniss führen müsse; sie liefert die Gleichung

$$y = \frac{cd + \lambda_2(af - bd)}{a(d+f)} x + \frac{g}{d+f}, \tag{E*}$$

welche in der That vermöge (3**) mit (E) zusammenfällt.

Aus der Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2$ geht, nach Ablösung von $x = 0$, die Gleichung

$$y = \frac{c}{a+b} x + \frac{bg + \mu_1(af - bd)}{f(a+b)} \tag{F}$$

hervor, welcher ein Parallelstrahlenbüschel entspricht. Bei festem μ_1 hat man es mit zwei Strahlenbüscheln zu thun, welche die y-Axe als selbstentsprechendes Element gemein haben. Zu demselben Resultate führt nothwendig die Elimination von λ_1, μ_1, λ_2; sie gibt, wieder nach Ablösung von $x = 0$, die Gleichung

$$y = \frac{c}{a+b}x + \frac{ag - \mu_2(af - bd)}{d(a+b)}, \qquad (F^*)$$

welche vermöge (4**) mit (F) übereinstimmt.

In dem vorliegenden besonderen Falle liefern also die beiden Systeme (1*) und (2*) nur zwei von einander verschiedene Erzeugnisse.

γ) Die Parameter der beiden Geradensysteme

$$y = \lambda_1 x + \mu_1 \qquad (1^*)$$

$$y = \lambda_2 x + \mu_2 \qquad (2^*)$$

seien endlich an die drei Bedingungen

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 = c \qquad (3^{**})$$

$$d\mu_1 + f\mu_2 = g \qquad (4^{**})$$

$$h\lambda_1 + k\mu_2 = l \qquad (5^{**})$$

gebunden; durch Elimination erhält man die Gleichung

$$cdkx^2 - (a+b)dkxy + \\ + (bdl - afl + agk + cfh)x - (d+f)bhy + bgh = 0, \qquad (G)$$

welche eine Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen $x = 0$ und $\frac{y}{x} = \frac{c}{a+b}$ darstellt. Greift man auf β) zurück, so kommt diese Hyperbel als Erzeugniss der beiden Strahlenbüschel (E) und (F^*) zu Stande, welche durch die neu hinzugetretene Bedingung (5**) in perspectivische Verwandtschaft gesetzt sind; dem unendlich fernen Element von (F^*) entspricht in (E) die y-Axe und ein Element von (E) ist den Strahlen von (F^*) parallel, wodurch die gefundenen Asymptotenrichtungen synthetisch begründet sind.

15. Man kann die beiden Curvensysteme

$$f_1(x, y, \lambda_1, \mu_1) = 0 \qquad (1)$$

$$f_2(x, y, \lambda_2, \mu_2) = 0 \qquad (2)$$

auch in anderer Weise, nämlich durch Vermittlung ihrer Differentialgleichungen oder der abgeleiteten Systeme

$$\varphi_1(x, y, p_1, \rho_1) = 0 \tag{3}$$

$$\varphi_2(x, y, p_2, \rho_2) = 0 \tag{4}$$

zu einander in Beziehung bringen; in diesen letzteren Gleichungen haben p_1, p_2 einer- und ρ_1, ρ_2 anderseits dieselbe geometrische Bedeutung.

Tritt zu den Gleichungen (3) und (4) eine weitere Gleichung von der Form

$$\psi_1(x, y, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = 0, \tag{5}$$

so können zwischen den drei Gleichungen (3), (4) und (5) zwei von den vier neuen Parametern p_1, p_2, ρ_1, ρ_2 eliminirt werden, und nachdem sich diese Elimination — von p_1, ρ_1 und p_2, abgesehen — auf vier verschiedene Combinationen beziehen kann, so erhält man auf solche Weise im Allgemeinen vier verschiedene Erzeugnisse, jedes derselben ein System von ∞^2 Curven darstellend. Die Bedeutung dieser Systeme ist eine verschiedene, je nach den eliminirten Grössen; hat man beispielsweise p_1, p_2 ausgeschieden, so ist das Erzeugniss ein System $F(x, y, \rho_1, \rho_2) = 0$, dessen Individuen solche Punkte der Ebene vereinigen, in welchen eine Curve des Systems (1) von der Krümmung $\frac{1}{\rho_1}$ einer Curve des Systems (2) von der Krümmung $\frac{1}{\rho_2}$ begegnet, jedoch so, dass zwischen den Coordinaten dieses Punktes, den Tangentenrichtungen und den genannten Krümmungen die Relation (5) platzgreift.

