Über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe

O. Stolz in Innsbruck,

c. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

1. Bezeichnet $f_0(y)$ eine endliche oder unendliche, im letzteren Falle convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von y, deren Summe für $y = 0$ nicht verschwindet, so wird die Gleichung

$$yf_0(y) = x \qquad |f_0(0)| > 0 \tag{1}$$

nach y durch eine und nur eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x ohne constantes Glied aufgelöst. Diese Reihe, welche die umgekehrte heisst, lässt sich bekanntlich auf die Form bringen:

$$y = \frac{x}{f_0(0)} + \sum_{2}^{\infty}{}_n (D_y^{n-1} f_0(y)^{-n})_0 \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

Hier mögen bezüglich der Natur der Function $f_0(y)$ nur zwei Fälle in Betracht gezogen werden:

1) $f_0(y)$ ist eine ganze Function oder eine beständig convergente Potenzreihe (ganze transscendente Function) von y;

2) $f_0(y)$ ist der Quotient zweier ganzen rationalen oder transscendenten Functionen von y: $g_0(y)$, $g_1(y)$, welche nicht für den nämlichen Werth von y verschwinden und beide für $y = 0$ nicht Null sind, d. i. $f_0(y) = g_0(y) : g_1(y)$. Dieser Quotient

lässt sich in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von y verwandeln, deren Convergenzkreis sich bis zu dem oder den dem Punkte $y = 0$ nächsten Punkten erstreckt, wo $g_1(y)$ verschwindet. Im letzteren Falle ersetzen wir die Gleichung (1) durch die folgende

$$y g_0(y) - x g_1(y) = 0. \tag{3}$$

Aus einem bekannten Satze der Reihentheorie ergibt sich, dass unter den soeben erwähnten Umständen die Summe der Reihe (2) zu jedem Werthe von x innerhalb ihres Convergenzkreises, für y in die Gleichung (1), beziehungsweise (3) gesetzt, dieselbe erfüllt — mit anderen Worten eine Wurzel dieser Gleichung bildet.

Um den Convergenzkreis der Reihe (2) zu bestimmen, kann man sich des Satzes von Weierstrass bedienen, dass derselbe mindestens durch einen Punkt $x = r$ gehen muss, worin die Summe der Reihe den Charakter einer ganzen Function verliert, d. h. einen wie kleinen Kreis man auch um den Punkt r schlagen mag, sich die zu den Punkten x, welche innerhalb dieses und des genannten Convergenzkreises liegen, gehörigen Werthe der Summe der Reihe (2) nicht durch eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - r$ darstellen lassen. Unmittelbar lässt sich freilich dieser Satz nur dann verwenden, wenn man, wie in dem unten besprochenen Beispiele, die Summe der Reihe (2) ermitteln kann. Manchmal lässt er sich jedoch mittelbar benützen. Jedenfalls aber kann man mit seiner Hilfe eine untere Grenze für den Convergenzradius der umgekehrten Reihe finden. Denn der Werth $x = r$ muss sich nothwendig unter den von Null verschiedenen, endlichen singulären Werthen $x = x_0$ der umgekehrten, vieldeutigen Function y befinden. Ein solcher Punkt x_0 ist nämlich dadurch charakterisirt, dass, einen wie kleinen Kreis man auch um ihn beschreibt, zu den innerhalb desselben befindlichen x (ausser $x = x_0$) Werthe von y gehören, welche sich durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ nicht darstellen lassen. Demnach muss sich der Convergenzkreis der Reihe (2) mindestens bis zu dem oder den dem Nullpunkte nächsten unter den Punkten x_0 erstrecken.

Ist $f_0(y)$ eine ganze rationale Function von y, so sind die singulären Werthe von x blos diejenigen, wofür die Gleichung (1) mindestens eine wiederholte Wurzel hat; es ist also, wenn wir

$$y f_0(y) = f(y) \tag{4}$$

setzen, $x_0 = f(y_0)$, unter y_0 eine Wurzel der Gleichung

$$f'(y) = 0 \tag{5}$$

verstanden. Entwickeln wir nämlich die linke Seite von (1) nach Potenzen von $y-y_0$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{f^{(m)}(y_0)}{m!}(y-y_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(y_0)}{(m+1)!}(y-y_0)^{m+1} + \ldots = x - x_0, \tag{6}$$
$$(m \geqq 2)$$

woraus sich für $y-y_0$ eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt[m]{x-x_0}$ ohne constantes Glied ergibt. Ähnlich verhält sich die Sache, wenn $f_0(y)$ eine ganze transscendente Function von y ist; nur tritt dann, wenn es einen Werth von x gibt, wofür die Gleichung (1) entweder gar keine oder nur eine endliche Anzahl von Wurzeln nach y hat, derselbe zu den soeben erwähnten Werthen von x als singulärer hinzu.

