Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte

(II. Mittheilung)

Victor v. Dantscher.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1895.)

Dritter Abschnitt.

Wie im ersten Abschnitte[1] S. 7 angedeutet wurde, wird man jetzt darauf ausgehen die sämmtlichen Ellipsen E zu ermitteln, welche ein Dreieck $P'P''P'''$ enthalten, das mit dem gegebenen Dreiecke ABC congruent ist.

Von einer solchen Ellipse E weiss man nach dem Satze III), S. 43, dass ihr Umfang ein Minimum ist; stellt sich dabei heraus, dass es nur eine solche Ellipse gibt — was nur von dem Beweise des Satzes abhängt, dass durch die Forderung des Minimums der Werth des Verhältnisses $\frac{b^2}{a^2}$ der Quadrate der Halbaxen der gesuchten Ellipse im Intervalle $(0 \ldots 1)$ eindeutig bestimmt wird — so ist ihr Umfang die gesuchte untere Grenze und mit ihrer Bestimmung die Aufgabe gelöst. Der Beweis des eben angeführten Satzes ist der Gegenstand dieses Abschnittes.

Zur Berechnung der Seiten $P''P'''$, $P'''P'$, $P'P''$ dienen die Formeln 24), II,[2] S. 28, für die Coordinaten der Punkte P'' und P''' als Functionen der Coordinaten x', y' des Punktes P' und der Grössen a^2 und b^2.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. XCIX, Abth. II. a, Jänner 1890.

[2] Die römischen Ziffern I und II bezeichnen den ersten und zweiten Abschnitt.

Mittelst derselben ergibt sich:

$$\overline{P''P'''}^2 = (x''-x''')^2+(y''-y''')^2 = \frac{4\mathfrak{e}'}{(\mathfrak{e}'+1)^2}\left[\frac{a^2y'^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{b^2x'^2}{\mathfrak{a}^2}\right] \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\overline{P'''P'}^2 &= (x'''-x')^2+(y'''-y')^2 \\ &= x'^2+y'^2+\frac{2a}{\mathfrak{e}'+1}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}+\frac{x'y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right]+\frac{a^2}{(\mathfrak{e}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}\mathfrak{e}'+\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \\ &\quad +\frac{2b}{\mathfrak{e}'+1}\left[\frac{y'^2}{\mathfrak{b}}-\frac{x'y'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right]+\frac{b^2}{(\mathfrak{e}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{e}'+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}-\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\overline{P'P''}^2 &= (x'-x'')^2+(y'-y'')^2 \\ &= x'^2+y'^2+\frac{2a}{\mathfrak{e}'+1}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}-\frac{x'y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right]+\frac{a^2}{(\mathfrak{e}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}\mathfrak{e}'-\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \\ &\quad +\frac{2b}{\mathfrak{e}'+1}\left[\frac{y'^2}{\mathfrak{b}}+\frac{x'y'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right]+\frac{b^2}{(\mathfrak{e}'+1)^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{e}'+\frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{2x'y'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man wie früher (I, S. 1)

$$\overline{BC}^2 = \alpha^2 \qquad \overline{CA}^2 = \beta^2 \qquad \overline{AB}^2 = \gamma^2,$$

so hat man die Grössen a^2, b^2, x', y' so zu bestimmen, dass z. B.

$$\overline{P''P'''}^2 = \alpha^2 \qquad \overline{P''P'}^2 = \beta^2, \qquad \overline{P'P''}^2 = \gamma^2 \tag{4}$$

wird.

Führt man wieder ein:

$$x' = a\mathfrak{x}', \qquad y' = b\mathfrak{y}', \qquad (\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 = 1), \qquad \mathfrak{a} = ta, \qquad \mathfrak{b} = (1-t)b, \qquad b^2 = (1-\varkappa)a^2,$$

so wird $\mathfrak{e}' + 1 = \dfrac{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2}{t^2(1-t)^2}$ und gehen die Formeln 1), 2), 3) nach 4) in die folgenden über:

$$\alpha^2 = \frac{4}{[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2]^2}[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)][(1-2t-(1-t^2)\varkappa)\mathfrak{x}'^2 + t^2]a^2 \tag{5}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2]^2}[\mathrm{G}(\mathfrak{x}'^2) + 2\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)}\,\mathrm{H}(\mathfrak{x}'^2)]a^2 \tag{6}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2]^2}[\mathrm{G}(\mathfrak{x}'^2) - 2\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)}\,\mathrm{H}(\mathfrak{x}'^2)]a^2, \tag{7}$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(\mathfrak{x}'^2) = {} & (1-2t)^2\varkappa\mathfrak{x}'^6 + (1-2t)[2(1-2t)(1+t-t^2) - (2-4t-3t^2+2t^3)\varkappa]\mathfrak{x}'^4 \\ & + t^2[2(1-2t)(3-t^2) - (2-t)(2-3t-4t^2+2t^3)\varkappa]\mathfrak{x}'^2 + t^4(2-t)[2-(2-t)\varkappa],\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathrm{H}(\mathfrak{x}'^2) = (1-2t)[-(1-2t) + (1-t)\varkappa]\mathfrak{x}'^2 + t^2[-(1-2t) + (1-t)(2-t)\varkappa]. \tag{9}$$

Diese Gleichungen oder die ihnen äquivalenten:

$$[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2]^2\alpha^2 = 4[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)][(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\mathfrak{x}'^2 + t^2]a^2 \tag{10}$$

$$[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2]^2(\beta^2 + \gamma^2) = 2\mathrm{G}(\mathfrak{x}'^2)a^2 \tag{11}$$

$$[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^2]^4(\beta^2 - \gamma^2)^2 = 16\mathfrak{x}'^2(1-\mathfrak{x}'^2)[(1-2t)\mathfrak{x}'^2 + t^3(2-t)]\mathrm{H}^2(\mathfrak{x}'^2)a^4, \tag{12}$$

welche nach Einführung der Bezeichnung N' für den Ausdruck $[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]^2$ vorübergehend in der Form

$$N'\alpha^2 = \varphi(\mathfrak{x}'^2)a^2, \qquad N'(\beta^2+\gamma^2) = \psi(\mathfrak{x}'^2)a^2, \qquad N'^2(\beta^2-\gamma^2)^2 = \chi(\mathfrak{x}'^2)a^4 \tag{13'}$$

geschrieben werden mögen, können nun zur Berechnung der Grössen $\varkappa$, $\mathfrak{x}'^2$, a^2 dienen.

Ihnen gesellen sich aber noch zwei andere Gleichungssysteme derselben Art zu.

Die Gleichungen 24) II bleiben nämlich, wie bereits bei ihrer Bildung bemerkt wurde, bestehen, wenn man die Accente $'$, $''$, $'''$ cyclisch vertauscht, wobei dann unter $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$ die Ausdrücke $\frac{x''^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y''^2}{\mathfrak{b}^2}-1$ und $\frac{x'''^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y'''^2}{\mathfrak{b}^2}-1$ zu verstehen sind.

Zur rechnenden Verification dieses Umstandes stehen die Relationen:

$$\frac{x'x''}{a\mathfrak{a}}+\frac{y'y''}{b\mathfrak{b}}+1=0 \qquad \frac{x''x'''}{a\mathfrak{a}}+\frac{y''y'''}{b\mathfrak{b}}+1=0$$
$$\frac{x'''x'}{a\mathfrak{a}}+\frac{y'''y'}{b\mathfrak{b}}+1=0$$

zur Verfügung, welche aus 24) II leicht abgeleitet werden. Es bestehen somit die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{x'}{\mathfrak{a}}+\frac{y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] & x''' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{x'}{\mathfrak{a}}-\frac{y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \\ y'' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{y'}{\mathfrak{b}}-\frac{x'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] & y''' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{y'}{\mathfrak{b}}+\frac{x'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} x''' &= \frac{a}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{x''}{\mathfrak{a}}+\frac{y''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] & x' &= \frac{a}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{x''}{\mathfrak{a}}-\frac{y''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] \\ y''' &= \frac{b}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{y''}{\mathfrak{b}}-\frac{x''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] & y' &= \frac{b}{\mathfrak{e}''+1}\left[-\frac{y''}{\mathfrak{b}}+\frac{x''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}''}\right] \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{x'''}{\mathfrak{a}}+\frac{y'''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right] & x'' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{x'''}{\mathfrak{a}}-\frac{y'''}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right] \\ y' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{y'''}{\mathfrak{b}}-\frac{x'''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right] & y'' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'''+1}\left[-\frac{y'''}{\mathfrak{b}}+\frac{x'''}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'''}\right], \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

in welchen auf den Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der drei Quadratwurzeln zu achten ist.

Fixirt man z. B. das Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{e}'}$, so sind damit die Grössen $x''|y''$ und $x'''|y'''$ durch 14) eindeutig bestimmt und daher auch durch 15) und 16) die Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{e}''}$ und $\sqrt{\mathfrak{e}'''}$.

Um diesen Zusammenhang auf seine einfachste Form zu bringen, entwickle man aus 14) und 15) die Relation:

$$\sqrt{\mathfrak{e}''} = \frac{(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'y' + ab\mathfrak{a}\mathfrak{b}\sqrt{\mathfrak{e}'}}{\mathfrak{b}^2x'^2+\mathfrak{a}^2y'^2} \tag{17}$$

und aus 14) und 16) die Relation:

$$\sqrt{\mathfrak{e}'''} = \frac{-(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'y' + ab\mathfrak{a}\mathfrak{b}\sqrt{\mathfrak{e}'}}{\mathfrak{b}^2x'^2+\mathfrak{a}^2y'^2}. \tag{18}$$

Bemerkt man nun, dass

$$a^2b^2\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{e}'-(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})^2x'^2y'^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2}[(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})^2x'^4-2\,a^2b\mathfrak{a}(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'^2+a^4\mathfrak{a}^2(b^2-\mathfrak{b}^2)]$$

$$= \frac{b^2}{a^2}[(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'^2-a^2\mathfrak{a}(b+\mathfrak{b})][(b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b})x'^2-a^2\mathfrak{a}(b-\mathfrak{b})]$$

im Intervalle $0 \leqq x'^2 \leqq a^2$ beständig positiv ist — es ist nämlich $b\mathfrak{a}-a\mathfrak{b} = ab\left(\frac{\mathfrak{a}}{a}-\frac{\mathfrak{b}}{b}\right) = ab\left(1-2\frac{\mathfrak{b}}{b}\right) = ab(2t-1)$ wegen $t \geqq \frac{1}{2}$ nicht negativ und wegen $\mathfrak{a} < a$ kleiner als $\mathfrak{a}(b-\mathfrak{b})$ — so ergibt sich aus 17) und 18), dass die Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{e}''}$ und $\sqrt{\mathfrak{e}'''}$ mit dem von $\sqrt{\mathfrak{e}'}$ übereinstimmen müssen. Setzt man nun auch $x'' = a\mathfrak{x}''$, $y'' = b\mathfrak{y}''$ $(\mathfrak{x}''^2+\mathfrak{y}''^2 = 1)$, $x''' = a\mathfrak{x}'''$, $y''' = b\mathfrak{y}'''$ $(\mathfrak{x}'''^2+\mathfrak{y}'''^2 = 1)$, so ist nach 14):

$$\mathfrak{x}'' = \frac{t}{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2}[-(1-t)^2\mathfrak{x}'+\mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)}] \tag{19}$$

$$\mathfrak{x}''' = \frac{t}{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2}[-(1-t)^2\mathfrak{x}'-\mathfrak{y}'\sqrt{(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)}], \tag{20}$$

und bleiben diese Relationen bestehen, wenn man die Accente $'$, $''$, $'''$ cyclisch permutirt.

Bezeichnet man die Ausdrücke $[(1-2t)\mathfrak{x}''^2+t^2]^2$ und $[(1-2t)\mathfrak{x}'''^2+t^2]^2$ mit N'' und N''', so stellen sich den Gleichungen 13′) demnach noch die folgenden zur Seite:

$$N''\beta^2 = \varphi(\mathfrak{x}''^2)a^2 \qquad N''(\gamma^2+\alpha^2) = \psi(\mathfrak{x}''^2)a^2 \qquad N''(\gamma^2-\alpha^2)^2 = \chi(\mathfrak{x}''^2)a^4 \tag{13''}$$

$$N'''\gamma^2 = \varphi(\mathfrak{x}'''^2)a^2 \qquad N'''(\alpha^2+\beta^2) = \psi(\mathfrak{x}'''^2)a^2 \qquad N'''^2(\alpha^2-\beta^2)^2 = \chi(\mathfrak{x}'''^2)a^4. \tag{13'''}$$

Auch jedes dieser Systeme kann zur Bestimmung der Grössen $\varkappa$, a^2, $\mathfrak{x}'^2$ dienen.

Zunächst soll nur die Gleichung betrachtet werden, durch welche der Modul $\varkappa = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ bestimmt wird; dieselbe wird anscheinend erhalten, indem man etwa aus den drei Gleichungen 13′) die Grössen $\mathfrak{x}'^2$ und a^2 eliminirt, oder aus 13″) $\mathfrak{x}''^2$, a^2, oder aus 13‴) $\mathfrak{x}'''^2$, a^2. Die Resultante dieser Elimination stellt gleich Null gesetzt die nothwendige und hinreichende Bedingung dar, welche die Grössen α^2, β^2, γ^2, $\varkappa$, t erfüllen müssen, damit Werthepaare $\mathfrak{x}'^2$, a^2 existiren, welche diese drei Gleichungen erfüllen; es tritt aber hier der besondere Fall ein, dass diese Resultante identisch, d. h. für willkürliche Werthe der Grössen α^2, β^2, γ^2, $\varkappa$, t verschwindet, denn offenbar sind alle drei Gleichungen 13′) durch das Werthepaar $\mathfrak{x}'^2 = \frac{t^2}{2t-1}$, $a^2 = 0$ erfüllt; ebenso die Gleichungen 13″) für $\mathfrak{x}''^2 = \frac{t^2}{2t-1}$, $a^2 = 0$ und die Gleichungen 13‴) für $\mathfrak{x}'''^2 = \frac{t^2}{2t-1}$, $a^2 = 0$.

Man muss daher die Frage so stellen:

Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass z. B. die Gleichungen 13′) durch ein von $\frac{t^2}{2t-1}$, 0 verschiedenes Werthepaar $\mathfrak{x}'^2$, a^2 erfüllt werden und erhält die Antwort darauf leicht durch folgende Überlegung.