Wird neben (5) noch eine weitere Bedingung derselben Form

$$\psi_2(x, y, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = 0 \tag{6}$$

aufgestellt, so lassen sich drei Parameter, und zwar in vier verschiedenen Combinationen eliminiren; dementsprechend ergeben sich im Allgemeinen vier verschiedene Erzeugnisse, jedes aus ∞^1 Curven zusammengesetzt. Hat man beispielsweise p_1, p_2, ρ_2 eliminirt, so wird das Ergebniss ein System $F(x, y, \rho_1) = 0$ sein, dessen Individuen Punkte der Ebene verbinden, in welchen eine Curve des Systems (1) von bestimmter Krümmung $\frac{1}{\rho_1}$ einer Curve des Systems (2) begegnet derart, dass die Coordinaten dieses Punktes, die Tangentenrichtungen und die Krümmungen beider Curven die Bedingungen (5) und (6) erfüllen.

Kommt zu (5) und (6) noch eine dritte gleichartige Bedingung

$$\psi_3(x, y, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = 0, \tag{7}$$

dann können zwischen den fünf Gleichungen (3) bis (7) alle vier Parameter und nur auf eine Art eliminirt werden; das Resultat ist eine einzelne Curve $F(x, y) = 0$, welche Punkte der Ebene verbindet, in denen sich Curven beider Systeme den durch (5), (6) und (7) vorgezeichneten Bedingungen gemäss begegnen.

16. Als Beispiel mögen verschiedene Erzeugnisse zweier Kreisnetze in Betracht gezogen werden. Zur Vereinfachung der Rechnungen und Resultate beschränken wir uns auf zwei Netze mit der Potenz Null und den Radicalcentren $(\pm a, 0)$.

Ihre Gleichungen lauten

$$x^2+y^2-2\lambda_1(x-a)-2\mu_1 y-a^2 = 0 \tag{1}$$

$$x^2+y^2-2\lambda_2(x+a)-2\mu_2 y-a^2 = 0 \tag{2}$$

und die Gleichungen der abgeleiteten Systeme

$$[(x-a)^2+y^2]\sqrt{1+p_1^2}-2p_1\rho_1(x-a)+2\rho_1 y = 0 \tag{3}$$

$$[(x+a)^2+y^2]\sqrt{1+p_2^2}-2p_2\rho_2(x+a)+2\rho_2 y = 0. \tag{4}$$

α) Zuvörderst handle es sich um die Schnittpunkte gleich grosser (und gleichartig gekrümmter) Kreise beider Netze. Die entsprechende Bedingung lautet

$$\rho_1 = \rho_2 (= \rho); \tag{5}$$

führt man sie in (3) und (4) ein, so ist zwischen beiden Gleichungen nur die Elimination von ρ möglich und ihr Resultat ist

$$(x^2+y^2)(Ax-By)-aC(x^2-y^2)+2aDxy-a^2(Ax+By)+ \\ +a^3C = 0, \tag{$\mathfrak{A}$}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$\begin{aligned} p_2\sqrt{1+p_1^2}-p_1\sqrt{1+p_2^2} &= A \\ \sqrt{1+p_1^2}-\sqrt{1+p_2^2} &= B \\ p_2\sqrt{1+p_1^2}+p_1\sqrt{1+p_2^2} &= C \\ \sqrt{1+p_1^2}+\sqrt{1+p_2^2} &= D. \end{aligned}$$

Die Punkte, in welchen sich gleich grosse und gleichartig gekrümmte Kreise beider Netze begegnen, derart, dass sie dort bestimmte Tangentenrichtungen p_1, p_2 aufweisen, liegen demnach auf einer circularen Curve dritter Ordnung, welche durch die Radicalcentra der beiden Netze geht.

β) An zweiter Stelle sollen die Punkte gegenseitiger Berührung der Kreise beider Netze in Betracht gezogen werden. Die hiefür massgebende Bedingung

$$p_1 = p_2 (= p) \tag{6}$$

in die Gleichungen (3) und (4) eingeführt gestattet die Elimination von p allein, deren Resultat lautet:

$$\begin{aligned} K(x^2+y^2)^3+2aLx(x^2+y^2)^2+a^2M(x^2+y^2)^2-4a^2Kx^2(x^2+y^2)- \\ -4a^3Lx(x^2-y^2)+a^4N(x^2+y^2)-4a^4Px^2-16a^2Qy^2+ \\ +2a^5Lx+a^6P = 0, \quad (\mathfrak{B}) \end{aligned}$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist:

$$\begin{aligned} (\rho_1-\rho_2)^2 &= K \\ \rho_1^2-\rho_2^2 &= L \\ 3\rho_1^2-2\rho_1\rho_2+3\rho_2^2 &= M \\ 3\rho_1^2+2\rho_1\rho_2+3\rho_2^2 &= N \\ (\rho_1+\rho_2)^2 &= P \\ \rho_1^2\rho_2^2 &= Q. \end{aligned}$$

Die Punkte also, in welchen sich Kreise des ersten Netzes von der Krümmung $\frac{1}{\rho_1}$ mit Kreisen des zweiten Netzes von der Krümmung $\frac{1}{\rho_2}$ berühren, liegen auf einer tricircularen Curve sechster Ordnung, welche durch die Radicalcentra der beiden Netze hindurchgeht.