Falls

$$f(y) = y g_0(y) \quad g_1(y)$$

ist, so gehören zu den singulären Werthen von x wieder alle $x_0 = f(y_0)$, worin y_0 eine Wurzel der Gleichung (5) bedeutet. (Dabei ist $g_1(y_0)$ nicht Null.) Sind $g_0(y)$, $g_1(y)$ ganze rationale Functionen von y, so gibt es, den hier nicht in Betracht kommenden Werth $x = 0$ allenfalls abgerechnet, keine anderen. Ist wenigstens eine von diesen Functionen eine ganze transscendente, so gelten als singuläre Werthe von x auch jene, wofür die Gleichung (3) keine oder nur eine endliche Anzahl von Wurzeln hat. Wenn solche Werthe überhaupt vorhanden sind, so können es nach einem Satze von Picard (Compt. rend., 88. Bd., S. 745) höchstens zwei sein.

2. Mittelbar aus dem oben erwähnten Satze von Weierstrass fliesst der nachstehende Satz über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe, den ich im 95. Bande dieser

Sitzungsberichte, II. Abth., S. 674 bewiesen habe. »Lässt sich eine positive Zahl $\varkappa$ auf die folgende Art bestimmen, so ist sie gleich dem Convergenzradius der umgekehrten Reihe. Construirt man in der y-Ebene, $y = \xi + \eta i$ setzend, die Curven

$$|f(\xi+\eta i)|^2 = \alpha^2 \qquad (0 < \alpha < \varkappa), \tag{7}$$

so soll erstens jede von ihnen einen einfachen geschlossenen Theil (Oval) besitzen, welcher den Punkt $y = 0$ und das einem jeden kleineren Werthe von α entsprechende Oval umschliesst. Zweitens auf dem alle diese Ovale einschliessenden Theile $\mathfrak{k}$ der Curve

$$|f(\xi+\eta i)|^2 = \varkappa^2 \tag{8}$$

befindet sich mindestens ein Punkt y', wofür $f'(y') = 0$ ist.«

Der Satz ist a. a. O. gezeigt unter der Voraussetzung, dass $f(y)$ eine ganze rationale oder transscendente Function von y ist. Der Beweis gilt jedoch, wenn nur $f(y)$ in jedem Punkte innerhalb und auf $\mathfrak{k}$ holomorph ist. Dies trifft in der That auch zu in dem zweiten der in Nr. 1 angegebenen Falle, weil die Function $g_0(y)$ $g_1(y)$ nur in jenen Punkten, wo $g_1(y)$ verschwindet, den Charakter einer ganzen verliert. Nähert sich y einem solchen Werthe, so hat $g_0(y)$ $g_1(y)$ den Grenzwerth ∞, somit kann keiner von ihnen innerhalb oder auch nur auf $\mathfrak{k}$ liegen.

3. Bei Anwendung des vorstehenden Satzes auf die Gleichung

$$y \quad (1+18y-3y^2+2y^3) = x, \tag{9}$$

zu der ich nun übergehe, gelangte ich zu einem anderen Ergebnisse als Herr Nekrassoff, der dieses Beispiel im 31. Bande der mathem. Annalen (S. 356) vorgelegt hat. Setzen wir

$$1+18y-3y^2+2y^3 = g_1(y), \tag{10}$$

so haben wir, um die singulären Werthe von x zu ermitteln, die Gleichung

$$D_y\{y : g_1(y)\} = 0 \quad \text{oder} \quad y g_1'(y) - g_1(y) = 0, \tag{10*}$$

d. i.

$$4y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

aufzulösen. Ihre Wurzeln sind

$$y = 1 \qquad y = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{8}.$$

Ihnen entsprechen zufolge der Formel

$$x = y : g_1(y) = 1 \;\; g_1'(y)$$

die Werthe $x = 1 \;\; 18 = 0 \cdot 0\dot{5}$ und

$$x = \frac{16}{3\{93 \mp 5i\sqrt{15}\}}. \tag{11}$$

Der Betrag der letzteren ist

$$|x| = \frac{16}{3\sqrt{93^2 + 25 \times 15}} = \frac{1}{17.812\,..} = 0 \cdot 05614\,.. \tag{11*}$$

(nicht $0 \cdot 5614$, wie a. a. O. aus Versehen angegeben ist).