Wenn die erste und zweite der Gleichungen 13′) erfüllt werden sollen, ohne dass N' und a^2 zugleich verschwinden, so muss die Gleichung:

$$\alpha^2\psi-(\beta^2+\gamma^2)\varphi = 0 \tag{21}$$

erfüllt sein, und umgekehrt: wenn die Gleichung 21) erfüllt ist, so gibt es von $\frac{t^2}{2t-1}$, 0 verschiedene Werthepaare $\mathfrak{x}'^2$, a^2, welche die beiden ersten Gleichungen 13′) erfüllen, weil für willkürliche Werthe von α^2, β^2, γ^2 die Gleichung 21) nur dann durch $\mathfrak{x}'^2 = \frac{t^2}{2t-1}$ erfüllt wird, wenn φ und ψ den gemeinsamen Linearfactor $(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2$ enthalten, was aber nicht der Fall ist, solange $\varkappa$ und t willkürlich sind.

Wenn ferner die erste und dritte Gleichung 13′) erfüllt werden sollen, ohne dass N' und a^2 zugleich verschwinden, so muss die Gleichung:

$$\alpha^4\chi = (\beta^2-\gamma^2)^2\varphi^2 = 0 \tag{22}$$

erfüllt sein, und umgekehrt: wenn die erste Gleichung 13′) und die Gleichung 22) durch ein Werthepaar $\mathfrak{x}'^2$, a^2 erfüllt werden, so ist dieses Werthepaar von $\frac{t^2}{2t-1}$, 0 verschieden und wird durch dasselbe auch die dritte Gleichung 13′) erfüllt.

Dabei kann in 22) noch der gemeinsame Factor $(1-2t).\mathfrak{x}'^2+t^3(2-t)$ der Functionen φ und χ abgesondert werden, da er für willkürliche α^2, β^2, γ^2 sicher nicht Factor der linken Seite der Gleichung 21) ist.

Man wird daher das System 13′) durch folgende drei Gleichungen ersetzen:

$$\left.\begin{aligned}
&[(1-2t)\xi'+t^2]^2\alpha^2- \\
&-4[(1-2t)\xi'+t^3(2-t)][(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2]a^2 = 0 \\
&G(\xi')\alpha^2-2[(1-2t)\xi'+t^3(2-t)]. \\
&\qquad .[(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2](\beta^2+\gamma^2) = 0 \\
&\xi'(\xi'-1)H^2(\xi')\alpha^4+[(1-2t)\xi'+t^3(2-t)]. \\
&\qquad .[1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2]^2(\beta^2-\gamma^2)^2 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{23'}$$

wobei für $\mathfrak{x}'^2$ ξ' geschrieben wurde.

Da nun aber die Grösse a^2 nur in der ersten dieser drei Gleichungen vorkommt, so wird die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Werthepaaren ξ', a^2, welche diese drei Gleichungen erfüllen, offenbar durch das

Verschwinden der Resultante nach ξ' der zweiten und dritten Gleichung ausgedrückt.

Diese Resultante R' verschwindet sicher nicht identisch — weil für $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 = \gamma^2 = 0$ die zweite und dritte Gleichung keine gemeinsame Wurzel haben, solange $\varkappa$ und t willkürlich sind —, sie ist eine ganze homogene Function zehnter Dimension der Grössen α^2, β^2, γ^2, symmetrisch in β^2 und γ^2, und enthält offenbar eine Potenz von α^2 als Factor, da für $\alpha^2 = 0$ die zweite und dritte Gleichung durch $(1-2t)\xi'+t^3(2-t) = 0$, oder $(1-2t-(1-t)^2\varkappa)\xi'+t^2 = 0$ zugleich erfüllt werden.

Ganz analog würden die Gleichungen 13″) ein System 23″) liefern, welches aus 23′) dadurch hervorgeht, dass an die Stelle der Grössen α^2, β^2, γ^2, ξ' die Grössen β^2, γ^2, α^2, $\xi'' = \mathfrak{x}''^2$ gesetzt werden. Die Resultante R'' der zweiten und dritten Gleichung 23″) nach ξ'' ist eine ganze homogene Function zehnter Dimension der Grössen α^2, β^2, γ^2, symmetrisch in γ^2 und α^2, welche eine Potenz von β^2 als Factor enthält; ebenso würde sich aus 13‴) ein System 23‴) ergeben, welches aus 23″) dadurch erhalten wird, dass man an die Stelle der Grössen β^2, γ^2, α^2, ξ'' die Grössen γ^2, α^2, β^2, $\xi''' = \mathfrak{x}'''^2$ setzt. Die Resultante R''' der zweiten und dritten Gleichung 23‴) ist eine ganze homogene Function zehnter Dimension der Grössen α^2, β^2, γ^2, symmetrisch in α^2 und β^2, welche eine Potenz von γ^2 als Factor enthält. Da nun nach dem Zusammenhange zwischen ξ', ξ'', ξ''' jedem Werthepaare ξ', a^2, welches die Gleichungen 23′) erfüllt, ein Werthepaar ξ'', a^2 entspricht, welches die Gleichungen 23″) erfüllt und umgekehrt und ebenso ein Werthepaar ξ''', a^2, welches die Gleichungen 23‴) erfüllt und umgekehrt, so müssen die Resultanten R', R'', R''', von überflüssigen Factoren gereinigt, identisch sein. Hieraus folgt aber, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Werthepaaren ξ', a^2 z. B., auf ihre einfachste Form gebracht, in den Grössen α^2, β^2, γ^2 symmetrisch ist, wie es nach der Natur der Aufgabe von vorneherein zu erwarten ist.

Nunmehr soll die Resultante R' wirklich berechnet werden. Bezeichnet man die linke Seite der zweiten Gleichung 23′) mit

$$a_0\xi'^3+a_1\xi'^2+a_2\xi'+a_3,$$

die der dritten mit

$$b_0\xi'^4+b_1\xi'^3+b_2\xi'^2+b_3\xi'+b_4,$$

so ist, wenn $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$ gesetzt wird,

$$R' = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03}+d_{12} & d_{04}+d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04}+d_{13} & d_{14}+d_{23} & d_{24} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \qquad 24)$$

Die Ausdrücke für die Coëfficienten a_i, b_k und die Elemente der Determinante sind die folgenden:

$$a_0 = (1-2t)^2\varkappa\alpha^2$$

$$a_1 = (1-2t)[2(1-2t)(1+t-t^2)-(2-4t-3t^2+2t^3)\varkappa]\alpha^2-2(1-2t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa](\beta^2+\gamma^2)$$

$$a_2 = t^2[2(1-2t)(3-t^2)-(2-t)(2-3t-4t^2+2t^3)\varkappa]\alpha^2-2t^2[(1-2t)(1+2t-t^2)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2+\gamma^2)$$

$$a_3 = t^4(2-t)[2-(2-t)\varkappa]\alpha^2-2t^5(2-t)(\beta^2+\gamma^2)$$

$$b_0 = (1-2t)^2[1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4$$

$$b_1 = (1-2t)[-(1-2t)^2(1-2t-2t^2)+2(1-t)(1-2t)(1-2t-3t^2+t^3)\varkappa-(1-t)^2(1-2t-4t^2+2t^3)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+(1-2t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa]^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$b_2 = t^2[-(1-2t)^2(2-4t-t^2)+2(1-t)(1-2t)(3-7t+t^3)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(2-4t-2t^2+t^3)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+t^2[(1-2t)^2(2+2t-t^2)-2(1-t)^2(1-2t)(1+2t-t^2)\varkappa+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$b_3 = -t^4[1-2t-(1-t)(2-t)\varkappa]^2\alpha^4+t^4[1-2t)(1+4t-2t^2)-2t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$b_4 = t^7(2-t)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

(Zur Abkürzung wird im Folgenden die nach steigenden Potenzen von t geordnete ganze Function $c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots+c_nt^n$ durch $(c_0, c_1, c_2, \ldots c_n)$ bezeichnet.)

$$d_{01}=$$

$$(1-2t)^3[-2(1-2t)^3(1,1,-1)+(1-t)(1-2t)^2(5,3,-6)\varkappa-4(1-t)^3(1-2t)(1+t)\varkappa^2+(1-t)^4\varkappa^3]\alpha^6$$
$$+2(1-2t)^3[1-2t-(1-t)^2\varkappa][1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+(1-2t)^3[\ast+(1-2t)^2\varkappa-2(1-t)^2(1-2t)\varkappa^2+(1-t)^4\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{02}=$$

$$t^2(1-2t)^2[-2(1-2t)^3(3,0,-1)+2(1-t)(1-2t)^2(7,-1,-5,1)\varkappa-4(1-t)^3(1-2t)(2,2,-1)\varkappa^2+$$
$$+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^6+2t^2(1-2t)^2[(1-2t)(1,2,-1)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa][1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t^2(1-2t)^2[\ast+(1-2t)^2(2,2,-1)\varkappa-2(1-t)^2(1-2t)(1,2,-1)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{03}=$$

$$t^4(1-2t)^2[-2(1-2t)^2(2-t)+(1-t)(1-2t)(11,-11,2)\varkappa-4(1-t)^3(2-t)\varkappa^2]\alpha^6$$
$$+2t^5(1-2t)^2(2-t)[1-2t-(1-t)\varkappa]^2\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t^4(1-2t)^2[\ast+(1-2t)(1,4,-2)\varkappa-2t(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{04}=$$

$$t^7(1-2t)^2(2-t)\varkappa\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{14} =$$

$$t^7(1-2t)(2-t)[2(1-2t)(1, 1, -1)-(2, -4, -3, 2)\varkappa]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$-2t^7(1-2t)(2-t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{24} =$$

$$t^9(2-t)[2(1-2t)(3, 0, \quad 1)-(2-t)(2, -3, -4, 2)\varkappa]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$-2t^9(2-t)[(1-2t)(1, 2, -1)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{03}+d_{12} =$$

$$t^2(1-2t)^2[2(1-2t)^2(1, -4, -2, 0, 1)+4t(1-t)(1-2t)(2, 4, -2, -3, 1)\varkappa-2(1-t)^3(3, -5, 10, 5, -6, 1)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^6+2t^2(1-2t)^2[(1-2t)^2(1, -4, 6, 4-3)-2(1-t)(1-2t)(3, -11, 13, 5, -8, 2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(9, -34, 37, 10, -30, 14, -2)\varkappa^2-(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t^2(1-2t)^2[-2(1-2t)^2(1, -4, 0, 3, -1)$$
$$+(1-2t)(8, -32, 40, 18, -43, 22, -4)\varkappa-2(1-t)^2(5, -16, 13, 15, -19, 7, -1)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2+2t^2(1-2t)^2[-(1-2t)^2+2(1-t)^2(1-2t)\varkappa-(1-t)^4\varkappa^2](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{04}+d_{13} =$$

$$t^4(1-2t)[2(1-2t)^2(1, -4, 1)-2(1-t)(1-2t)(1, -9, 7, -1)\varkappa-2(1-t)^3(1+t)(2-t)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^6+2t^4(1-2t)[(1-2t)^2(1, -4, 5, 2, -2)-(1-t)(1-2t)(5, -17, 16\ 8\ -10, 2)\varkappa$$

$$+2(1-t)^2(2-t)(2,-6,4,2,-1)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)+t^4(1-2t)[2(1-2t)^2(-1,6,1,-6,2)$$
$$+(1-2t)(10,-44,60,10,-47,24,-4)\varkappa-2(1-t)^2(2-t)(3,-9,7,3,-2)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$+2t^4(1-2t)[-(1-2t)^2(1,2,-1)+(1-t)^2(1-2t)(1,4,-2)\varkappa-t(1-t)^4(2-t)\varkappa^2](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$d_{14}+d_{23}=$$
$$t^6[2(1-2t)^2(1,-4,3,-1)+(1-t)(1-2t)(2-t)(-2,13,-15,6)\varkappa-6t(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^6$$
$$+2t^6[(1-2t)^2(1,-4,5,0,-1)-(1-t)(1-2t)(2-t)(2,-5,1,6,-2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)^2(1,0,-7,8,-1)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)+t^6[2(1-2t)^2(-1,12,-2,-8,3)$$
$$+(1-2t)(2-t)(6,-25,24,28,-32,8)\varkappa-2(1-t)^2(2-t)^2(1,-1,-4,7,-2)\varkappa^2$$
$$+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2+2t^6[-(1-2t)^2(1,4,2,-4,1)$$
$$+2t(1-t)^2(1-2t)(2-t)(1,2,-1)\varkappa-t^2(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^2](\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)^2$$

Von der Determinante 24) kann zunächst der Factor $t^{12}(1-2t)^4(2-t)\alpha^2$ dadurch abgesondert werden, dass man ihre Elemente durch die folgenden ersetzt:

$$c_{11}=\frac{d_{01}}{(1-2t)^3\alpha^2}\qquad c_{12}=\frac{d_{02}}{(1-2t)^2\alpha^2}\qquad c_{13}=\frac{d_{03}}{t^2(1-2t)^2\alpha^2}\qquad c_{14}=\frac{d_{04}}{t^4(1-2t)^2(2-t)\alpha^2}$$

$$c_{21}=\frac{d_{02}}{t^2(1-2t)^2}\qquad c_{22}=\frac{d_{03}+d_{12}}{t^2(1-2t)}\qquad c_{23}=\frac{d_{04}+d_{13}}{t^4(1-2t)}\qquad c_{24}=\frac{d_{14}}{t^6(1-2t(2-t)}$$

$$c_{31}=\frac{d_{03}}{t^4(1-2t)}\qquad c_{32}=\frac{d_{04}+d_{13}}{t^4}\qquad c_{33}=\frac{d_{14}+d_{23}}{t^6}\qquad c_{34}=\frac{d_{24}}{t^8(2-t)}$$

$$c_{41}=\frac{a_0}{1-2t}\qquad c_{42}=a_1\qquad c_{43}=\frac{a_2}{t^2}\qquad c_{44}=\frac{a_3}{t^4(2-t)}$$

Man bemerkt ferner, dass die Determinante $||c_{ik}||$ den Factor α^4 enthält. Ersetzt man nämlich ihre zweite Horizontalreihe H_2 durch

$$H_2'=H_2-[1-2t-(1-t)^2\varkappa](\beta^2-\gamma^2)^2H_4,$$

(in leicht verständlicher Symbolik) und ihre dritte Horizontalreihe H_3 durch

$$H_3'=H_3-[(1-2t)(1,2,-1)-t(1-t)^2(2-t)\varkappa](\beta^2-\gamma^2)^2H_4,$$

so zeigt sich, dass die Reihen H_2' und H_3' den Factor α^2 enthalten.

