Über einige particuläre Lösungen der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem Kreiscylinder und deren Anwendung

E. Kobald in Leoben.

Denkt man sich in der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad 1)$$

für w gesetzt:

$$w = u \,.\, v,$$

wobei v nur eine Function von y, z und t sein soll, dagegen u nur von x und t abhänge, so ergibt sich:

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)}{v}.$$

Indem beide Seiten dieser Gleichung nur Functionen von t allein sein können, setze man:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + v f(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u f(t).$$

Macht man aber die Substitutionen:

$$v = v' \; e^{\int f(t)\, dt}$$

$$u = u' \,.\, e^{-\int f(t)\, dt}$$

so ergeben sich die einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 1a)$$

Nachdem so die vorgelegte Gleichung 1) in die zwei Gleichungen 1 a) gespalten ist, denke man sich dieselbe auf einen nach beiden Seiten unbegrenzten Kreiscylinder, bei welchem rings um die Axe Alles symmetrisch ist, bezogen. Durch Einführung von Cylindercoordinaten nimmt dann die zweite der Gleichungen 1 a) mit Weglassung der Accente die Form an:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}\right). \qquad 2)$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichung ist:

$$v = e^{-a^2 q^2 t} J(qr), \qquad 3)$$

wo q eine beliebige Constante und $J(qr)$ die Bessel'sche Function 0ter Ordnung, erster Art bedeuten möge. In bekannter Weise erhält man aus 3) die weitere particuläre Lösung:

$$v = \int_0^\infty e^{-a^2 t q^2} J(qr)\, dr$$

Sieht man von einem constanten Factor ab, so kann gesetzt werden:

$$J(qr) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(qr\cos\omega)\, d\omega.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für v ein, so erhält man hiefür:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty e^{-a^2 t. q^2} \cos(qr\cos\omega)\, dq$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 t . q^2} \cos(qr \cos\omega)\, dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2\cos^2\omega}{4a^2 t}}$$

Mit Weglassung eines constanten Factors ergibt sich also.

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2 \cos^2\omega}{4a^2 t}} . d\omega$$

Führt man statt ω eine neue Variable φ mittelst der Substitution $\omega = \frac{1}{2}\varphi$ ein, so wird mit Unterdrückung des Factors $\frac{1}{2}$

$$v = \frac{e^{-\frac{r^2}{8a^2 t}}}{\sqrt{t}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{8a^2 t} . \cos\varphi} d\varphi.$$

Das in dem Ausdrucke auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende Integral ist aber eine Cylinderfunction 0ter Ordnung; man kann daher auch setzen:

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{8a^2 t}} J\left(\frac{r^2}{8a^2 t} i\right). \tag{4}$$

Um das so gewonnene Resultat zu verallgemeinern, transformire man die Gleichung 2) dadurch, dass man an Stelle der unabhängigen Variablen t und r zwei andere, ρ und τ, welche durch die Gleichungen

$$\tau = l(t)$$

$$\rho = \frac{r^2}{4a^2 t}$$

definiert sind, einführe. Man erhält dann:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r}{2a^2 t} \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2 t}\left\{\rho \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \rho}\right\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{t}\left\{\frac{\partial v}{\partial \tau} - \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right\}$$

Die transformirte Gleichung ist also:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (1+\rho) \frac{\partial v}{\partial \rho}. \tag{5)}$$

Sucht man derselben durch einen Ansatz von der Form:

$$v = e^{m\tau}\, u,$$

wo u eine Function des Argumentes ρ allein ist, zu genügen, so hat man zur Bestimmung von u die Gleichung:

$$\rho \frac{d^2 u}{d\rho^2} + (1+\rho) \frac{du}{d\rho} - mu = 0. \tag{5a)}$$

Jenes particuläre Integral der Gleichung $5a$), welches für $\rho = 0$ endlich bleibt, lässt sich in Reihenform leicht darstellen; man erhält nämlich:

$$u_\rho = 1 + \frac{m_1}{1!}\rho + \frac{m_2}{2!}\rho^2 + \frac{m_3}{3!}\rho^3 + \tag{6)}$$

wenn mit $m_1, m_2, \ldots$ die Binomialcoëfficienten bezeichnet werden Eine Lösung der Gleichung 5) ist also:

$$v = t^m . u\left(\frac{r^2}{4a^2 t}\right). \tag{7)}$$

Das zweite particuläre Integral von $5a$) lässt sich in bekannter Weise durch ein bestimmtes Integral darstellen. Man erhält nämlich

$$u = \int e^{t\rho} \frac{(t+1)^m}{t^{m+1}}\, dt,$$

wobei die Grenzen aus der Bedingung

$$\left[e^{t\rho} \frac{(t+1)^{m+1}}{t^m}\right] = 0$$

zu bestimmen sind. So lange $(m+1) > 0$ ist, genügt man derselben für einen positiven Werth von ρ, wenn $-\infty$ und -1 als Grenzen gewählt werden. Man erhält also:

$$u = \int_1^\infty e^{-\rho t} \frac{(t-1)^m\, dt}{t^{m+1}}. \tag{8a)}$$

Wenn $0 > m > -1$ ist, wird die obige Bedingung auch erfüllt, wenn als Grenzen die Zahlen -1 und 0 genommen werden. Man erhält dann, abgesehen von einer Constanten, für die Lösung 6) auch den Ausdruck:

$$u = \int_0^1 e^{-\rho t} \frac{(1-t)^m}{t^{m+1}} dt. \tag{8b}$$

Für $m = -\frac{1}{2}$ erhält man als Lösungen die beiden Integrale:

$$\int_1^\infty e^{-\rho t} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t}} = e^{-\frac{1}{2}\rho} \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho t} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

und

$$\int_0^1 e^{-\rho t} \frac{dt}{\sqrt{t - t^2}} = e^{-\frac{1}{2}\rho} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{1}{2}\rho t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen auftretenden Integrale sind aber nichts Anderes als Cylinderfunctionen. Man erhält also als Verallgemeinerung der Gleichung 4) die Lösung:

$$v = \frac{e^{-\frac{r^2}{8a^2t}}}{\sqrt{t}} \left\{ AJ\left(\frac{r^2}{8a^2t} i\right) + BY\left(\frac{r^2}{8a^2t} i\right) \right\}, \tag{9}$$

wo A und B willkürliche Constanten bedeuten. Zu demselben Resultate kommt man auch durch Transformation der Gleichung $5a$), indem man setzt:

$$u = e^{m\rho} . w;$$

dadurch wird:

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left(2m + 1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{dw}{d\rho} + m(m+1) w = 0. \tag{10}$$

Setzt man nunmehr $m = -\frac{1}{2}$, so erhält man die Differentialgleichung für die Cylinderfunctionen mit dem Argumente $\frac{1}{2}\rho$.

Für $m = -1$ ist $w = \text{Const.}$ eine Lösung der Gleichung 10). Dies ergibt für die vorgelegte Gleichung 2) das particuläre Integral

$$v = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}}{t}. \tag{11}$$

Beachtet man, dass nach Gleichung 6) für $m = -1$

$$u = e^{-\rho}$$

ist, so kommt man zu dem gleichen Resultate wie in der Gleichung 11).

Es soll nun eine Lösung hergestellt werden, welche die Eigenschaft hat, dass für $t = 0$

$$v = f(r)$$

wird. Zu dem Zwecke multiplicire man die Gleichung 3) mit

$$qdq\,.\,f(\rho)J(q\rho)\rho\,d\rho$$

und integrire zuerst bezüglich ρ von 0 bis R, wo R den Radius des Cylinders bedeutet, und sodann bezüglich q von 0 bis ∞. Dann ist das gesuchte Integral

$$v = \int_0^\infty e^{-a^2tq^2}\,.\,J(qr)\,qdq \int_0^R f(\rho)\,J(q\rho)\,\rho d\rho. \tag{12}$$

Man denke sich nunmehr diese Gleichung auf den Verlauf einer elektrischen Störung innerhalb eines Querschnittes eines unendlich langen cylindrischen Drahtes angewendet. Durch die Gleichungen 1a) ist gezeigt, wie die Ausbreitung in der Richtung der Axe des Drahtes von jener in der Richtung des Radius getrennt dargestellt werden kann. Wenn die Störung von einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des Drahtes, deren Dicke mit ε bezeichnet werde, ausgeht, so hat die Function f nur für solche Werthe des Argumentes, welche von dem Werthe R nur um eine unbegrenzt kleine Grösse differiren, einen von Null verschiedenen Werth. Setzt man also:

$$\int_{R-\varepsilon}^R \rho f(\rho)\,d\rho = F,$$

so wird:

$$v = F\int_0^\infty e^{-a^2tq^2}\,.\,J(qr)\,J(qR)\,qdq.$$

Der Werth dieses Integrals kann aber wieder durch eine Cylinderfunction ausgedrückt werden; es ist nämlich:[1]

$$\int_0^\infty e^{-a^2tq^2}.J(qr)J(qR)qdq = \frac{1}{2a^2t}e^{-\frac{r^2+R^2}{4a^2t}}.J\left(\frac{rR}{2a^2t}i\right).$$

Demnach kann bei Weglassung constanter Factoren auch gesetzt werden:

$$v = \frac{1}{t}e^{-\frac{r^2+R^2}{4a^2t}}.J\left(\frac{rR}{2a^2t}i\right). \tag{13}$$

Nun ist das Verhalten der Function $J(xi)$ für sehr grosse Werthe von x wie das der Function $\frac{e^x}{\sqrt{x}}$; für sehr kleine Werthe von t wird also:

$$v = \frac{1}{\sqrt{rt}}\cdot e^{-\frac{(R-r)^2}{4a^2t}}$$

Daher ist für $t = 0$ v überall gleich Null, ausgenommen an der Oberfläche des Drahtes, wie es auch der angenommenen Bedingung der Aufgabe entspricht. Für $t = \infty$ ist bei beliebigem Werthe von r die Grösse $v = 0$.

Macht man die allerdings nicht realisirbare Annahme, dass die anfängliche Störung sich nur auf die Punkte der Axe des Drahtes erstreckt, so kommt man analog wie vorhin zu einer Lösung von der Form:

$$v = \int_0^\infty e^{-a^2tq^2}J(qr)qdq = \frac{1}{2a^2t}\; e^{-\frac{r^2}{4a^2t}};^{2}$$

diese ist identisch mit der in Gleichung 11) gegebenen.

[1] Man vergl. Sonine, Math. Annalen, Bd. 16, S. 40.

[2] A. a. O. S. 35.