γ) An dritter Stelle handle es sich um Punkte, in welchen sich Kreise aus beiden Netzen von gleicher (und gleichartiger) Krümmung berühren. Die entsprechenden Bedingungen

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 (= p) \\ \rho_1 &= \rho_2 (= \rho) \end{aligned} \tag{7}$$

in die Gleichungen (3) und (4) eingeführt gestatten die Elimination von p oder ρ. Scheidet man p aus, so kommt die Gleichung

$$x^2 + (y \mp \sqrt{\rho^2 - a^2})^2 = \rho^2 \tag{$\mathfrak{C}$}$$

zu Stande; dieselbe stellt ein Kreisbüschel, und zwar das den beiden Netzen gemeinsame Büschel dar. In der That fasst jeder Kreis dieses Büschels und nur dieser Punkte der Ebene zusammen, durch welche Kreise gleicher Krümmung und gleicher Tangentenrichtung aus beiden Netzen laufen.

Eliminirt man hingegen ρ, so ergibt sich als Resultat

$$p(y^2 - x^2) + 2xy + pa^2 = 0, \tag{$\mathfrak{D}$}$$

d. i. ein System gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $(\pm a, 0)$ mit dem Centrum $(0, 0)$; nach Artikel 4, γ) ist dies das abgeleitete System des Kreisbüschels ($\mathfrak{C}$). Thatsächlich sind die Punkte, in welchen Kreise gleicher Krümmung bei bestimmter Tangentenrichtung p einander berühren, identisch mit den Punkten der Tangentenrichtung p in dem System ($\mathfrak{C}$).

Man hätte die Resultate ($\mathfrak{C}$) und ($\mathfrak{D}$) selbstverständlich auch aus jenen ($\mathfrak{B}$) und ($\mathfrak{A}$) ableiten können, wenn man dort $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, hier $p_1 = p_2 = p$ gesetzt hätte.

δ) Es sei endlich der Ort solcher Punkte der Ebene zu untersuchen, in welchen sich Kreise der Netze (1) und (2) von entgegengesetzt gleicher Krümmung (also gleiche Kreise äusserlich) berühren. Wenn man die hiefür geltenden Bedingungen

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 (= p) \\ \rho_1 &= -\rho_2 (= \rho) \end{aligned} \tag{8}$$

in (3) und (4) einträgt, so gelangt man zu dem Gleichungspaar

$$[(x-a)^2+y^2]\sqrt{1+p^2}-2p\rho(x-a)+2\rho y=0 \qquad (3^*)$$
$$[(x+a)^2+y^2]\sqrt{1+p^2}+2p\rho(x+a)-2\rho y=0, \qquad (4^*)$$

aus welchem einmal p, ein zweitesmal ρ eliminirt werden kann.

Durch Elimination von p ergibt sich die Gleichung

$$(x^2+y^2)^3-2a^2(x^4-y^4)+a^4(x^2+y^2)-4a^2\rho^2y^2=0; \qquad (\mathfrak{C})$$

man hätte sie auch aus ($\mathfrak{B}$) durch die Substitution $\rho_1=-\rho_2=\rho$ ableiten können. Wenn also aus den beiden Netzen (1) und (2) solche Paare von Kreisen des Halbmessers ρ ausgewählt werden, welche in äusserer Berührung stehen, so ist der Ort der Berührungspunkte eine tricirculare Curve sechster Ordnung und ($\mathfrak{C}$) seine Gleichung. Wegen ihrer leichten Construction und ihrer charakteristischen Formen soll diese Curve als Beispiel der genannten Curvengattung etwas näher erörtert werden.

Behufs Construction beschreibe man aus den Radicalcentren A, A' (wobei $AA'=2a$) der Netze Kreise K, K' mit dem Halbmesser ρ und trage eine Strecke von der Länge 2ρ so ein, dass der eine Endpunkt P auf K, der andere P' auf K' liegt. Der Mittelpunkt M von PP' ist ein Punkt der Curve; denn die aus P und P' mit dem Radius ρ beschriebenen Kreise k und k' gehen durch A und A' beziehungsweise und berühren einander in M von aussen (Fig. 5).