Bezeichnet man die Elemente der transformirten Determinante mit e_{ik}, so ergibt sich

$$R'=t^{12}(1-2t)^4(2-t)\alpha^6||e_{ik}||$$

und sind die Ausdrücke für die e_{ik} die folgenden:

$$e_{1k}=c_{1k}\qquad (k=1,2,3,4)$$

$$e_{21}=$$

$$[-2(1-2t)^3(3,0,-1)+2(1-t)(1-2t)^2(7,-1,-5,1)\varkappa-4(1-t)^3(1-2t)(2,2,-1)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2[(1-2t)^3(1,2,-1)-(1-t)(1-2t)^2(2,6,-5,1)\varkappa$$

$$+(1-t)^2(1-2t)(1,6,-7,2)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+[*+(1-2t)^2(1,2,-1)\varkappa-(1-t)^2(1-2t)(1,4,-2)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{22}=$$

$$(1-2t)[2(1-2t)^2(1,-4,-2,0,1)+4t(1-t)(1-2t(2,4,-2,-3,1)\varkappa-2(1-t)^3(3,-5,10,5,-6,1)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4+2(1-2t)[(1-2t)^2(1,-4,6,4,-3)-2(1-t)(1-2t)(3,-11,13,5,-8,2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(9,-34,37,10,-30,14,-2)\varkappa^2-(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+(1-2t)[-2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)(2-t)$$
$$+(1-2t)(12,-38,33,26,-45,22,-4)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(6,-15,4,18,-10,2)\varkappa^2$$
$$+(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{23}=$$

$$[2(1-2t)^2(1,-4,1)-2(1-t)(1-2t)(1,-9,7,-1)\varkappa-2(1-t)^3(1+t)(2-t)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2[(1-2t)^2(1,-4,5,2,-2)-(1-t)(1-2t)(5,-17,16,8,-10,2)\varkappa$$
$$+2(1-t)^2(2-t)(2,-6,4,2,-1)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(2-t)[-4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)$$
$$+(1-2t)(10,-27,16,19,-16,4)\varkappa-(1-t)^2(8,-21,10,8,-4)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{24}=$$

$$[-2(1-t)^2(1-2t)(1+t)+(4,-11,8,3,-2)\varkappa-(1-t)^2(2-t)\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{31} =$$

$$(1-2t)[-2(1-2t)^2(2-t)+(1-t)(1-2t)(11,\,-11,\,2)\varkappa-4(1-t)^3(2-t)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2t(1-2t)(2-t)[(1-2t)^2-2(1-t)(1-2t)\varkappa+(1-t)^2\varkappa^2]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$
$$+t(1-2t)(2-t)[*+(1-2t)\varkappa-(1-t)^2\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{32} =$$

$$(1-2t)[2(1-2t)^2(1,\,-4,\,1)-2(1-t)(1-2t)(1,\,-9,\,7,\,-1)\varkappa-2(1-t)^3(1+t)(2-t)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2(1-2t)[(1-2t)^2(1,\,-4,\,5,\,2,\,-2)-(1-t)(1-2t)(5,\,-17,\,16,\,8,\,-10,\,2)\varkappa$$
$$+2(1-t)^2(2-t)(2,\,-6,\,4,\,2,\,-1)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(1-2t)(2-t)[-2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)$$
$$+(1-2t)(6,\,-17,\,12,\,8,\,-8,\,2)\varkappa-(1-t)^2(6,\,-16,\,10,\,3,\,-2)\varkappa^2+(1-t)^4(2-t)\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{33} =$$

$$[2(1-2t)^2(1,\,-4,\,3,\,-1)+(1-t)(1-2t)(2-t)(-2,\,13,\,-15,\,6)\varkappa-6t(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^4$$
$$+2[(1-2t)^2(1,\,-4,\,5,\,0,\,-1)-(1-t)(1-2t)(2-t)(2,\,-5,\,1,\,6,\,-2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)^2(1,\,0,\,-7,\,8,\,-1)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3]\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(2-t)[-4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)$$
$$+(1-2t)(8,\,-18,\,0,\,29,\,-20,\,4)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(2,\,0,\,-11,\,10,\,-2)\varkappa^2+t(1-t)^4(2-t)^3\varkappa^3](\beta^2-\gamma^2)^2$$

$$e_{34} =$$

$$[-2(1-t)^2(1-2t)(1+t)+(2-t)(1,\,0,\,-6,\,8,\,-2)\varkappa-t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2](\beta^2-\gamma^2)^2.$$

$$e_{4k} = c_{4k} \qquad (k = 1;\,2,\,3,\,4).$$

Aber auch die Determinante $\|e_{ik}\|$ enthält noch einmal den Factor α^2. Ersetzt man nämlich ihre erste Verticalreihe V_1 durch

$$V_1' = t^2(1-2t)V_1 - [1-2t-(1-t)^2\varkappa]V_2 + [1-2t-(1-t)^2\varkappa]^2 V_3 - (2-t)[1-2t-(1-t)^2\varkappa]^3 V_4,$$

so zeigt sich, dass alle Elemente von V_1' den Factor

$$(1-t)^4[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]\varkappa\alpha^2$$

enthalten.

Bezeichnet man die Elemente der Determinante nach dieser Umformung mit f_{ik}, so ist

$$R' = t^{10}(1-t)^4(1-2t)^3(2-t)[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]\varkappa\alpha^8\|f_{ik}\|.$$

Die Ausdrücke für die Elemente f_{ik} sind die folgenden:

$$f_{11} =$$

$$t^2[2(1-2t)^2-6(1-t)(1-2t)\varkappa+(1-t)(4-5t)\varkappa^2]\alpha^2$$

$$f_{21} =$$

$$[2(1-2t)^2(-1,2,1)+2(1-t)(1-2t)(1,-6,-2,1)\varkappa+(1-t)(2,1,-2,-5,2)\varkappa^2-(1-t)^3(2-t)\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+[*+4(1-t)^2(1-2t)\varkappa-2(1-t)^2(4,-7,1)\varkappa^2+2(1-t)^3(2-t)\varkappa^3](\beta^2+\gamma^2)$$

$$f_{31} =$$

$$[-2(1-2t)^3+2(1-t)(1-2t)(2-t)(1-4t)\varkappa-(1-t)(2-t)(1,-10,16,-6)\varkappa^2-t(1-t)^3(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+[*+4t(1-t)^2(1-2t)(2-t)\varkappa-2t(1-t)^2(2-t)(4,-7,1)\varkappa^2+2t(1-t)^3(2-t)^2\varkappa^3](\beta^2+\gamma^2)$$

$$f_{11} =$$
$$2(1-2t)-2(1-t)(2-t)\varkappa+(1-t)(2-t)\varkappa^2$$

$$f_{ik} = e_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 2, 3, 4 \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man nun mit Θ, Σ, Π dic symmetrischen Functionen:

$$\Theta = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \qquad \Sigma = -\alpha^4-\beta^4-\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2) \qquad \Pi = \alpha^2\beta^2\gamma^2, \tag{25}$$

so ist:

$$\beta^2+\gamma^2 = \Theta-\alpha^2 \qquad (\beta^2-\gamma^2)^2 = -3\alpha^4+2\Theta\alpha^2-\Sigma; \tag{26}$$

die Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ sind die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$z^3-\Theta z^2+\frac{1}{4}(\Theta^2+\Sigma)z-\Pi = 0,$$

insbesondere ist also:

$$\alpha^6 = \Theta\alpha^4-\frac{1}{4}(\Theta^2+\Sigma)\alpha^2+\Pi. \tag{27}$$

Mittelst der Formel 26) lassen sich daher die Elemente f_{ik} als quadratische Functionen von α^2 darstellen, deren Coëfficienten ganze Functionen von $\varkappa$, t, Θ, Σ, Π sind. Die Ausdrücke für die Elemente f_{ik} in dieser Form sind die folgenden:

$$f_{11} =$$
$$t^2[2(1-2t)^2-6(1-t)(1-2t)\varkappa+(1-t)(4-5t)\varkappa^2]\alpha^2$$

$$f_{12} =$$

$$t^2(1-2t)^2[-4(1-2t)(1+t)(2-t)+(12,-14,-27,24,-4)\varkappa-4(1-t)^2(1,2,-1)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2t^2(1-2t)[(1-2t)^2(1,2,-1)-t(1-2t)(2,-10,6,-1)\varkappa-(1-t)^2(1,-2,5,-2)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+t^2[*-(1-2t)^2(2,2,-1)\varkappa+2(1-t)^2(1-2t)(1,2,-1)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{13} =$$

$$t^2(1-2t)(2-t)[-2(1-2t)(1+t)+(4,-11,-2)\varkappa-4(1-t)^2\varkappa^2]\alpha^4+2t^2[t(1-2t)^2(2-t)$$
$$+(1-2t)(1,0,4,-2)\varkappa-t(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Theta\alpha^2+t^2[*-(1-2t)(1,4,-2)\varkappa+2t(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Sigma$$

$$f_{14} =$$

$$-3t^3\varkappa\alpha^4+2t^3\varkappa\Theta\alpha^2-t^3\varkappa\Sigma$$

$$f_{21} =$$

$$[2(1-2t)^2(-1,2,1)-2(1-t)(1-2t)(1,4,2,-1)\varkappa+(1-t)(2-t)(5,-8,3,-2)\varkappa^2-3(1-t)^3(2-t)\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+2(1-t)^2[*+2(1-2t)\varkappa-(4,-7,1)\varkappa^2+(1-t)(2-t)\varkappa^3]\Theta$$

$$f_{22} =$$

$$(1-2t)^2(2-t)[2(1-2t)(1+t)(3,-6,-1)-(12,-27,-16,59,-10)\varkappa+(1-t)^2(6,3,-16)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2(1-2t)[-(1-2t)^2(3,-2,-8,2,1)$$

$$+(1-2t)(6, -10, -15, 42, -19, 2)\varkappa-(1-t)^2(3, -2, -14, 22, -8)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(1-2t)[2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)(2-t)-(1-2t)(12, -38, 33, 26, -45, 22, -4)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)(6, -15, 4, 18, -10, 2)\varkappa^2-(1-t)^5(1+t)(2-t)^2\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{23} =$$

$$(1-2t)(2-t)[4(1-2t)(3, -3, -4, 2)-(26, -71, 36, 51, -32, 8)\varkappa+(1-t)^2(2-t)(7, -2, -4)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2[-(1-2t)^2(7, -8, -9, 10, -2)$$
$$+(1-2t)(15, -42, 26, 30, -33, 12, -2)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(4, -9, 2, 4, -2)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(2-t)[4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)-(1-2t)(10, -27, 16, 19, -16, 4)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(8, -21, 10, 8, -4)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{24} =$$

$$[6(1-t)^2(1-2t)(1+t)-3(4, -11, 8, 3, -2)\varkappa+3(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+[-4(1-t)^2(1-2t)(1+t)+2(4, -11, 8, 3, -2)\varkappa-2(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+[2(1-t)^2(1-2t)(1+t)-(4, -11, 8, 3, -2)\varkappa+(1-t)^2(2-t)\varkappa^2]\Sigma$$

$$f_{31} =$$

$$[-2(1-2t)^3+2(1-t)(1-2t)(2-t)(1, -6, 2)\varkappa-(1-t)(2-t)(1, -18, 38, -22, 2)\varkappa^2-3t(1-t)^3(2-t)^2\varkappa^3]\alpha^2$$
$$+2t(1-t)^2(2-t)[\ast+2(1-2t)\varkappa-(4, -7, 1)\varkappa^2+(1-t)(2-t)\varkappa^3]\Theta$$

$$f_{32} =$$

$$(1-2t)^2(2-t)[2(1-2t)(1+t)(3, -6, 1)-(14, -41, 24, 18, -8, 2)\varkappa+(1-t)^2(8, -8, 0, 1)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2(1-2t)[-(1-2t)^2(3, -2, -7, 4)+(1-2t)(7, -18, 8, 12, -6)\varkappa-(1-t)^2(2-t)(2, -4, 2, -1)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(1-2t)(2-t)[2(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)-(1-2t)(6, -17, 12, 8, -8, 2)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(6, -16, 10, 3, -2)\varkappa^2-(1-t)^4(2-t)\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{33} =$$

$$(1-2t)(2-t)[2(1-2t)(1+t)(6, -12, 5)-(22, -55, 16, 56, -38, 8)\varkappa+(1-t)^2(2-t)(4, 2, -3, 2)\varkappa^2]\alpha^4$$
$$+2[-(1-2t)^2(7, -8, -9, 12, -3)$$
$$+(1-2t)(2-t)(6, -11, -6, 24, -12, 2)\varkappa-(1-t)^2(2-t)^2(1, 0, -4, 2, -1)\varkappa^2]\Theta\alpha^2$$
$$+(2-t)[4(1-t)^2(1-2t)^2(1+t)-(1-2t)(8, -18, 0, 29, -20, 4)\varkappa$$
$$+(1-t)^2(2-t)(2, 0, -11, 10, -2)\varkappa^2-t(1-t)^4(2-t)^2\varkappa^3]\Sigma$$

$$f_{34} =$$

$$[6(1-t)^2(1-2t)(1+t)-3(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa+3t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2]\alpha^4+[-4(1-t)^2(1-2t)(1+t)$$
$$+2(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa-2t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2]\Theta\alpha^2+[2(1-t)^2(1-2t)(1+t)-(2-t)(1, 0, -6, 8, -2)\varkappa$$
$$+t(1-t)^2(2-t)^2\varkappa^2]\Sigma$$

$$f_{41} =$$

$$2(1-2t)-2(1-t)(2-t)\varkappa+(1-t)(2-t)\varkappa^2$$

$$f_{42} =$$

$$(1-2t)^2(2-t)[2(1+t)-(2+t)\varkappa]\alpha^2$$
$$+2(1-2t)[-(1-2t)+(1-t)^2\varkappa]\Theta$$

$$f_{43} =$$

$$(1-2t)(2-t)[4(1+t)-(2-t)(1+2t)\varkappa]\alpha^2$$
$$+2[-(1-2t)(1, 2, -1)+t(1-t)^2(2-t)\varkappa]\Theta$$

$$f_{44} =$$

$$[2(1+t)-(2-t)\varkappa]\alpha^2-2t\Theta.$$

Mittelst der Relation 27) lässt sich nun auch die Determinante $\|f_{ik}\|$ selbst auf die Form

$$\Omega_0+\Omega_1\alpha^2+\Omega_2\alpha^4$$

bringen; dabei zeigt sich, dass Ω_1 und Ω_2 identisch verschwinden, für Ω_0 ergibt sich der Ausdruck:

$$t^2(1-t)^8(1-2t)(1+t)\varkappa[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2);$$

also ist:

$$R' = t^{12}(1-t)^{12}(1-2t)^4(1+t)(2-t)\varkappa^2[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa]^2\alpha^8F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2), \qquad 28)$$

wobei gesetzt ist:

$$F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \tag{29}$$

$$4\varkappa(1-\varkappa)[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa][1-2t-(1-t)^2\varkappa][1-2t+t(2-t)\varkappa]\Theta^2\Sigma^2$$
$$-32(1-2t)^2(1-\varkappa)^2[2(1-2t)^2+4t(1-2t)(2-t)\varkappa-(1-t)(2-t)(1+2t-2t^2)\varkappa^2]\Theta\Sigma\Pi$$
$$+256(1+t)(1-2t)^4(2-t)(1-\varkappa)^3\Pi^2$$
$$+\varkappa[2(1-2t)-(1-t)(2-t)\varkappa][2(1-2t)-2(1-t)(2-t)\varkappa+(1-t)(2-t)\varkappa^2]^2\Sigma^3.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Werthepaaren $\mathfrak{x}'^2$, a^2 (verschieden von dem Paare $\frac{t^2}{2t-1}$, 0), welche die Gleichungen 5), 6), 7) erfüllen, wird also, solange die Grössen $\varkappa$, t, α^2, β^2, γ^2 willkürlich sind, durch

$$F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0 \tag{30}$$

gegeben.