Setzen wir in (7) $f(y) = y : g_1(y)$ und

$$g_1(\xi + \eta i) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta),$$

so lässt sich diese Gleichung auf die Form bringen:

$$\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 \{\varphi(\xi, \eta)^2 + \psi(\xi, \eta)\}^2. \tag{12}$$

Hier hat man sich also

$$\varphi(\xi, \eta) = 1 + 18\xi - 3\xi^2 + 3\eta^2 + 2\xi^3 - 6\xi\eta^2$$
$$\psi(\xi, \eta) = 2\eta\{9 - 3\xi + 3\xi^2 - \eta^2\}$$

zu denken, so dass die Curve (12) von der 6. Ordnung ist. Sie hat, da die Glieder 6. Ordnung in $\xi\eta$ eine definite Form bilden nur complexe uneigentliche Punkte, liegt also ganz im Endlichen, und zwar liegt sie symmetrisch gegenüber der reellen Axe $\eta = 0$.

Nimmt man in (12) $\alpha = 1 \;\; 18$, so geht die Curve (12) natürlich durch den Punkt $\xi = 1$, $\eta = 0$ (d. i. $y = 1$), und zwar ist er für sie ein Doppelpunkt, in welchem sich zwei reelle Zweige schneiden. Setzt man nämlich in (12) $\xi = 1 + \xi_1$ und ordnet nach Potenzen von ξ_1 und η, so erhält man die Gleichung

$$108(\xi_1^2 - \eta^2) + \text{Gl. höh. als 2. Ord.} = 0.$$

Die Tangenten der beiden Zweige im Punkte $\xi = 1$, $\eta = 0$ haben mithin die Gleichungen

$$\eta - \xi + 1 = 0 \qquad \eta + \xi - 1 = 0;$$

sie halbiren also die von den Geraden $\xi = 1$ und $\eta = 0$ gebildeten Winkel.

Um die Gestalt der Curven (12) kennen zu lernen, genügt nunmehr die Ermittelung ihrer Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen. Die mit der Axe $\eta = 0$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\xi^2 = \alpha^2 \varphi(\xi, 0)^2 = \alpha^2 g_1(\xi)^2,$$

welche in die beiden

$$g_1(\xi) \mp \frac{\xi}{\alpha} = 0 \tag{13}$$

zerfällt. Die Gleichung

$$g_1(\xi) - \frac{\xi}{a} = 0 \tag{14}$$

hat eine wiederholte Wurzel, falls neben ihr die Gleichung

$$g_1'(\xi) - \frac{1}{a} = 0$$

besteht, also

$$\xi g_1'(\xi) = g_1(\xi) = 0$$

ist. Diese Gleichung fällt mit (10*) zusammen. Daher hat die Gleichung (14) eine wiederholte Wurzel nur, wenn $a = 1\ \ 18$ oder einem der Brüche (11) ist.

Setzt man in (14) $a = 1\ \ 18$, so hat die Gleichung die doppelte Wurzel $\xi = 1$ und die einfache $\xi = -{}^1/_2$. Um die Wurzeln von (13) in anderen Fällen zu ermitteln, schaffe man durch die Substitution $\xi = \xi' + {}^1/_2$ das quadratische Glied weg. Die reducirte Gleichung lautet:

$$\xi'^3 + \frac{1}{4}\left(33 \mp \frac{2}{\alpha}\right)\xi' + \frac{1}{4}\left(19 \mp \frac{1}{\alpha}\right) = 0. \tag{15}$$

Ist $\alpha > 0$, so sind im Falle des unteren Zeichens der Coëfficient von ξ' und das constante Glied positiv, die Gleichung hat also nur eine reelle Wurzel. Für den Fall des oberen

Zeichens bilde man die Discriminante, wofür man mit Rücksicht auf die obige Bemerkung leicht den Ausdruck

$$64\,D = \frac{1}{27}\left(33-\frac{2}{\alpha}\right)^3+\left(19-\frac{1}{\alpha}\right)^2=$$

$$=\frac{8}{27}\left(18-\frac{1}{\alpha}\right)\left\{\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{3\times 93}{16}\right]^2+\frac{9\times 375}{16^2}\right\} \quad (15^*)$$

findet. Sonach ist, falls $0<\alpha<1:18$, D negativ; es hat also die Gleichung

$$g_1(\xi)-\xi:\alpha=0$$

unter dieser Voraussetzung drei reelle Wurzeln. Demnach schneidet die Curve (12), wenn $\alpha<1\ 18$ ist, die ξ-Axe in vier Punkten, und wenn $\alpha=1\ 18$ ist, in drei.