Die Curve, welche symmetrisch ist in Bezug auf die Coordinatenaxen, hat die Punkte A, A' und den Mittelpunkt O von AA' zu Doppelpunkten. Zur Bestimmung ihrer Tangenten in O führt die Gleichung

$$a^2(x^2+y^2)-4\rho^2y^2=0,$$

aus welcher zu entnehmen ist, dass jene Tangenten reell und verschieden, reell und vereinigt oder imaginär sind, je nachdem ρ grösser, gleich oder kleiner ist als $\frac{a}{2}$ — im mittleren dieser drei Fälle reducirt sich der reelle Theil der Curve auf die drei Doppelpunkte. Die Tangenten in A, A' $(\pm a, 0)$ sind der Richtung nach bestimmt durch die Gleichung

$$a^2x^2+(a^2-\rho^2)y^2=0$$

und daher reell und getrennt, reell und vereinigt oder imaginär, je nachdem ρ grösser, gleich oder kleiner ist als a. In dem mittleren dieser drei Fälle zerfällt die Curve in einen Kreis und eine bicirculare Curve vierter Ordnung; für $\rho = a$ lässt sich nämlich die Gleichung ($\mathfrak{E}$) unter Zuhilfenahme der Identität

$$(x^2+y^2-a^2)^3 = (x^2+y^2)^3 - 3a^2(x^2+y^2)^2 + 3a^4(x^2+y^2) - a^6$$

umformen in

$$(x^2+y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-3y^2)] = 0.$$

Die sechs Tangenten in den imaginären Kreispunkten ordnen sich zu den drei Paaren conjugirter imaginärer Geraden

$$y = \pm ix, \qquad y = \pm i(x-a), \quad y = \pm i(x+a),$$

deren Schnittpunkte (0, 0), (a, 0) und ($-a$, 0) sind; die drei Doppelpunkte der Curve spielen also auch die Rolle ihrer Doppelbrennpunkte. In die eben genannten drei Paare imaginärer Geraden zerfällt die ganze Curve ($\mathfrak{E}$) für $\rho = 0$; denn es ist

$$(x^2+y^2)^3 - 2a^2(x^4-y^4) + a^4(x^2+y^2) =$$
$$= (x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2].$$

In dem Falle $\rho < a$, wo die Punkte A, A' conjugirte Punkte der Curve sind, gehen an sie aus dem Mittelpunkte O zwei reelle Doppeltangenten; die Gleichungen derselben ergeben sich, wenn man ($\mathfrak{E}$) in Polarcoordinaten r, ω umsetzt, in eben diesen Coordinaten als

$$\omega = \pm \arccos \frac{\rho}{a};$$

in diesem Falle besitzt die Curve sechs Wendepunkte, davon zwei im Mittelpunkte O vereinigt, welcher dadurch als Inflexionsknoten charakterisirt ist; in den Fällen $\rho \gtreqless a$ bleiben nur diese zwei Inflexionen reell.

In den Figuren 6 bis 8 sind drei charakteristische Formen der Curve, entsprechend $\rho > a$, $\rho = a$, $\frac{a}{2} < \rho < a$, dargestellt.

Eliminirt man weiter zwischen den Gleichungen (3*) und (4*) den Parameter ρ, so ergibt sich als Resultat

$$(x^2+y^2)(px-y) - a^2(px+y) = 0. \qquad (\mathfrak{F})$$

Wählt man also aus den Netzen (1) und (2) Paare einander berührender gleicher Kreise derart, dass die gemeinsame Tangente eine bestimmte durch p charakterisirte Richtung hat, so liegen die Berührungspunkte auf einer circularen Curve dritter Ordnung, deren Gleichung ($\mathfrak{F}$) ist; sie geht durch die Radicalcentra A, A' der Netze und durch den Mittelpunkt O von AA'. Übrigens ist das Curvensystem ($\mathfrak{F}$) bereits aufgetreten, und zwar als abgeleitetes System zweiter Ordnung bei einem System confocaler Centralkegelschnitte (Artikel 4, β)) und bei einem Kreisbüschel (Artikel 4, γ)).

17 Die Betrachtungen des vorigen Artikels, welche im Wesentlichen darauf hinausgehen, in der Ebene zweier Systeme von je ∞^2 Curven solche Örter aufzusuchen, deren Punkte in Bezug auf Tangentenrichtung und Krümmung der in ihnen zusammentreffenden Curven beider Systeme gewisse Bedingungen erfüllen, können auch auf mehr als zwei Systeme ausgedehnt werden. Statt allgemeiner Erörterungen, die sich den obigen ähnlich gestalten würden, soll ein charakteristisches Beispiel vorgeführt werden.

In der Ebene dreier Kreisnetze einen Ort zu bestimmen, in dessen Punkten Kreise gleicher Krümmung aus allen drei Netzen einander berühren.