Es erschien mir unerlässlich, die Richtigkeit des Ausdruckes F durch eine rechnende Controle zu prüfen. Zu dem Ende wurden vermittelst der Formeln 5), 6), 7) die Grössen Θ, Σ, Π als ganze Functionen von $\mathfrak{x}'^2$, a^2, $\varkappa$, t, gebrochen durch eine Potenz von N' dargestellt. Führt man diese Ausdrücke in die Function F ein, so muss das Resultat identisch verschwinden (natürlich ohne Rücksicht auf den transcendenten Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und t), wie auch vollständig constatirt wurde.

Die Function F ist, wie zunächst hervorgehoben werden soll, im Rationalitätsbereiche $(\varkappa, t, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ irreducibel. Dass sie im Rationalitätsbereiche $(\varkappa, t, \Theta, \Sigma, \Pi)$ irreducibel ist, ist unmittelbar zu übersehen. Sie hat nämlich die Form $C_0\Theta^2\Sigma^2+C_1\Theta\Sigma\Pi+C_2\Pi^2+C_3\Sigma^3$, wobei C_0, C_1, C_2, C_3 ganze ganzzahlige Functionen von $\varkappa$ und t sind, ohne einen allen vieren gemeinsamen Theiler, wie man sofort überblickt, wenn man die

Factoren von C_2 betrachtet; als quadratische Function von Π, deren Coëfficienten keinen gemeinsamen Theiler haben, ist sie irreducibel, weil ihre Discriminante $[(4C_0C_2-C_1^2)\Theta^2+4C_2C_3\Sigma]\Sigma^2$ kein Quadrat ist.

Aus der Irreducibilität im Bereiche (Θ, Σ, Π) kann nun aber auch leicht die Irreducibilität im Bereiche $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ erschlossen werden.

Eine reducible ganze symmetrische Function von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, welche im Bereiche (Θ, Σ, Π) irreducibel ist, ist nämlich nothwendig eine Potenz einer nicht symmetrischen ganzen Function von α^2, β^2, γ^2, und zwar einer alternirenden Function (siehe E. Netto, Substitutionentheorie, Leipzig, 1882, S. 63, Lehrsatz XVI). Also könnte nur sein $F=C[(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)]^2$, wobei C eine ganze Function von $\varkappa$ und t bezeichnet; das ist aber ersichtlich nicht der Fall, weil z. B. für $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2$, wofür $\Theta=3\alpha^2$, $\Sigma=3\alpha^4$, $\Pi=\alpha^6$ werden, die Function F für willkürliche Werthe von $\varkappa$ und t nicht identisch verschwindet.

Die Function F ist also in der That im Rationalitätsbereiche $(\varkappa, t, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ irreducibel, solange diese Grössen willkürlich sind.

Für den Eliminationsprocess kam der transcendente Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und t nicht in Betracht, $\varkappa$ und t waren dabei als unabhängige Veränderliche zu betrachten. Damit aber durch die Formeln 5), 6), 7) die Quadrate der Seiten eines Dreiecks $P'P''P'''$ dargestellt werden, muss nach dem Satze I, S. 43, III) t die in I, S. 33 definirte transcendente Function $\frac{-(1-\varkappa)K+E}{\varkappa E}$ sein, deren Entwickelung in der Umgebung der Stelle $\varkappa=0$ mit den Gliedern $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3}{2^5}\varkappa^2$ beginnt.

Wenn aber $\varkappa$ und t nicht mehr von einander unabhängig sind, so kann auch nicht mehr ohne Weiteres behauptet werden, dass die vier Functionen C_0, C_1, C_2, C_3, die Coëfficienten der Function $F=C_0\Theta^2\Sigma^2+C_1\Theta\Sigma\Pi+C_2\Pi^2+C_3\Sigma^3$, für keinen Werth von $\varkappa$ zugleich verschwinden.

In der That zeigen die Entwickelungen in der Umgebung der Stelle $\varkappa=0$:

$$C_0 = \varkappa^4\left[\frac{3^2.5}{2^5} - \frac{3^2.5}{2^5}\varkappa - \frac{3^2.13}{2^{13}}\varkappa^2 \,.\quad .\right]$$

$$C_1 = \varkappa^4\left[\frac{3^4.7}{2^6} - \frac{3^4.7}{2^6}\varkappa - \frac{3^4\ 17}{2^{10}}\varkappa^2 \qquad \right]$$

$$C_2 = \varkappa^4\left[\frac{3^6}{2^6} - \frac{3^6}{2^6}\varkappa - \frac{3^6.23}{2^{12}}\varkappa^2 \qquad \right]$$

$$C_3 = \varkappa^4\left[-\frac{3^5}{2^5} + \frac{3^5}{2^5}\varkappa - \frac{3^4.421}{2^{13}}\varkappa^2 \qquad \right],$$

dass diese vier Functionen für $\varkappa = 0$ sämmtlich, und zwar mit der Ordnungszahl 4 verschwinden.

Die Gleichung $F = 0$ würde daher für willkürliche Werthe von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ viermal die Wurzel $\varkappa = 0$ ergeben, die aber offenbar, wenn nicht gerade $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$ ist, für das vorliegende Problem ohne Bedeutung ist.

Diese Bemerkung regt ferner die Frage an, ob die vier Functionen C_0, C_1, C_2, C_3 nicht auch noch für andere Werthe von $\varkappa$ sämmtlich verschwinden. Der einfache Bau der Function $C_2 = 256(1+t)(1-2t)^4(2-t)(1-\varkappa)^3$ lässt aber leicht erkennen, dass dies nicht der Fall ist.

Für $t = -1$ nämlich wird $C_1 = -2^6.3^4(1-\varkappa)^4$, verschwindet also nicht, weil für $\varkappa = 1$ $t = 1$ ist.

Für $1-2t = 0$, also $t = \frac{1}{2}$, wird $C_0 = \frac{3^2}{2^4}\varkappa^4(1-\varkappa)$. Dass $\varkappa = 0$ gemeinsame Wurzel der vier Functionen C_0, C_1, C_2, C_3 ist, wurde bereits bemerkt, $\varkappa = 1$ ist aber eine solche nicht, weil dafür $t = 1$ und somit $C_3 = -2^3$ wird.

Für $t = 2$ ist $C_3 = -2^3.3^3\varkappa$, also sicher von Null verschieden, da für $\varkappa = 0$ $t = \frac{1}{2}$ ist.

Damit ist gezeigt, dass C_0, C_1, C_2, C_3 nur für den Werth $\varkappa = 0$ sämmtlich verschwinden.

Um nun aus der Function $F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ den Factor $\varkappa^4$ abzusondern, wird an Stelle von t die Function

$$s = \frac{2t-1}{\varkappa} \tag{31)}$$

eingeführt, deren Entwickelung in der Umgebung von $\varkappa = 0$ mit den Gliedern

$$s = \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4}\varkappa + \frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2 + \frac{3.47}{2^{11}}\varkappa^3 + \frac{3.7.73}{2^{15}}\varkappa^4 + \frac{3.17.43}{2^{16}}\varkappa^5 + \qquad 32)$$

beginnt und welche für $\varkappa = 1$ zugleich mit t den Werth 1 erhält. Setzt man nun $t = \frac{\varkappa s + 1}{2}$, so ergibt sich:

$$F(\varkappa, t; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \frac{\varkappa^4}{2^6}\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2),$$

wobei

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \qquad 33)$$

$$\begin{aligned}4(1-\varkappa)[1+2(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3-2(2-\varkappa)s-\varkappa^2s^2]\Theta^2\Sigma^2 \\ +256(1-\varkappa)^2s^2[9+12(2-\varkappa)s-16(1-\varkappa)s^2-4\varkappa^2(2-\varkappa)s^3-\varkappa^4s^4]\Theta\Sigma\Pi+4096(1-\varkappa)^3s^4(3+\varkappa s)(3-\varkappa s)\Pi^2 \\ -[3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3(2-\varkappa)+4(2-2\varkappa+\varkappa^2)s+\varkappa^2(2-\varkappa)s^2]^2\Sigma^3\end{aligned}$$

ist.

Die Function $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ verschwindet für keinen von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ unabhängigen Werth von $\varkappa$, und es ist somit

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0 \qquad 34)$$

die Gleichung, welche zur Bestimmung von $\varkappa$ durch $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ oder Θ, Σ, Π dient.

Da $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ in $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ homogen ist, so hängt $\varkappa$ nur von den Verhältnissen zweier der Grössen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ zur dritten ab, wie geometrisch von vorneherein evident ist.

Nun kommt Alles darauf an, zu untersuchen, wie viele Wurzeln $\varkappa$ im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$ die Gleichung

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$$

für ein eigentliches Dreieck ABC hat.

Ein solches Dreieck ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass der Ausdruck

$$\begin{aligned}\Sigma &= -(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\end{aligned}$$

einen positiven Werth hat.

Zunächst lässt sich zeigen, dass die Gleichung

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0,$$

wenn $\Sigma > 0$ ist, sicher eine Wurzel im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$ hat.

Dazu wird diese Gleichung durch Θ^6 dividirt und gesetzt:

$$\frac{\alpha^2}{\Theta} = x \qquad \frac{\beta^2}{\Theta} = y \qquad \frac{\gamma^2}{\Theta} = 1-x-y$$

$$\frac{\Sigma}{\Theta^2} = S \qquad \frac{\Pi}{\Theta^3} = P \tag{35}$$

$$\frac{1}{\Theta^6}\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = f(\varkappa, s;\, S, P),$$

wofür im Folgenden, wenn es der Zusammenhang gestattet, zur Abkürzung auch nur $f(\varkappa, s)$, $f(\varkappa)$ oder f geschrieben wird.

Dann ist

$$S = -4(x^2+xy+y^2)+4(x+y)-1 \tag{36}$$

$$P = xy(1-x-y) \tag{37}$$

und nach 33)

$$\begin{aligned}f(0) &= 3^2[10S^2+63SP+81P^2-54S^3]\\ f(1) &= -2^9S^3.\end{aligned}$$

Wenn sich daher nachweisen lässt, dass, solange nur $S > 0$ ist, die Function

$$10S^2+63SP+81P^2-54S^3$$

einen positiven Werth hat, oder wenigstens nicht negativ ist, so folgt daraus, dass die im Intervalle $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ unzweifelhaft stetige Function $f(\varkappa, s; S, P)$ mindestens einmal den Werth Null annimmt, wenn $\varkappa$ dieses Intervall durchläuft.

Fasst man x, y als rechtwinklige Punktcoordinaten auf, so wird durch $S = 0$ eine Ellipse dargestellt, deren Mittelpunkt in den Punkt $\frac{1}{3} \big| \frac{1}{3}$ fällt und welche die Seiten des Dreieckes der Punkte $0|0$, $0|1$, $1|0$ in ihren Halbirungspunkten berührt.

Für $x = y = \frac{1}{3}$ ist $S = \frac{1}{3}$, somit wird durch $S > 0$ das Innere der Ellipse $S = 0$ dargestellt.

$P = 0$ repräsentirt die drei Geraden $x = 0, y = 0, x+y-1 = 0$. Die Function S erreicht ihre obere Grenze $\frac{1}{3}$ an der Stelle $x = y = \frac{1}{3}$, die Function P ihre obere Grenze $\frac{1}{27}$ an derselben Stelle. Fixirt man einen Werth S_0 im Intervalle $0 \leqq S \leqq \frac{1}{3}$, so wird durch $4(x^2+xy+y^2)-4(x+y)+1+S_0 = 0$ eine Ellipse im Inneren von $S = 0$ gestellt, ähnlich und ähnlich gelegen zur Ellipse $S = 0$.

Die zugehörigen Werthe von P, d. h. diejenigen, welche den Werthepaaren x, y entsprechen, welche die vorstehende Gleichung erfüllen, liegen, wie nach bekannten Regeln leicht ermittelt wird, zwischen den Grenzen

$$\frac{1+9S_0-(1-3S_0)\sqrt{1-3S_0}}{108} \quad \text{und} \quad \frac{1+9S_0+(1-3S_0)\sqrt{1-3S_0}}{108},$$

wobei der $\sqrt{1-3S_0}$ ihr positiver Werth zu ertheilen ist.

Da $\sqrt{1-3S_0} \leqq 1$ ist, so ist, wenn für S_0 nun wieder S geschrieben wird:

$$\frac{S}{9} \leqq P \leqq \frac{1}{54} + \frac{S}{18} \qquad \left(0 \leqq S \leqq \frac{1}{3}\right). \tag{38}$$

Somit ist $10S^2+63SP+81P^2-54S^3 \geqq 18S^2(1-3S)$, also positiv, wenn nicht gerade $S = \frac{1}{3}$ ist; dann ist aber das

Dreieck ABC gleichseitig und $\varkappa = 0$ eben selbst Wurzel der Gleichung 33). Damit ist gezeigt:

Die Gleichung $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$ oder $f(\varkappa, s; S, P) = 0$ hat für jedes eigentliche Dreieck ABC mindestens eine Wurzel $\varkappa$ im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$.

Jeder solchen positiven Wurzel $\varkappa$ entspricht nun aber auch eine negative Wurzel $\lambda = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$.