Die Schnittpunkte der Curve (12) mit der Axe $\xi=0$ ergeben sich aus der Gleichung

$$0=1+\left(330-\frac{1}{\alpha^2}\right)H-63H^2+4H^3, \qquad (16)$$

worin $H=\eta^2$ ist. Die Discriminante der mittelst der Substitution $H=H'+21/4$ reducirten Gleichung erweist sich, falls $0<\alpha\leqq 1:18$ ist, als negativ, daher hat die Gleichung (16) drei reelle Wurzeln. Von ihnen sind nach der Regel des Cartesius zwei positiv, eine negativ. Unsere Curve schneidet mithin die positive und die negative η-Axe je in zwei Punkten.

Aus dem Vorstehenden erschliesst man für die Curve

$$18^2(\xi^2+\eta^2)=\varphi(\xi,\eta)^2+\psi(\xi,\eta)^2 \qquad (17)$$

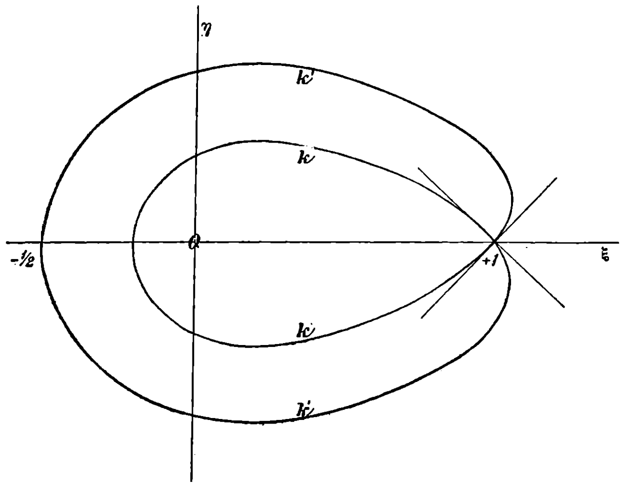
die in der Figur Seite 492 angedeutete Gestalt. $|y:g_1(y)|$ ist ausserhalb der von der Curve (17) gebildeten ringförmigen Zelle durchaus kleiner als 1 18. Ertheilt man der Zahl α in (12) einen Werth kleiner 1:18, so zerfällt die bezügliche Curve in zwei den Punkt 0 umschliessende Ovale, von denen eines innerhalb des zu (17) gehörigen Ovales k, das andere ausserhalb des äusseren Theiles k' dieser Curve liegt.

Hieraus erschliessen wir auf Grund des in Nr. 2 mitgetheilten Satzes, dass die zur Gleichung (9) gehörige umgekehrte Reihe — man setze in (2) $f_0(y)=1:g_1(y)$ —

$$v = x + \sum_{2}^{\infty} {}_n (D_y^{n-1} g_1(y)^n)_0 \, x^n \tag{18}$$

genau den Convergenzradius 1 18 hat.

4. Herr Nekrassoff behauptet a. a. O., dass der Convergenzradius der Potenzreihe (18) grösser als 1 18, nämlich gleich der Zahl (11*), d. i. 0·05614. sei. Mittelst der Coëfficienten dieser Reihe ist es wohl nicht möglich zu entscheiden, ob seine oder meine Angabe richtig sei. Ich werde jedoch



zeigen, dass die Summe der Reihe (18) im Punkte $x = 1$ 18 den Charakter einer ganzen Function verliert, woraus erhellt, dass ihr Convergenzkreis keinen grösseren Radius als 1:18 haben kann.

Zu dieser Einsicht gelangt man durch Auflösung der Gleichung (9), welche wir durch die Substitution $y = y' + {}^1/_2$ auf die bereits erwähnte Form

$$y'^3 + \frac{1}{4}\left(33 - \frac{2}{x}\right) y' + \frac{1}{4}\left(19 - \frac{1}{x}\right) = 0 \tag{19}$$

bringen, mittelst der Cardanischen Formel.