Sind (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) die Potenzcentra, π_1, π_2, π_3 die Potenzen der drei Netze, so lauten ihre Gleichungen

$$x^2+y^2-2\lambda_i(x-a_i)-2\mu_i(y-b_i)-a_i^2-b_i^2+\pi_i = 0, \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Durch Elimination der Parameter λ_i, μ_i folgen daraus die Gleichungen der abgeleiteten Systeme

$$|(x-a_i)^2+(y-b_i)^2-\pi_i|\sqrt{1+p_i^2}-2p_i\rho_i(x-a_i)+$$
$$+2\rho_i(y-b_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Den Bedingungen des Problems zufolge soll

$$\begin{gathered} p_1 = p_2 = p_3 (= p) \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 (= \rho) \end{gathered} \qquad (3)$$

sein; führt man dies in die Gleichungen (2) ein und eliminirt hierauf p und ρ, so ergibt sich für den gesuchten Ort die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-\pi_1 & x-a_1 & y-b_1 \\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-\pi_2 & x-a_2 & y-b_2 \\ (x-a_3)^2+(y-b_3)^2-\pi_3 & x-a_3 & y-b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2-\pi_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2-\pi_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2-\pi_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2+b_1^2-\pi_1 & 1 \\ a_2 & a_2^2+b_2^2-\pi_2 & 1 \\ a_3 & a_3^2+b_3^2-\pi_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\beta,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1^2+b_1^2-\pi_1 \\ a_2 & b_2 & a_2^2+b_2^2-\pi_2 \\ a_3 & b_3 & a_3^2+b_3^2-\pi_3 \end{vmatrix} = \Pi,$$

so heisst die Gleichung (4) in entwickelter Form

$$\Delta(x^2+y^2)-2\alpha x-2\beta y-\Pi = 0 \qquad (4^*)$$

und lässt nun erkennen, dass der gesuchte Ort ein Kreis ist. Werden in dem linksseitigen Polynom in (4*) an Stelle von x, y die Coordinaten a_1, b_1 eingeführt, so nimmt dasselbe, wenn man mit

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{matrix}$$

das System der Adjuncten der Determinante Δ bezeichnet, den Werth

$$\begin{aligned} \Delta(a_1^2+b_1^2)&-(a_1^2+b_1^2-\pi_1)(a_1A_1+b_1B_1+C_1) \\ &-(a_2^2+b_2^2-\pi_2)(a_1A_2+b_1B_2+C_2) \\ &-(a_3^2+b_3^2-\pi_3)(a_1A_3+b_1B_3+C_3) \\ = \Delta(a_1^2+b_1^2)&-\Delta(a_1^2+b_1^2-\pi_1) = \Delta\pi_1 \end{aligned}$$

an; somit ist $\frac{\Delta\pi_1}{\Delta} = \pi_1$ die Potenz des Punktes (a_1, b_1) in Bezug auf den Kreis (4*), dieser Kreis gehört also dem ersten der drei Netze an. In gleicher Weise zeigt sich, dass er auch dem zweiten und dritten angehört. Es ergibt sich also das geometrisch unmittelbar einleuchtende Resultat, dass der gesuchte Ort identisch ist mit dem den drei Netzen gemeinsamen Kreise.

18. Bei einigen besonderen Formen der Gleichung des abgeleiteten Systems ist es leicht, einen Schluss auf die Natur des ursprünglichen Systems zu ziehen; dem entsprechen ebenso viele Fälle, in welchen sich aus dem Bau einer Differentialgleichung zweiter Ordnung die Structur ihres allgemeinen Integrals vorausbestimmen lässt. Die einfachsten Fälle dieser Art sind im Folgenden entwickelt.

α) Enthält die Gleichung des abgeleiteten Systems die Variabeln x, y nicht, so hat sie eine der Formen

$$\varphi(q) = 0, \qquad \varphi(p, q) = 0 \tag{1}$$

oder auch, wenn man an Stelle von q den Krümmungsradius einführt,

$$\Phi(\rho) = 0, \qquad \Phi(p, \rho) = 0. \tag{1*}$$

Jede wie immer in der Ebene verzeichnete Linie kann in diesem Falle als zum abgeleiteten System gehörig angesehen werden, ein abgeleitetes System im eigentlichen Sinne gibt es also nicht; mit andern Worten, durch jeden Punkt der Ebene geht eine Curve des ursprünglichen Systems so, dass sie dort eine bestimmte Richtung und eine bestimmte (durch (1*) vorgezeichnete) Krümmung hat. Daraus folgt, dass das ursprüngliche System aus congruenten Curven ähnlicher Lage besteht, so dass es sich jeder Translation gegenüber invariant verhält; seine Gleichung muss daher die Form haben

$$f(x+\lambda, y+\mu) = 0, \tag{2}$$

wobei λ, μ willkürliche Constanten sind.