Vertauscht man nämlich die Grössen a^2 und b^2 untereinander, so tritt an die Stelle von $\varkappa = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ die Grösse $\lambda = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$. Um das Verhalten der Functionen $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ und $f(\varkappa, s; S, P)$ bei dieser Vertauschung kennen zu lernen, ist es erforderlich, den Zusammenhang zwischen $t(\varkappa)$ und $t\left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)$, beziehungsweise $s(\varkappa)$ und $s\left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)$ zu ermitteln.

Hiezu wird bemerkt: Die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

in welchen der $\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$ ihr positiver Werth ertheilt werden soll, bleiben ungeändert, wenn a^2 und b^2 mit einander vertauscht werden; versteht man also unter a und b die positiven Quadratwurzeln aus a^2 und b^2, so ist

$$\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \sin^2 \varphi}}$$

und

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa \sin^2 \varphi}\, d\varphi = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

wobei den beiden Quadratwurzeln ihre positiven Werthe ertheilt werden sollen.

Setzt man nun $b = a\sqrt{1-\varkappa}$ ($\sqrt{1-\varkappa} = |\sqrt{1-\varkappa}|$), so ergibt sich

$$K\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = \sqrt{1-\varkappa}\,K \qquad E\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}\,E(\varkappa);$$

daraus folgt für $t = \dfrac{-(1-\varkappa)K+E}{\varkappa E}$:

$$t\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = t(\lambda) = 1-t(\varkappa)\ {}^{1} \tag{39)}$$

und für $s = \dfrac{2t-1}{\varkappa}$:

$$s\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right) = s(\lambda) = (1-\varkappa)\,s(\varkappa).^{2} \tag{40)}$$

Nun ist es leicht das Verhalten der Functionen $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ und $f(\varkappa, s; S, P)$ beim Übergang von $\varkappa$ in λ zu beurtheilen. Setzt man zur Abkürzung:

---

[1] Für die Coëfficienten $\lambda_{2\nu}$ der Entwickelung

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \varkappa^n$$

folgt daraus:

$$2\gamma_{2\nu} = \gamma_1 - \binom{2\nu-1}{1}\gamma_2 + \binom{2\nu-1}{2}\gamma_3 - \ldots + \binom{2\nu-1}{2\nu-2}\gamma_{2\nu-1}$$

[2] Für die Coëfficienten $\delta_{2\nu-1}$ der Entwickelung

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \varkappa^n$$

folgt daraus:

$$2\delta_{2\nu-1} = \delta_0 - \binom{2\nu-1}{1}\delta_1 + \binom{2\nu-1}{2}\delta_2 - \ldots + \binom{2\nu-1}{2\nu-2}\delta_{2\nu-2}.$$

$$\left.\begin{aligned}
D_0(\varkappa, s) &= 4(1-\varkappa)[1+2(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3-2(2-\varkappa)s-\varkappa^2s^2]\\
D_1(\varkappa, s) &= 256(1-\varkappa)^2s^2[9+12(2-\varkappa)s-16(1-\varkappa)s^2-4\varkappa^2(2-\varkappa)s^3-\varkappa^4s^4]\\
D_2(\varkappa, s) &= 4096(1-\varkappa)^3s^4(3+\varkappa s)(3-\varkappa s)\\
D_3(\varkappa, s) &= -[3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2s^2][3(2-\varkappa)+4(2-2\varkappa+\varkappa^2)s+\varkappa^2(2-\varkappa)s^2]^2,
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

so ist nach 33)

$$\mathfrak{F}(\varkappa, s;\, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = D_0\Theta^2\Sigma^2+D_1\Theta\Sigma\Pi+D_2\Pi^2+D_3\Sigma^3 \tag{42}$$

und

$$f(\varkappa, s;\, S, P) = D_0S^2+D_1SP+D_2P^2+D_3S^3. \tag{43}$$

Beim Übergange von $\varkappa$ zu λ treten an die Stelle von $\varkappa$, $1-\varkappa$, $2-\varkappa$, s, $(2-\varkappa)s$, $\varkappa s$ die Grössen

$$\frac{-\varkappa}{1-\varkappa},\ \frac{1}{1-\varkappa},\ \frac{2-\varkappa}{1-\varkappa},\ (1-\varkappa)s,\ (2-\varkappa)s,\ -\varkappa s;$$

damit ergibt sich aber sofort für die vier Functionen $D_\nu(\varkappa, s)$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ die Relation:

$$D_\nu\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1},\, (1-\varkappa)s\right) = \frac{1}{(\varkappa-1)^2}\, D_\nu(\varkappa, s), \tag{44}$$

und daher auch für die Functionen $\mathfrak{F}$ und f die bemerkenswerthe Relation:

$$\mathfrak{F}(\lambda, s(\lambda)) = \frac{1}{(\varkappa-1)^2}\,\mathfrak{F}(\varkappa, s(\varkappa)), \qquad f(\lambda, s(\lambda)) = \frac{1}{(\varkappa-1)^2}\, f(\varkappa, s(\varkappa)). \tag{45}$$

Jeder von 1 verschiedenen Wurzel $\varkappa$ der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ oder $f = 0$ entspricht somit in der That eine Wurzel $\frac{\varkappa}{\varkappa-1}$; die Wurzel $\varkappa = 1$ tritt nur auf, wenn $\Sigma = 0$ ist, die Wurzel $\varkappa = 0$, welche mit ihrer entsprechenden zusammenfällt, gehört nur zu dem Falle des gleichseitigen Dreieckes.

Setzt man die Entwickelung der Function f für die Umgebung der Stelle $\varkappa = 0$ an in der Form

$$f = A_0 + A_1\varkappa + A_2\varkappa_2 + \ldots$$

so muss nach 45) die Relation erfüllt sein:

$$A_n + 2A_{n-1} + 3A_{n-2} + \ldots + (n+1)A_0 =$$
$$= (-1)^n \left[A_n - \binom{n-1}{1} A_{n-1} + \binom{n-1}{2} A_{n-2} - \ldots - (-1)^n A_1\right]. \quad 46)$$

Hieraus folgt: die Coëfficienten der geraden Potenzen von $\varkappa$ werden durch die Relation 45) nicht beeinflusst, die der ungeraden Potenzen aber durch jene der geraden bestimmt; insbesondere ist:

$$\left.\begin{array}{c} A_1 = -A_0,\ A_3 = 0,\ A_5 = A_4,\ A_7 = 2A_6 - A_4, \\ A_9 = 3A_8 - 5A_6 + 3A_4,\ A_{11} = 4A_{10} - 14A_8 + 28A_6 - 17A_4 \end{array}\right\} \quad 47)$$

u. s. w.

Es lässt sich aber ferner auch zeigen, dass die Gleichung $f(\varkappa, s; S, P) = 0$, wenn $S > 0$ ist, also für jedes eigentliche Dreieck ABC, im Intervalle $0 \lesseqgtr \varkappa < 1$ nicht mehr als eine Wurzel hat, und zwar dadurch, dass man nachweist, die Ableitung $\frac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s; S, P)$ ist unter den angegebenen Voraussetzungen im Intervalle $0 \leqq \varkappa < 1$ beständig negativ. Für die Stelle $\varkappa = 0$ selbst folgt dies, wenn nicht gerade $S = \frac{1}{3}$ ist, aus 45); differentirt man nämlich vollständig nach $\varkappa$, so folgt:

$$-\frac{1}{(\varkappa-1)^2} f'(\lambda) = \frac{-2}{(\varkappa-1)^3} f(\varkappa) + \frac{1}{(\varkappa-1)^2} f'(\varkappa)$$

und daraus für $\varkappa = 0$, also auch $\lambda = 0$,

$$f'(0) = -f(0). \quad 48)$$

Nachdem nun bereits bewiesen ist, dass $f(0)$ für $0 < S < \frac{1}{3}$ positiv ist, so ist damit gezeigt, dass $f'(0)$ negativ ist. Dasselbe zeigt natürlich ebenso die Relation $A_1 = -A_0$, da $f'(0) = A_1$, $f(0) = A_0$ ist.

Für das Innere des Intervalles (0, 1) lässt sich aber dieser Nachweis aus 45) offenbar nicht ableiten, da der Coëfficient A_2, der für jedes n aus 46) wegfällt, im Ausdrucke der Coëfficienten $A_{2\nu-1}$ nicht vorkommt, somit, ohne die übrigen Coëfficienten zu beeinflussen, für sich allein ganz willkürlich bleibt.

Um die Ableitung der Function $f(\varkappa, s; S, P)$ nach $\varkappa$ zu bilden, muss der Zusammenhang zwischen der Function s und ihrer Ableitung s' betrachtet werden.

Zwischen t und t' besteht ein einfacher algebraischer Zusammenhang.

Aus $(1-\varkappa)K+(\varkappa t-1)E = 0$, der Definitionsgleichung für t, folgt durch Differentiation:

$$-K+(1-\varkappa)\frac{dK}{d\varkappa}+(\varkappa t'+t)E+(\varkappa t-1)\frac{dE}{d\varkappa} = 0.$$

Führt man darin ein:

$$\frac{dK}{d\varkappa} = \frac{(\varkappa-1)K+E}{2\varkappa(1-\varkappa)} \qquad \frac{dE}{d\varkappa} = \frac{-K+E}{2\varkappa},$$

so ergibt sich:

$$-(1+t)K+(2\varkappa t'+3t)E = 0,$$

und daraus in Verbindung mit der Definitionsgleichung:

$$2\varkappa(\varkappa-1)t'-\varkappa t^2+2(\varkappa-1)t+1 = 0. \qquad 49)$$

Um die moderne Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die Function t anzuwenden, hätte man nur zu bemerken, dass die Differentialgleichung 49) durch die Substitution $t = 1+2(1-\varkappa)\frac{z'}{z}$ in die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\varkappa(\varkappa-1)z''+(\varkappa-1)z'-\frac{1}{4}z = 0$$

transformirt wird.

Wenn man die bekannten Darstellungen der Functionen K und E in der Umgebung der singulären Stelle $\varkappa = 1$ berücksichtiget, welche logarithmische Glieder enthalten, so überzeugt man sich leicht, dass die Ableitung t' bei der Annäherung von $\varkappa$ an die Stelle 1 logarithmisch unendlich wird.

Beiläufig seien noch die Recursionsformeln angeführt, welche sich aus 49) für die Coëfficienten γ_n der Entwickelung $t = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$ ergeben.

Für ein gerades $n > 2$ ergibt sich:

$$2(n+1)\gamma_n = (2n-1)\gamma_{n-1} - \Big[2\gamma_1\gamma_{n-2} + 2\gamma_2\gamma_{n-3} + \ldots + 2\gamma_{\frac{n}{2}-1}\gamma_{\frac{n}{2}}\Big],$$

für ein ungerades $n > 3$:

$$2(n+1)\gamma_n = (2n-1)\gamma_{n-1} - \Big[2\gamma_1\gamma_{n-2} + 2\gamma_2\gamma_{n-3} + \ldots + 2\gamma_{\frac{n-3}{2}}\gamma_{\frac{n+1}{2}} + \gamma^2_{\frac{n-1}{2}}\Big] \qquad 50)$$

Für $s = \dfrac{2t-1}{\varkappa}$ erhält man aus 49) die Differentialgleichung

$$4\varkappa(\varkappa-1)s' - \varkappa^2 s^2 + 2(3\varkappa-4)s + 3 = 0. \qquad 51)$$

Mit t' zugleich wird offenbar auch s' bei der Annäherung von $\varkappa$ an die Stelle 1 logarithmisch unendlich.

Die entsprechenden Recursionsformeln für die Coëfficienten δ_n sind für ein gerades $n \geqq 4$:

$$4(n+2)\delta_n = 2(2n+1)\delta_{n-1} - (2\delta_0\delta_{n-2} + \ldots + 2\delta_{\frac{n}{2}-2}\delta_{\frac{n}{2}} + \delta^2_{\frac{n}{2}-1}),$$

für ein ungerades $n \geqq 3$:

$$4(n+2)\delta_n = 2(2n+1)\delta_{n-1} - (2\delta_0\delta_{n-2} + \ldots + 2\delta_{\frac{n-3}{2}}\delta_{\frac{n-1}{2}}). \qquad 50')$$

Damit lässt sich nun $\dfrac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s; S, P)$ als ganze Function von s darstellen. Zunächst erhält man:

$$\frac{dD_\nu}{d\varkappa} = \frac{\partial D_\nu}{\partial \varkappa} + \frac{\partial D_\nu}{\partial s} s' \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3)$$

und mit Rücksicht auf 51):

$$4\varkappa(1-\varkappa)\frac{dD_\nu}{d\varkappa} = 4\varkappa(1-\varkappa)\frac{\partial D_\nu}{\partial\varkappa} - [\varkappa^2 s^2 + 2(4-3\varkappa)s - 3]\frac{\partial D_\nu}{\partial s} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3).$$

Setzt man:

$$4\varkappa(1-\varkappa)\frac{dD_\nu}{d\varkappa} = 2E_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3), \tag{52}$$

so ergibt sich:

$$2\varkappa(1-\varkappa)\frac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s; S, P) = E_0 S^2 + E_1 SP + E_2 P^2 + E_3 S^3. \tag{53}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} E_0 = {} & 2^2(1-\varkappa)\{2.3^2(4-3\varkappa) + 3(-2^4.3, 2^4, 3.7)s + 2^2(-2^4.11, 2^8, -2^3.5, 3.7)s^2 \\ & + (2^9, 3, -2^8.11, 2^4.7\;11, 2^4.7, -3.41)s^3 + 2\varkappa^2(2^6.3^2, -2^4.7^2, 2^8, -3)s^4 + \varkappa^4(2^5.11, -2^6.5, 3.19)s^5 \\ & + 2^2.\varkappa^6(13-6\varkappa)s^6 + 3\varkappa^8 s^7\} \end{aligned} \tag{54_0}$$

$$\begin{aligned} E_1 = {} & 2^8(1-\varkappa)^2\{3^3 s + 2^2.3^2(1-\varkappa)s^2 - 3(2^7, -2^4.7, 3.5)s^3 + 2(2^7, -2^4.11, 0, 2^3.3)s^4 + \varkappa^2(2^5.5, -2^4.3^2, 11)s^5 \\ & + 2^2.\varkappa^4(9-4\varkappa)s^6 + 3\varkappa^6 s^7\} \end{aligned} \tag{54_1}$$

$$E_2 = 2^{12}(1-\varkappa)^3\{2.3^3 s^3 - 2.3^2(8-3\varkappa)s^4 - 3^3.\varkappa^2 s^5 + 2^2\varkappa^2(5-2\varkappa)s^6 + 3\varkappa^4 s^7\} \tag{54_2}$$

$$\begin{aligned} E_3 = {} & [3(2-\varkappa) + 4(2, -2, 1)s + \varkappa^2(2-\varkappa)s^2]\{-2.3^2(8, -10, 5) + 3(2^5, 0, -2.53, 53)s \\ & + 2(2^7.3, -2^6\;11, 2^3.3.17, -2^2\;11, -29)s^2 + 2^2\varkappa^2(2^5.3, -2^2.3.11, 2.29, -7)s^3 \\ & + 2^2.\varkappa^4(20, -19, 5)s^4 + 3\varkappa^6(2-\varkappa)s^5\}. \end{aligned} \tag{54_3}$$

Es sind also die Vorzeichen der Functionen E_0, E_1, E_2, E_3 im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ zu untersuchen.

$\frac{E_0}{1-\varkappa}$ verschwindet für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$; für das Innere des Intervalles lässt sich zeigen, dass E_0 beständig negativ ist.

Es ist nämlich $D_0 = 4(1-\varkappa)Q\,Q_1\,Q_2$, wenn gesetzt wird:

$$Q = 1+2(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2 = \frac{5}{2}+0.\varkappa+\alpha_2\varkappa^2+\alpha_3\varkappa^3+ .$$

$$Q_1 = 3+4(2-\varkappa)s+\varkappa^2 s^2 = 6+0.\varkappa+\beta_2\varkappa^2+\beta_3\varkappa^3+$$

$$Q_2 = 3-2(2-\varkappa)s-\varkappa^2 s^2 = \frac{3}{2}+0.\varkappa-\alpha_2\varkappa^2-\alpha_3\varkappa^3- .$$

Setzt man die Entwickelung des Productes $Q\,Q_1\,Q_2$, welche mit den Gliedern $\frac{45}{4}+0.\varkappa-\frac{3^2.13}{2^9}\varkappa^2-\frac{3^2.13}{2^9}\varkappa^3-\ldots$ beginnt, an in der Form: $\mathfrak{C}_0+0.\varkappa+\mathfrak{C}_2\varkappa^2+ .$ so lässt sich zeigen, dass die Coëfficienten $\mathfrak{C}_n$ von $n = 2$ angefangen negativ sind. Hierzu werden folgende Bemerkungen vorausgeschickt. Für die Coëfficienten δ_n der Entwickelung

$$s = \delta_0+\delta_1\varkappa+\delta_2\varkappa^2+ .$$

bestehen die Recursionsformeln

$$\delta_n = c_1^2\delta_{n-1}+\frac{c_2^2}{3}\delta_{n-2}+\ldots+\frac{c_n^2}{2n-1}\delta_0+\frac{3(n+1)}{(n+2)(2n+1)}c_{n+1}^2 \qquad R_1)$$

$$\left(\text{aus II, S. 35, } \delta_{n-1} = 2\gamma_n,\ c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)$$

und

$$\delta_n = \frac{2n+1}{2n+4}\delta_{n-1}-\frac{1}{4(n+2)}\left[2\delta_0\delta_{n-2}+2\delta_1\delta_{n-3}+ .\quad\right] \qquad R_2)$$

(aus 50′).

Aus R_1) folgt schon, dass die δ_n positive rationale Zahlen sind, aus R_2), dass auch für alle $n \geqq 3$ $\delta_n < \delta_{n-1}$ ist.

Aus R_1) folgt weiter:

$$2\delta_n = c_1^2 2\delta_{n-1} + \frac{c_2^2}{3} 2\delta_{n-2} + \ldots + \frac{c_{n-1}^2}{2n-3} 2\delta_1 + \frac{c_n^2}{2n-1} 2\delta_0 + \\ + \frac{6(n+1)}{(n+2)(2n+1)} c_{n+1}^2$$

$$\delta_{n-1} = c_1^2 \delta_{n-2} + \frac{c_2^2}{3} \delta_{n-3} + \ldots + \frac{c_{n-1}^2}{2n-3} \delta_0 + \frac{3n}{(n+1)(2n-1)} c_n^2.$$

Angenommen nun, es sei bereits constatirt, dass

$$2\delta_{n-1} > \delta_{n-2},\ 2\delta_{n-2} > \delta_{n-3}, \ldots 2\delta_2 > \delta_1,\ 2\delta_1 = \delta_0 = \frac{3}{8}$$

ist, so ist auch $2\delta_n > \delta_{n-1}$ gewiss für solche Werthe von n, für welche

$$\frac{3}{4} \frac{c_n^2}{2n-1} + \frac{6(n+1)}{(n+2)(2n+1)} c_{n+1}^2 > \frac{3n}{(n+1)(2n-1)} c_n^2 \text{ ist.}$$

Setzt man darin $c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} c_n$, so folgt die Bedingung $n > 1$.

Nun ist aber in der That $2\delta_2 = \frac{3.37}{2^9} > \frac{3}{2^4} = \delta_1$, also ist für $n > 1$

$$2\delta_n > \delta_{n-1}.$$

In der Entwickelung von $(2-\varkappa)s$ ist der Coëfficient von $\varkappa^n$ gleich $2\delta_n - \delta_{n-1}$, also positiv; somit sind die Coëfficienten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \beta_2, \beta_3, \ldots$ sämmtlich positiv.

Ferner ist zu bemerken, dass $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ und $\beta_n < \beta_{n-1}$ ist für $n > 3$.

Dies folgt — wie wohl kaum hervorgehoben zu werden braucht — auch von einem noch so grossen Werthe des n ab (ebenso wie oben für die Coëfficienten δ_n) keineswegs aus dem Umstande, dass die betreffenden Potenzreihen auch für $\varkappa = 1$ noch convergiren.

Bezeichnet man für den Augenblick $(2-\varkappa)s$ mit u, s^2 mit v und setzt die Entwickelungen von u und v in der Umgebung der Stelle $\varkappa = 0$ an in der Form:

$$u = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \varkappa + \varepsilon_2 \varkappa^2 + \ldots \qquad v = \Delta_0 + \Delta_1 \varkappa + \Delta_2 \varkappa^2 + \ldots$$

so ergeben sich aus den Differentialgleichungen für u und v, welche aus 51) leicht abgeleitet werden, nämlich:

$$4\varkappa(1-\varkappa)(2-\varkappa)u'+\varkappa^2u^2+2(8-8\varkappa+\varkappa^2)u-3(4-4\varkappa+\varkappa^2)=0$$

und

$$2\varkappa(1-\varkappa)v'+\varkappa^2sv+2(4-3\varkappa)v-3s=0$$

Recursionsformeln für die Coëfficienten ε_n und Δ_n.

Aus der Differentialgleichung für u folgt, wenn $n>2$ ist,

$$8(n+2)\varepsilon_n=4(3n+1)\varepsilon_{n-1}-2(2n-3)\varepsilon_{n-2}-(2\varepsilon_0\varepsilon_{n-2}+\ldots).$$

Angenommen, es sei bereits bekannt, dass $\varepsilon_{n-2}>\varepsilon_{n-1}$ ist, so folgt:

$$8(n+2)\varepsilon_n<2(4n+5)\varepsilon_{n-1}-(2\varepsilon_0\varepsilon_{n-2}+\ldots),$$

also ist:

$$\varepsilon_n<\varepsilon_{n-1}.$$

Die Rechnung ergibt:

$$\varepsilon_0=\frac{3}{4},\ \varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{3.5}{2^9},\ \varepsilon_4=\frac{3^4.5}{2^{14}}<\varepsilon_3,$$

also ist die Voraussetzung $\varepsilon_{n-2}>\varepsilon_{n-1}$ für $n\geqq 5$ erfüllt, und gilt $\varepsilon_n<\varepsilon_{n-1}$ für $n\geqq 4$, $\varepsilon_3=\varepsilon_2$.

Aus der Differentialgleichung für v folgt:

$$2(n+4)\Delta_n-2(n+2)\Delta_{n-1}+(\delta_0\Delta_{n-2}+\ \ .+\delta_{n-2}\Delta_0)-3\delta_n=0,$$

also ist:

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}-\frac{\delta_0\Delta_{n-2}+\ldots+\delta_{n-2}\Delta_0}{2(n+4)}+\frac{3\delta_n-4\Delta_{n-1}}{2(n+4)}$$

$\Delta_{n-1}=2\delta_0\delta_{n-1}+2\delta_1\delta_{n-2}+\ldots$ also ist, wegen $\delta_0=\frac{3}{8}$, für $n\geqq 2$ $4\Delta_{n-1}\geqq 3\delta_{n-1}>3\delta_n$,

somit ist:

$$\Delta_n<\Delta_{n-1} \text{ für } n\geqq 2.$$

Die Rechnung ergibt:

$$\Delta_0=\Delta_1=\frac{3^2}{2^6},\ \Delta_2=\frac{3^2.53}{2^{12}}<\Delta_1.$$

Da nun $\alpha_n = 2\varepsilon_n + \Delta_{n-2}$ und $\beta_n = 4\varepsilon_n + \Delta_{n-2} = \alpha_n + 2\varepsilon_n$ ist, so ist auch $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ und $\beta_n < \beta_{n-1}$, wenn $n \geqq 4$ ist. Die Rechnung ergibt:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3.17}{2^8},\ \alpha_4 = \frac{3^2.151}{2^{13}};\quad \beta_2 = \beta_3 = \frac{3.11}{2^7},\ \beta_4 = \frac{3^2.7^2}{2^{11}}$$

Jetzt lässt sich zeigen, dass die Coëfficienten $\mathfrak{C}_n$ von $n = 2$ angefangen sämmtlich negativ sind.

Zunächst ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_n = \frac{15}{4}\beta_n - 6\alpha_n - (\beta_{n-2}\alpha_2 + \beta_{n-3}\alpha_3 \ldots + \beta_2\alpha_{n-2})\\ -[\beta_{n-4}\alpha_2^2 + \beta_{n-5}2\alpha_2\alpha_3 + \beta_{n-6}(2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2) + \ldots\beta_2(2\alpha_2\alpha_{n-4} + \ldots)]\\ -12\alpha_2\alpha_{n-2} - 12\alpha_3\alpha_{n-3} - \ldots \qquad (n \geqq 5)\end{aligned}$$

Für $n \geqq 4$ ist $\beta_{n-2} > \beta_n$, $\beta_{n-3} > \beta_n$, $\alpha_{n-2} > \alpha_n$, also

$$\mathfrak{C}_n < \left(\frac{15}{4} - \alpha_2 - \alpha_3\right)\beta_n - (6 + 12\alpha_2)\alpha_n.$$

Es ist $\alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_2 = \frac{51}{128} > \frac{1}{4}$ und $12\alpha_2 = \frac{153}{64} > 2$, also:

$$\mathfrak{C}_n < \frac{7}{2}\beta_n - 8\alpha_n = -\frac{1}{2}(16\alpha_n - 7\beta_n).$$

Aus

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 4\delta_n - 2\delta_{n-1} + (2\delta_0\delta_{n-2} + \quad .)\\ \beta_n &= 8\delta_n - 4\delta_{n-1} + (2\delta_0\delta_{n-2} + \ldots)\end{aligned}$$

folgt:

$$16\alpha_n - 7\beta_n = 4(2\delta_n - \delta_{n-1}) + 9(2\delta_0\delta_{n-2} + \quad .),$$

also ist:

$$16\alpha_n - 7\beta_n > 0, \text{ somit } \mathfrak{C}_n < 0, \text{ für } n \geqq 5.$$

Die Rechnung ergibt $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = -\frac{3^2\ 13}{2^9}$, $\mathfrak{C}_4 = -\frac{3^2.869}{2^{14}}$, also sind in der That die Coëfficienten $\mathfrak{C}_n$ von $\mathfrak{C}_2$ angefangen sämmtlich negativ.

In dem betrachteten Intervalle $0 < \varkappa < 1$ sind Q und Q_1 durchaus positive Functionen, Q_2 nimmt beständig ab, erhält für $\varkappa = 1$ den Werth 0, ist somit ebenfalls durchaus positiv; also nimmt D_0 beständig ab und ist daher E_0 negativ.

Um das Vorzeichen von E_1 zu beurtheilen, wird der Ausdruck $\frac{1}{2^8} D_1(\varkappa, s)$ betrachtet, welcher vorübergehend mit $(1-\varkappa)^2 s^2 \varphi_1(\varkappa, s)$ bezeichnet wird, wobei

$$\varphi_1(\varkappa, s) = 9+12(2-\varkappa)s-16(1-\varkappa)s^2-4\varkappa^2(2-\varkappa)s^3-\varkappa^4 s^4$$

ist.

Nach Früherem nimmt $(2-\varkappa)s$ zugleich mit $\varkappa$ zu, $(1-\varkappa)s^2$ mit wachsendem $\varkappa$ ab, $\varkappa^2(2-\varkappa)s^3$ und $\varkappa^4 s^4$ zugleich mit $\varkappa$ zu. Also ist $\varphi_1(\varkappa, s) > 9+12 \; \frac{3}{2^2} -16 \; \frac{3^2}{2^6} -4-1 = \frac{43}{4}$, durchaus — wobei hier immer das Intervall $0 < \varkappa < 1$ gemeint ist — positiv.

Wenn sich daher zeigen lässt, dass $(1-\varkappa)\varphi_1(\varkappa, s)$ mit wachsendem $\varkappa$ abnimmt, so gilt dies auch vom Producte aus $(1-\varkappa)\varphi_1(\varkappa, s)$ in $(1-\varkappa)s^2$, und folgt daraus, dass E_1 negativ ist.

Hiezu ist erforderlich, dass

$$-\varphi_1+(1-\varkappa)\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}s'\right] < 0$$

sei, oder dass, wenn man $s' = \frac{-\varkappa^2 s^2-2(4-3\varkappa)s+3}{4\varkappa(1-\varkappa)}$ einführt und $4\varkappa\frac{d}{d\varkappa}(1-\varkappa)\varphi_1$ mit $\psi_1(\varkappa)$ bezeichnet,

$$\psi_1(\varkappa) = 72(1-\varkappa)-24(12-8\varkappa-\varkappa^2)s+16(16-20\varkappa-2\varkappa^2+ \\ +3\varkappa^3)s^2+4\varkappa^2(40-32\varkappa-\varkappa^2)s^3+8\varkappa^4(5-2\varkappa)s^4+4\varkappa^6 s^5 < 0$$

sei.