Beispielsweise führt die Gleichung $\varphi(q) = 0$ auf ein oder mehrere Systeme congruenter Parabeln von ähnlicher Lage wie

$$y = ax^2 + Cx + C',$$

wenn $2a$ eine Wurzel von $\varphi(q) = 0$ ist; dieses Resultat aber nimmt, wenn man $\frac{C}{2a} = \lambda$, $\frac{C^2}{4a} - C' = \mu$ setzt, die unter (2) fallende Form

$$y + \mu = a(x+\lambda)^2$$

an. Der Gleichung $\Phi(\rho) = 0$ entsprechen ein oder mehrere Systeme gleicher Kreise in der Ebene, je nachdem sie eine oder mehrere Wurzeln besitzt; ist a^2 eine derselben, so hat das betreffende Kreissystem die Gleichung $(x+\lambda)^2 + (y+\mu)^2 = a^2$ Die Gleichung $\frac{\sqrt{1+p^2}}{q} - a = 0$ ergibt ein System congruenter ähnlich liegender Kettenlinien $y + \mu = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+\lambda}{a}} + e^{-\frac{x+\lambda}{a}}\right)$.

β) Fehlt in der Gleichung des abgeleiteten Systems die Variable y, lautet sie also

$$\varphi(x, q) = 0, \qquad \varphi(x, p, q) = 0 \tag{1}$$

oder in der andern Gestalt

$$\Phi(x, \rho) = 0, \qquad \Phi(x, p, \rho) = 0, \tag{1*}$$

so besteht jenes System entgegen dem allgemeinen Falle nur aus ∞^1 Linien, und zwar ist es das System der Parallelen zur y-Axe; da in jedem Punkte einer solchen Parallelen zwischen Tangentenrichtung und Krümmung der durch ihn gehenden Curven des ursprünglichen Systems dieselbe durch (1*) ausgedrückte Beziehung besteht, so verhält sich dieses System einer Translation parallel zur y-Axe gegenüber invariant und hat demnach eine Gleichung von der Structur

$$f(x, y+\mu, \lambda) = 0. \tag{2}$$

γ) Erscheint die Variable x nicht explicit in der Gleichung des abgeleiteten Systems, welche dann eine der Formen

$$\varphi(y, q) = 0 \qquad \varphi(y, p, q) = 0 \tag{1}$$

hat, so führen ähnliche Betrachtungen zu dem Schlusse, dass das ursprüngliche System bei jeder Translation parallel zur

.1.

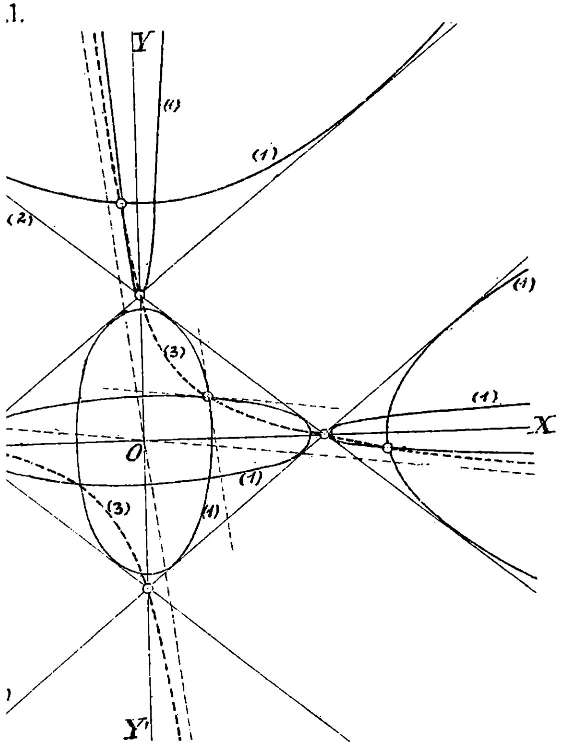


Fig. 2.

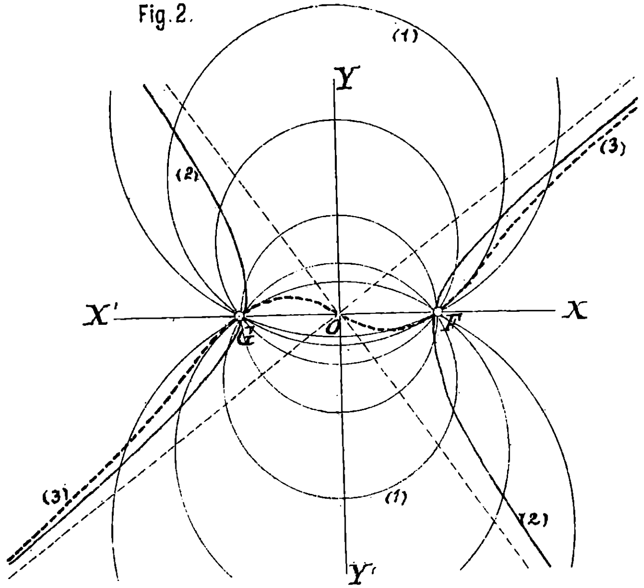


Fig. 3.

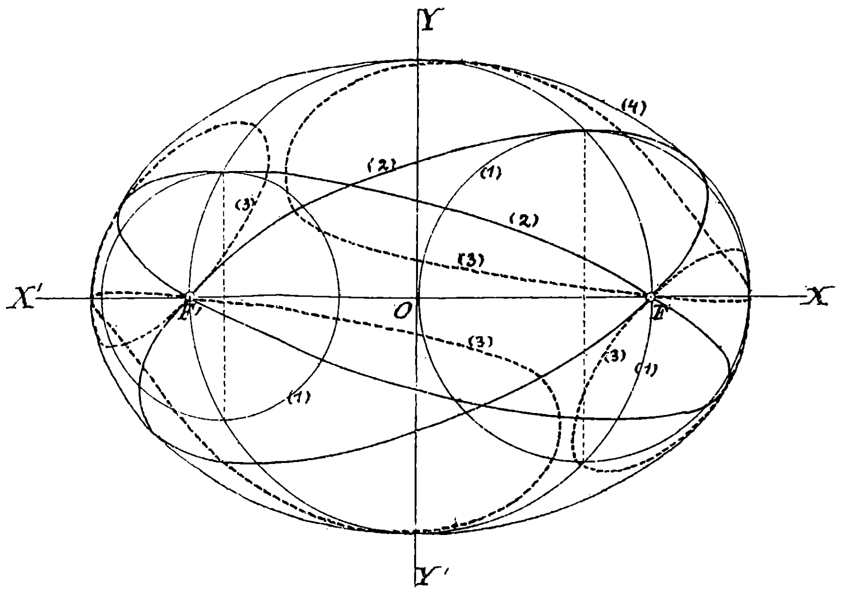


Fig. 4

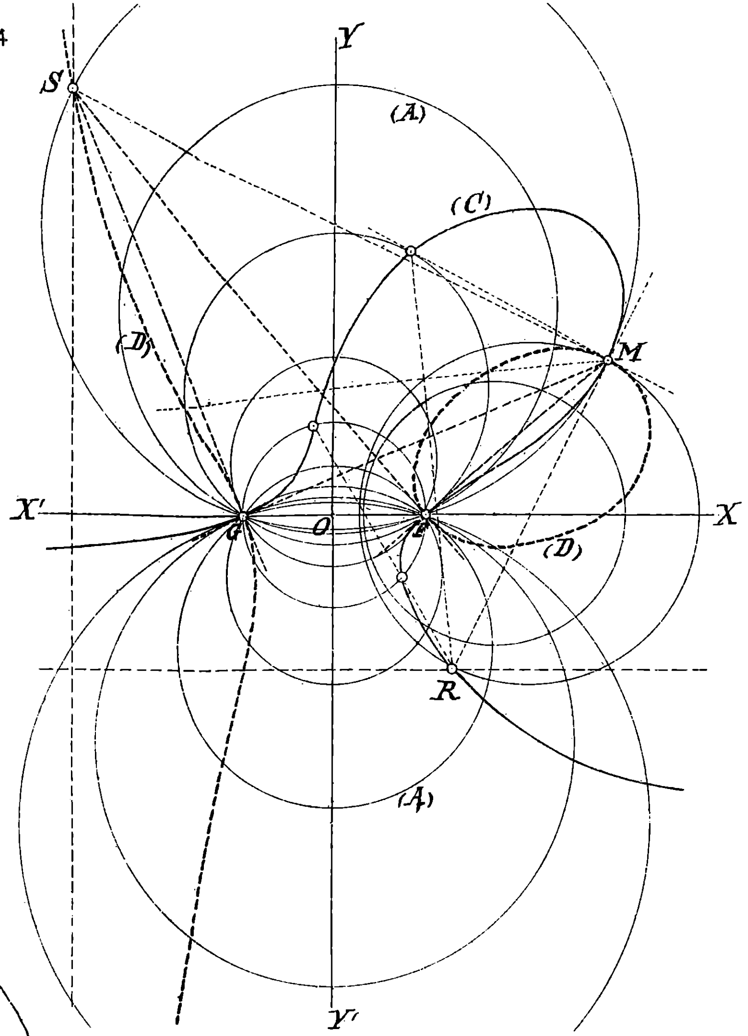


Fig. 5.