Von den hier auftretenden Coëfficienten der Potenzen von s wechselt nur $16-20\varkappa-2\varkappa^2+3\varkappa^3$ zwischen 0 und 1 sein Vorzeichen; er wird deshalb in zwei Theile zerlegt, welche einzeln ihr Vorzeichen nicht wechseln, nämlich

$$16-17\varkappa-2\varkappa^2+3\varkappa \quad \text{und} \quad -3\varkappa.$$

Nun wird von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass die Potenzreihe $\delta_0+\delta_1\varkappa+\delta_2\varkappa^2+$ auch für $\varkappa = 1$ noch convergirt und die Summe der Coëfficienten gleich 1 ist; offenbar gilt dasselbe auch von allen ganzen positiven Potenzen der Reihe. Setzt man

$$1-(\delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_{i-1}) = \vartheta_i,$$

so ist:

$$\delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\delta_{i-1}\varkappa^{i-1}+\delta_i\varkappa^i<s<\delta_0+\delta_1\varkappa+\ldots+\delta_{i-1}\varkappa^{i-1}+\vartheta_i\varkappa^i$$

und bestehen analoge Begrenzungen für die ganzen positiven Potenzen von s.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\varkappa) < {} & 72(1-\varkappa)-24(12-8\varkappa-\varkappa^2)\left[\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2+\frac{3.47}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{3.7.73}{2^{15}}\varkappa^4+\frac{3.17.43}{2^{16}}\varkappa^5\right] \\
& +16(16-17\varkappa-2\varkappa^2+3\varkappa^3)\left[\frac{3^2}{2^6}+\frac{3^2}{2^6}\varkappa+\frac{3^2.53}{2^{12}}\varkappa^2+\frac{3^3.7}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{2089}{2^{12}}\varkappa^4\right] \\
& -48\varkappa\left[\frac{3^2}{2^6}+\frac{3^2}{2^6}\varkappa+\frac{3^2.53}{2^{12}}\varkappa^2+\frac{3^3.7}{2^{11}}\varkappa^3+\frac{3^2.5.1693}{2^{20}}\varkappa^4+\frac{3^2.6707}{2^{20}}\varkappa^5+\frac{3^2.687781}{2^{27}}\varkappa^6\right] \\
& +4\varkappa^2(40-32\varkappa-\varkappa^2)\left[\frac{3^3}{2^9}+\frac{3^4}{2^{10}}\varkappa+\frac{3^5.23}{2^{16}}\varkappa^2+\frac{51307}{2^{16}}\varkappa^3\right] \\
& +8\varkappa^4(5-2\varkappa)\left[\frac{3^4}{2^{12}}+\frac{3^4}{2^{11}}\varkappa+\frac{3853}{2^{12}}\varkappa^2\right]+4\varkappa^6\left[\frac{3^5}{2^{15}}+\frac{32525}{2^{15}}\varkappa\right] \\
= {} & -3^2.7\varkappa+\frac{3^4}{2^5}\varkappa^2+0.\varkappa^3+\frac{226307}{2^{11}}\varkappa^4-\frac{1525771}{2^{16}}\varkappa^5-\frac{4628973}{2^{16}}\varkappa^6+\frac{74305177}{2^{23}}\varkappa^7 \\
& <\varkappa[-63+3\varkappa+111\varkappa^3-23\varkappa^4-70\varkappa^5+9\varkappa^6] \\
& <\varkappa[-60+112\varkappa^3-84\varkappa^6]=-4\varkappa[15-28\varkappa^3+21\varkappa^6].
\end{aligned}$$

Nun ist aber, da $14^2-15.21<0$ ist, $15-28\varkappa^3+21\varkappa^6$ beständig positiv, somit auch E_1 negativ.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens beruht wesentlich auf dem Umstande, dass $\psi_1(1)$ von Null verschieden ist. Um das Vorzeichen von E_2 zu beurtheilen, wird der Ausdruck dafür auf die Form gebracht:

$$E_2=2^{12}(1-\varkappa)^3s^3\{2.3^2[3-(2^3-3\varkappa)s]-\varkappa^2s^2(3^3-2^2.5s)-\varkappa^3s^3(2^3-3\varkappa s)\},$$

aus der man sofort ersieht: wenn $3-(2^3-3\varkappa)s$ im Intervalle $0<\varkappa<1$ negativ ist, so gilt dies auch von E_2.

Nun ist aber, da $2^3-3\varkappa>0$ ist,

$$3-(2^3-3\varkappa)s<3-(2^3-3\varkappa)\left[\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}\varkappa+\frac{3.37}{2^{10}}\varkappa^2\right]=$$

$$=-\frac{3}{2^3}\varkappa-\frac{3.13}{2^7}\varkappa^2+\frac{3^2.37}{2^{10}}\varkappa^3=-\frac{3}{2^{10}}\varkappa[128+104\varkappa-111\varkappa^2]$$

Der Ausdruck $128+104\varkappa-111\varkappa^2$ ist im betrachteten Intervalle, wie unmittelbar evident ist, positiv, also ist in der That auch E_2 negativ.

Es ist also jetzt nachgewiesen, dass die Functionen E_0, E_1 und E_2 im Intervalle $0<\varkappa<1$ beständig negativ sind.

Wäre auch E_3 negativ, so wäre damit nach 53) die Frage nach dem Vorzeichen von $\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P)$ schon erledigt; das ist aber eben nicht der Fall.

Der erste Factor von E_3 $3(2-\varkappa)+4(2-2\varkappa+\varkappa^2)s+\varkappa^2(2-\varkappa)s^2$ ist ersichtlich durchaus positiv; der zweite Factor

$$-2.3^2(8, -10, 5)+3(2^5, 0, -2, 53, 53)s+\,.\,.$$

verschwindet für $\varkappa=0$ und $\varkappa=1$, seine Entwickelung in der Umgebung von $\varkappa=0$ beginnt mit $2^2.3^3\varkappa$, er ist daher für hinreichend kleine Werthe von $\varkappa$ positiv. Für $\varkappa=0\cdot6$, $0\cdot7$; $0\cdot8$, $0\cdot9$ ergibt die Rechnung die Werthe $7\cdot1\ldots$, $-0\cdot3\ldots$, $-9\cdot6\ldots$, $-6\cdot8\ldots$, die Function E_3 verschwindet daher für $\varkappa=0$ und $\varkappa=1$, nimmt aber im Inneren des Intervalles $0>\varkappa>1$ sowohl positive als negative Functionswerthe an.

Man kann daher nur Folgendes behaupten: wenn ABC ein eigentliches Dreieck ist, d. h. $0 < S \leqq \frac{1}{3}$, $0 < P \leqq \frac{1}{27}$, so ist für diejenigen Werthe von $\varkappa$ des Intervalles $0 < \varkappa < 1$, für welche E_3 negativ ist, sicher auch

$$2\varkappa(1-\varkappa)\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P) = E_0 S^2 + E_1 SP + E_2 P^2 + E_3 S^3$$

negativ; für diejenigen Werthe von $\varkappa$, für welche E_3 positiv ist, ist, da E_1 und E_2 negativ sind, nach 38):

$$2\varkappa(1-\varkappa)\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P) \leqq E_0 S^2 + \frac{1}{3^2}E_1 S^2 + \frac{1}{3^4}E_2 S^2 + \frac{1}{3}E_3 S^2 = \frac{S^2}{3^4}(3^4 E_0 + 3^2 E_1 + E_2 + 3^3 E_3). \tag{55}$$

Es bleibt daher jetzt noch das Vorzeichen der Function $3^4 E_0 + 3^2 E_1 + E_2 + 3^3 E_3$ im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ zu untersuchen. Führt man aus den Formeln 54) für E_0, E_1, E_2, E_3 ihre Ausdrücke ein und ordnet das Resultat nach Potenzen von s, so ergibt sich eine ganze Function in s vom siebenten Grade, deren Coëfficienten sämmtlich den Factor $\varkappa^2$ enthalten.

Bezeichnet man nach Absonderung dieses Factors das Resultat mit $G(\varkappa, s)$, so ist:

$$3^4 E_0 + 3^2 E_1 + E_2 + 3^3 E_3 = \varkappa^2 G(\varkappa, s), \tag{56}$$

$$G(\varkappa, s) = g_0(\varkappa) + g_1(\varkappa)s + g_2(\varkappa)s^2 + g_3(\varkappa)s^3 + g_4(\varkappa)s^4 + g_5(\varkappa)s^5 + g_6(\varkappa)s^6 + g_7(\varkappa)s^7, \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_0 &= -2.3^6(8-5\varkappa)\\
g_1 &= -3^6(2^4.5,\ -2^5.3,\ 31)\\
g_2 &= -2^2.3^5(2^4.5,\ -2^5.5,\ 3.37,\ -5^2)\\
g_3 &= 3^3(2^9.5,\ -2^9.5,\ -2^4.3.17,\ 2^4.85,\ -307)\\
g_4 &= 2.3^3(2^{10}.5,\ -2^8.3^2.5,\ 2^7.77,\ -2^5.5^3,\ 2^2.193,\ -3.19)\\
g_5 &= 3^2(2^{12}.7,\ -2^{14}.5,\ 2^8.3.127,\ -2^{10}.61,\ 2^4.1421,\ -2^6.3.23,\ 3^3.13)\\
g_6 &= 2^2(2^{12}.5,\ -2^{12}.17,\ 2^8.3.139,\ -2^9.187,\ 2^4.3311,\ -2^4.3^2.121,\ 3^3.113,\ -2^3.3^3)\\
g_7 &= 3(0,\ 0,\ 2^{12},\ -2^{12}.3,\ 2^8.3.19,\ -2^9.17,\ 2^4.3^2.19,\ -2^4.3^3,\ 3^3).
\end{aligned}\right\} \qquad 58)$$

Für $\varkappa = 0$, also $s = \frac{3}{8}$, ist $G\left(0, \frac{3}{8}\right) = -\frac{3^{12}}{2^4}$; für $\varkappa = 1$, also $s = 1$, ist $G(1,1) = 0$. Der Umstand, dass $G(1,1)$ verschwindet, macht es unmöglich, zur Untersuchung des Vorzeichens von $G(\varkappa, s)$ dasjenige Verfahren zu benützen, welches für die Beurtheilung der Vorzeichen von E_1 und E_2 angewendet wurde, nämlich dadurch, dass man s und die Potenzen von s durch zwei ganze rationale Functionen von $\varkappa$ begrenzte, eine ganze rationale Function $\Gamma(\varkappa)$ zu bilden, so beschaffen, dass für $0 < \varkappa < 1$ durchaus $G(\varkappa, s) < \Gamma(\varkappa) < 0$ ist. Für $\varkappa = 1$ erhalten nämlich die oberen Begrenzungen von s und seinen Potenzen den Werth 1, die unteren aber Werthe, welche kleiner sind als 1, folglich ist $\Gamma(1)$ positiv und daher auch $\Gamma(\varkappa)$ in der Nähe von $\varkappa = 1$ positiv.

Das Verfahren, welches hier eingeschlagen wird, um zu zeigen, dass in der That $G(\varkappa, s)$ für das betrachtete Intervall von $\varkappa$ negativ ist, lässt sich vielleicht am besten in der geometrischen Einkleidung auseinandersetzen.

An Stelle von s wird eine von $\varkappa$ unabhängige Veränderliche z eingeführt, $\varkappa$ und z werden als rechtwinkelige Punktcoordinaten in einer Constructionsebene aufgefasst.

Wenn es nun gelingt in dieser Ebene ein Flächenstück $\mathfrak{G}$ so zu begrenzen, dass die Curve $z = s(\varkappa)$ $(0 < \varkappa < 1)$ ganz im Inneren von $\mathfrak{G}$ liegt und dass überall im Inneren von $\mathfrak{G}$ $G(\varkappa, z)$ negativ ist, dann ist damit gewiss auch gezeigt, dass $G(\varkappa, s)$ im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist.

Nach 57) ist

$$G(\varkappa, z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + g_4 x^4 + g_5 z^5 + g_6 z^6 + g_7 z^7, \qquad 59)$$

wobei zur Vereinfachung das Argument $\varkappa$ bei den Functionen g, wie in 58) weggelassen wird.

Über die Vorzeichen dieser ganzen Functionen g im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ ist Folgendes zu bemerken.

g_0 ist ersichtlich durchaus negativ, ebenso g_1, weil

$$2^8 . 3^2 - 2^4 . 5 . 31 < 0$$

ist; ebenso g_2, denn es ist

$$2^4 . 5 - 2^5 . 5\varkappa + 3 . 37\varkappa^2 - 5^2\varkappa^3 > 2^4 . 5 - 2^5 . 5\varkappa + (3 . 37 - 5^2)\varkappa^2 =$$
$$= 2[2^3 . 5 - 2^4 . 5\varkappa + 43\varkappa^2];$$

dieser Ausdruck ist aber positiv, weil $2^6 . 5^2 - 2^3 . 5 . 43 < 0$ ist.

g_3 ist durchaus positiv, denn

$$\frac{1}{3^3} g_3' = -2^9 . 5 - 2^5 . 51\varkappa + 2^4 . 3 . 85\varkappa^2 - 2^2 . 307\varkappa^3$$
$$< -2^4(2^5 . 5 + 2 . 51 - 3 . 85)\varkappa^2 - 2^2 . 307\varkappa^3$$

ist ersichtlich negativ und der kleinste Werth von g_3, nämlich $g_3(1) = 3^4 . 79$ ist positiv.

g_4 ist durchaus positiv, denn

$$\frac{1}{2 . 3^3} g_4' = -2^8 . 3^2 . 5 + 2^8 . 77\varkappa - 2^5 . 3 . 5^3\varkappa^2 + 2^4 . 193\varkappa^3 - 3 . 5 . 19\varkappa^4$$
$$= -2^8 . 3^2 . 5 + 2^8 . 77\varkappa - 2^4 . 557\varkappa^2 - 2^4 . 193\varkappa^2(1-\varkappa) - 3 . 5 . 19\varkappa^4$$

ist beständig negativ, da $2^{14} . 77^2 - 2^{12} . 3^2 . 5 . 557 = -2^{12} . 1349$ negativ ist. Der kleinste Werth von g_4 ist somit $g_4(1) = 2 . 3^5\ 19$, und da dieser positiv ist, so ist g_4 durchaus positiv.

g_5 ist durchaus positiv, denn es ist

$$\frac{1}{3^2.5!} g_5^{(5)} = -2.3[736-351\varkappa] < 0,$$

$\frac{1}{3^2.4!} g_5^{(4)}(1) = 5921$, also ist $g_5^{(4)}$ durchaus positiv; ferner ist $\frac{1}{3^2.3!} g_5'''(1) = -2^2.5.433$, also ist g_5''' durchaus negativ; ferner ist $\frac{1}{2.3^2} g_5''(1) = 3.5.511$, also ist g_5'' durchaus positiv; ferner ist $\frac{1}{3^2} g_5'(1) = -2.3.5.109$, also ist g_5' durchaus negativ; endlich ist $\frac{1}{3^2} g_5(1) = 3^2.55$, also g_5 durchaus positiv.

g_6 ist durchaus positiv, denn es ist

$$\frac{1}{2^2.6!} g_6^{(6)} = 3^3[113-2^3.7\varkappa] > 0,$$

$$\frac{1}{2^2.5!} g_6^{(5)}(1) = -2.3^2.203, \quad \frac{1}{2^2.4!} g_6^{(4)}(1) = 4061,$$

$$\frac{1}{2^2.3!} g_6'''(1) = -2^2.1155, \quad \frac{1}{2^3} g_6''(1) = 3^2.485,$$

$$\frac{1}{2^2} g_6'(1) = -2.3^4.11, \quad \frac{1}{2^2} g_6(1) = 3^5.$$

g_7 ist durchaus positiv, denn setzt man für den Augenblick $g_7 = 3\varkappa^2\mathfrak{g}$, so ist

$$\frac{1}{5!}\mathfrak{g}^{(5)} = -3^3[2^4-6\varkappa] < 0, \quad \frac{1}{4!}\mathfrak{g}^{(4)}(1) = 3^2.109,$$

$$\frac{1}{3!}\mathfrak{g}'''(1) = -2^2.5.7.11, \quad \frac{1}{2}\mathfrak{g}''(1) = 3^2.109,$$

$$\mathfrak{g}'(1) = -2.3^3.5, \quad \mathfrak{g}(1) = 3^3.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass für positive Werthe von z die dritte partielle Ableitung von G nach z, welche durch $G_{0,3}(\varkappa, z)$ bezeichnet wird, für alle betrachteten Werthe von $\varkappa$ positiv ist. Die Function $G_{0,2}(\varkappa, z)$ wächst daher mit z zugleich.