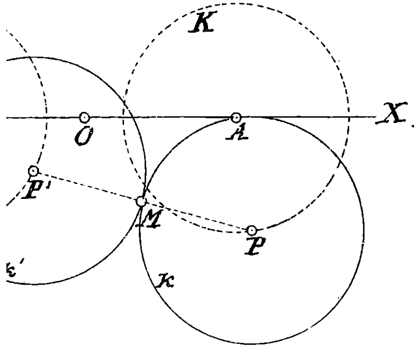


Fig. 6.

$\rho > a$

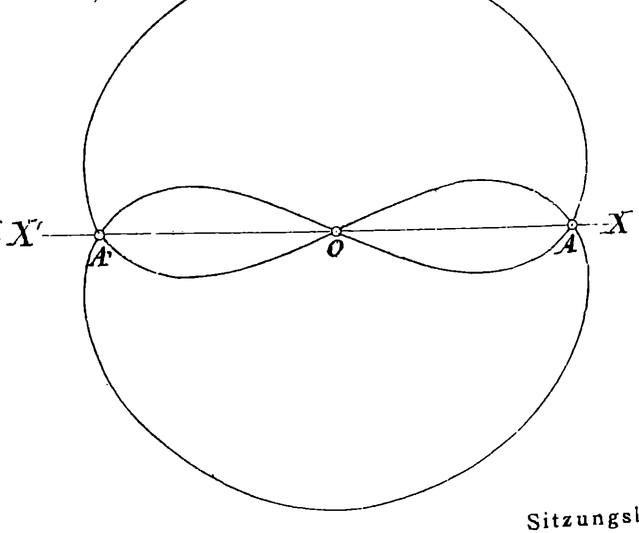


Fig. 7.

$\rho = a$

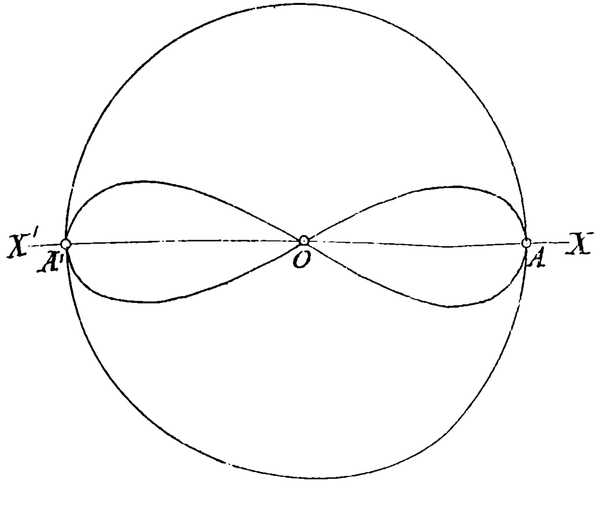
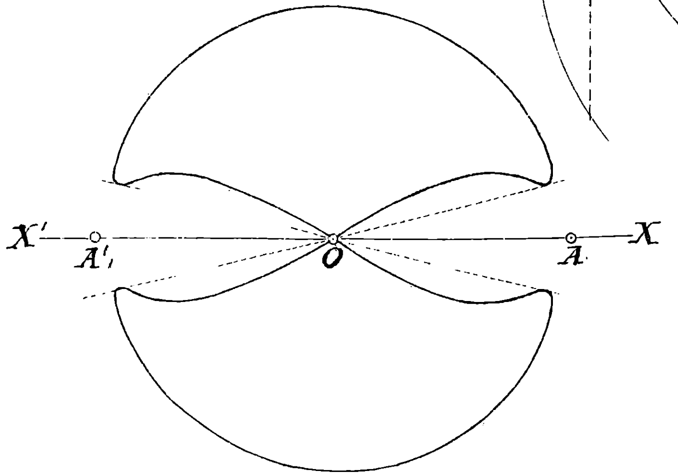


Fig. 8.

$\frac{a}{2} < \rho < a$



Ph. Lith. Anst. v. J. Barth Wien VI.

x-Axe unverändert bleibt, dass ihm also eine Gleichung der allgemeinen Gestalt

$$f(x+\lambda, y, \mu) = 0 \tag{2}$$

zukommt.

So gibt beispielsweise Lagrange[1] das Integral der Differentialgleichung

$$q^2-2A^2qy+A^2p^2 = 0$$

in der Form

$$y-\frac{a}{2}x^2-bx-\frac{a^2+A^2b^2}{2A^2a}=0$$

an, indem er die willkürlichen Constanten mit a, b bezeichnet; führt man an ihre Stelle neue ein mittels der Substitution $\frac{b}{a}=\lambda$, $\frac{a}{2}=\mu$, so kann diesem Integral ohne Mühe die mit (2) übereinstimmende Gestalt

$$y-\frac{\mu}{A^2}=\mu(x+\lambda)^2$$

verliehen werden.

---

[1] Leçons sur le calcul des fonctions, p. 227.