Wenn sich also zeigen lässt, dass $G_{0,2}\left(\varkappa, \frac{3}{8}\right)$ für jeden der betrachteten Werthe von $\varkappa$ positiv ist, so ist $G_{0,2}(\varkappa, z)$ sicher positiv für $0 < \varkappa < 1$, $z \geqq \frac{3}{8}$.

Es ist

$$G_{0,2}\left(\varkappa, \frac{3}{8}\right) = 2g_2 + \frac{3^2}{2^2} g_3 + \frac{3^3}{2^4} g_4 + \frac{3^3.5}{2^7} g_5 + \frac{3^5.5}{2^{11}} g_6 + \\ + \frac{3^6.7}{2^{14}} g_7 = \frac{3^2}{2^{14}} \Phi(\varkappa), \qquad 60)$$

wobei

$$\Phi(\varkappa) =$$

$$2^{17}.3^3.5 - 2^{17}.3^2.35\varkappa + 2^{12}.3^5.41\varkappa^2 - 2^{12}.5843\varkappa^3 +$$

$$+ 2^8.35719\varkappa^4 - 2^{13}.265\varkappa^5 + 2^4.3^3.683\varkappa^6 - 2^4.3^2.143\varkappa^7 + 3^4.7\varkappa^8$$

ist.

Der Beweis, dass $\Phi(\varkappa)$ im Intervalle $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ positiv ist, lässt sich ganz analog wie für die Functionen g_5, g_6, g_7 erbringen; es ist nämlich

$$\frac{1}{7!}\Phi^{(7)}(\varkappa) = -2^3.3^2[286 - 63\varkappa] < 0, \quad \frac{1}{6!}\Phi^{(6)}(1) = 2^2.3^2.4633,$$

$$\frac{1}{5!}\Phi^{(5)}(1) = -2^3.100153, \quad \frac{1}{4!}\Phi^{(4)}(1) = 2.3.339079,$$

$$\frac{1}{3!}\Phi'''(1) = -2^3.3.160555, \quad \frac{1}{2}\Phi''(1) = 2^2\ 1543633,$$

$$\Phi'(1) = -2^3.3.171541, \quad \Phi(1) = 530775.$$

Somit ist in der That $G_{0,2}(\varkappa, z)$ positiv, wenn $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, $z \geqq \frac{3}{8}$ ist. Hieraus folgt aber, dass die Function $G(\varkappa, z)$, für jeden Werth von $\varkappa$ des Intervalles $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, in einem Intervalle $\frac{3}{8} \leqq z \leqq \zeta$ ihre obere Grenze nur in einem der Begrenzungspunkte des Intervalles erreicht; wenn also $G\left(\varkappa, \frac{3}{8}\right)$ für $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ durchaus negativ ist, und wenn sich eine

Function ζ von $\varkappa$ angeben lässt, so beschaffen, dass für jeden der betrachteten Werthe von $\varkappa$

$$\frac{3}{8} < s < \zeta \text{ ist und } G(\varkappa, \zeta)$$

negativ ist, so folgt daraus sicher, dass auch $G(\varkappa, s)$ für $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist, also nach 56) und 55), dass $\frac{d}{d\varkappa} f(\varkappa, s;\, S, P)$ für jedes eigentliche Dreieck im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist.

Es ist

$$G\left(\varkappa, \frac{3}{8}\right) = \sum_{\nu=0}^{7} \frac{3^{\nu}}{2^{3\nu}} g_{\nu} = \frac{3^{9}}{2^{21}} \Psi(\varkappa),$$

wobei

$$\Psi(\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{7} 2^{3(7-\nu)} 3^{\nu-9} g_{\nu} =$$

$$-2^{17}.3^{3} + 2^{17}.3^{3}\varkappa - 2^{12}.3^{2}\ 19\varkappa^{2} - 2^{12}.109\varkappa^{3} +$$
$$+ 2^{8}\ 1057\varkappa^{4} - 2^{12}.3.5\varkappa^{5} + 2^{4}.439\varkappa^{6} - 2^{4}.5^{2}\varkappa^{7} + 3^{2}\varkappa^{8} \text{ ist.}$$

Von dieser ganzen Function ist aber sofort zu ersehen, dass sie für $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ beständig negativ ist, wenn man sie auf die Form bringt:

$$-2^{17}.3^{3}(1-\varkappa) - 2^{12}.3^{2}.19\varkappa^{2} - 2^{8}(2^{4}.109 - 1057\varkappa)\varkappa^{3}$$
$$-2^{4}(2^{8}.3.5 - 439\varkappa)\varkappa^{5} - (2^{4}.5^{2} - 3^{2}\varkappa)\varkappa^{7}$$

Bezeichnet man die Punkte mit den Coordinaten $0 \left| \frac{3}{8} \right.$, $1 \left| \frac{3}{8} \right.$, $1 | 1$ mit den Buchstaben L, M, N, so ist demnach die Function $G(\varkappa, z)$ auf den geraden Strecken LM und MN, mit Ausnahme des Punktes N, wo sie verschwindet, überall negativ. Wenn es also noch gelingt, eine von L nach N führende Begrenzung LTN so zu bestimmen, dass $G(\varkappa, z)$ im Inneren des Flächenstückes $LMNTL$ überall negativ ist und die Curve $z = s(\varkappa)$ für $0 < \varkappa < 1$ im Inneren verläuft, so ist damit ein Flächenstück $\mathfrak{G}$ gefunden, wie es oben beschrieben wurde.

Eine solche Begrenzung LTN liefert aber eben die jetzt zu bestimmende Function ζ.

Man wird sich zunächst an die für das Intervall $0 < \varkappa < 1$ geltende Begrenzung erinnern:

$$\frac{3}{8} < s < \delta_0 + \delta_1 \varkappa + \ldots + \delta_{i-1} \varkappa^{i-1} + \vartheta_i \varkappa^i \quad (\delta_0 + \ldots + \delta_{i-1} + \vartheta_i = 1)$$

und nun den kleinsten Werth von i zu ermitteln suchen, für welchen $G(\varkappa, \delta_0 + \delta_1 \varkappa + \ldots + \vartheta_i \varkappa^i)$ durchaus negativ ist.

Dazu betrachte man die Lage der Tangente $\mathfrak{T}$ an die Curve $G(\varkappa, z) = 0$ und der Tangente $\mathfrak{t}_i$ an die Curve $z = \delta_0 + \delta_1 \varkappa + \ldots + \vartheta_i \varkappa^i$ im Punkte N.

Die Gleichung der Tangente $\mathfrak{T}$ ist:

$$z - 1 = \frac{4}{3} (\varkappa - 1)$$

und nun zeigt sich, dass für $i = 3$ es zuerst eintritt, dass die Tangente $\mathfrak{t}_i$ innerhalb des Dreieckes LMN in der Nähe des Punktes N auf derjenigen Seite von $\mathfrak{T}$ verläuft, auf welcher $G(\varkappa, z) < 0$ ist.

Um aber eine recht deutlich negative Function zu erhalten, wurde $i = 4$, also

$$\zeta = \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4} \varkappa + \frac{3.37}{2^{10}} \varkappa^2 + \frac{3.47}{2^{11}} \varkappa^3 + \frac{533}{2^{11}} \varkappa^4 \qquad 62)$$

gesetzt.

Nun ist nachzusehen, ob in der That $G(\varkappa, \zeta)$ im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ durchaus negativ ist; diese Function ist in $\varkappa$ vom 36. Grade, verschwindet für $\varkappa = 1$ und enthält daher den Factor $\varkappa - 1$. Setzt man

$$G(\varkappa, \zeta) = (\varkappa - 1) H(\varkappa), \qquad 63)$$

so ist $H(\varkappa)$ eine ganze Function 35. Grades in $\varkappa$, welche durch $\sum_{\nu=0}^{35} a_\nu \varkappa_\nu$ bezeichnet wird, wobei die a_ν rationale Zahlen sind, deren Nenner nur Potenzen von 2 sind. Die in der folgenden Tabelle angegebenen Zahlen $\mathfrak{a}_\nu$ stehen mit den a_ν in dem Zusammenhange, dass für ein positives a_ν $\mathfrak{a}_\nu < a_\nu$ dadurch gemacht wurde, dass die auf die letzte beibehaltene Stelle von a_ν folgenden Decimalen weggelassen wurden, für ein negatives a_ν aber $-\mathfrak{a}_\nu > -a_\nu$ dadurch gemacht wurde, dass die letzte beibehaltene Stelle von a_ν um eine Einheit erhöht wurde.

Bezeichnet man also die ganze Function $\sum\limits_{\nu=0}^{35} \mathfrak{a}_\nu \varkappa^\nu$ mit $\mathfrak{H}(\varkappa)$, so ist für positive Werthe von $\varkappa$

$$H(\varkappa) > \mathfrak{H}(\varkappa). \qquad 64)$$

Tabelle der Coëfficienten $\mathfrak{a}_\nu$.

	$\mathfrak{a}_\nu$	ν	$\mathfrak{a}_\nu$		$\mathfrak{a}_\nu$		$\mathfrak{a}_\nu$
0	33215	9	5978	18	−2796	27	36
1	0	10	− 307	19	1027	28	−20
	3805	11	− 198	20	− 330	29	4
3	4757	12	− 9276	21	525	30	− 0·7
4	5008	13	10907	22	− 569	31	0·7
	−13881	14	− 4594	23	340	32	− 0·9
6	788	15	757	24	− 110	33	0·4
	448	16	− 1949	25	36	34	− 0·09
8	−17555	17	3794	26	− 41	35	0·006

Nun ist aber sehr leicht zu sehen, dass die Function $\mathfrak{H}(\varkappa)$ im betrachteten Intervalle $0 < \varkappa < 1$ beständig positiv ist.

Es ist nämlich:

$$\sum_{\nu=0}^{5} \mathfrak{a}_\nu \varkappa^\nu > (46785-13881)\varkappa^5 = 32904\varkappa^5,$$

$$\sum_{\nu=0}^{8} \mathfrak{a}_\nu \varkappa^\nu > (32904+788+448-17555)\varkappa^8 = 16585\varkappa^8,$$

$$\sum_{\nu=0}^{9} \mathfrak{a}_\nu \varkappa^\nu > (16585+5978)\varkappa^9 = 22563\varkappa^9.$$

Ferner bemerke man, dass die Summe der negativen Coëfficienten, welche auf $\mathfrak{a}_9$ folgen, nämlich

$$\mathfrak{a}_{10}+\mathfrak{a}_{11}+\mathfrak{a}_{12}+\sum_{\lambda=7}^{17}\mathfrak{a}_{2\lambda}=-20191\cdot 69$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als 22563, also ist

$$\mathfrak{H}(\varkappa)>(22563-20192)\varkappa^9=2371\varkappa^9.$$

Daraus folgt nach 64) und 63), dass $G(\varkappa, \zeta)$ für alle betrachteten Werthe von $\varkappa$ durchaus negativ ist und weiter nach den früheren Ausführungen, dass auch die Function $G(\varkappa, s)$ beständig negativ ist.

Damit ist nun vollständig bewiesen, — wie schon oben hervorgehoben wurde — dass die Ableitung $\frac{d}{d\varkappa}f(\varkappa, s; S, P)$ für jedes eigentliche Dreieck ABC im Intervalle $0<\varkappa<1$ beständig negativ ist, also auch der im zweiten Abschnitte S. 43 vorausgesetzte Satz: Die Gleichung $\mathfrak{F}(\varkappa, s; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)=0$, oder $f(\varkappa, s; S, P)=0$ hat für jedes eigentliche Dreieck ABC im Intervalle $0\leqq\varkappa<1$ eine und nur eine Wurzel $\varkappa$.

Der Fall des gleichseitigen Dreieckes erledigt sich auch leicht direct: einerseits folgt aus

$$f\left(0, \frac{3}{8}; S, P\right)\geqq 2.3^4 S^2(1-3S),$$

dass die Wurzel $\varkappa=0$ nur dem Werthe $S=\frac{1}{3}$ entspricht, anderseits zeigt die Zerlegung

$$f\left(\varkappa, s; \frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)=-\frac{1}{3^6}\varkappa^2[3+(4-\varkappa)s]^3[3+(4-3\varkappa)s]^3,$$

dass dem gleichseitigen Dreiecke im Intervalle $0\leqq\varkappa<1$ nur die eine, doppelt zu zählende, Wurzel $\varkappa=0$ entspricht.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Dantscher Victor v.

Artikel/Article: Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. 301-350