Hinsichtlich der hiebei auftretenden Wurzeln sei bemerkt, dass eine jede von ihnen einen bestimmten Sinn haben, und zwar den Cauchy'schen Hauptwerth bedeuten soll. Ist a eine beliebige complexe Zahl ausser 0, und zwar in trigonometrischer Form

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad A = |a| \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi),$$

so ist der Hauptwerth

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right\} = \sqrt[m]{A}\,e^{\frac{\alpha i}{m}} \tag{20}$$

worin $\sqrt[m]{A}$ den positiven Werth oder den Hauptwerth der $m$ten Wurzel aus A bedeutet. Hienach ist $\sqrt[3]{-A}$ $(A > 0)$ nicht $-\sqrt[3]{A}$, sondern $\sqrt[3]{A}\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{A}(1 + i\sqrt{3})$.

Setzt man

$$\frac{1}{4}\left(33 - \frac{2}{x}\right) = a \qquad \frac{1}{4}\left(19 - \frac{1}{x}\right) = b$$

$$D = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} \qquad y' = p + q,$$

so hat man nach der genannten Formel

$$p^3 = -{}^1/_2 b \pm \sqrt{D} \qquad q^3 = -{}^1/_2 b \mp \sqrt{D},$$

wobei jedoch pq so zu wählen sind, dass $pq = -a\ \ 3$ ist. Wie schon bemerkt, findet man

$$D = -\frac{1}{216x^3}(1 - 18x)\left(1 - \frac{279}{8}x + \frac{1269}{4}x^2\right). \tag{21}$$

Setzt man $x = t^2$ und

$$\sqrt{1 - 18t^2}\ \sqrt{1 - \frac{279}{8}t^2 + \frac{1269}{4}t^4} = w, \tag{22}$$

so ist

$$\frac{wi}{t^3 6\sqrt{6}} = \pm\sqrt{D}, \tag{23}$$

d. h. gleich einem gewissen Werthe der Quadratwurzel aus D. Damit ergibt sich

$$-{}^1/_2 b \pm \sqrt{D} = \frac{1}{8t^3}\left\{t - 19t^3 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,wi\right\}. \tag{24}$$

Von den drei Wurzeln der Gleichung (19), welche zu einem dem Betrage nach hinlänglich kleinen Werth von x gehören, wird die eine durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x, die beiden anderen durch eine Reihe nach ganzen Potenzen von $\sqrt{x}$, welche mit $1 \sqrt{x}$ beginnt, dargestellt (siehe Nr. 7). Wir wollen zunächst die erstere, welche gleich ist der Summe der Reihe (18) minus ${}^1/_2$, durch die Cardanische Formel ausdrücken. Nach (24) ist

$$-{}^1/_2 b \pm \sqrt{D} = \frac{wi}{t^3 6\sqrt{6}}\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t-19t^3}{w}\,i\right),$$

also ein gewisser Werth der dritten Wurzel aus diesem Ausdrucke

$$p = -\frac{i\sqrt[3]{w}}{t\sqrt{6}}(1 - zi)^{1/3}, \tag{25}$$

worin

$$z = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t-19t^3}{w} \tag{26}$$

zu denken ist. Das zugehörige q ist

$$q = \frac{i\sqrt[3]{w}}{t\sqrt{6}}(1 + zi)^{1/3}. \tag{27}$$

In der That haben wir

$$pq = -\frac{1}{3}a = -\frac{1}{12}\left(33 - \frac{2}{x}\right). \tag{28}$$

Bei positivem x, kleiner als 1 18, ist das unmittelbar klar, da pq conjugirte Zahlen sind, also ihr Product wirklich positiv ist. Daraus folgt aber, dass die Gleichung (28) für alle jene Werthe von t, wofür sich pq in Potenzreihen von t entwickeln lassen, eine identische sein muss.

$p+q$ ist demnach eine Wurzel der Gleichung (19), und zwar diejenige, welche sich in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln lässt. Da

$$\frac{1}{w} = (1-18t^2)^{-1/2} . \left(1 - \frac{279}{8} t^2 + \frac{1269}{4} t^4\right)^{-1/2}$$

sich für Werthe von t, deren Betrag klein genug ist, mittelst des binomischen Satzes in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t^2 verwandeln lässt, so liefert z eine Potenzreihe, in der nur die ungeraden Potenzen von t vorkommen. Da diese Reihe mit t beginnt, so kann man bei Werthen von t, welche dem Betrage nach klein genug sind, $(1 \mp zi)^{1/3}$ in eine Potenzreihe von t entwickeln, indem man zuerst $(1 \mp zi)^{1/3}$ nach dem binomischen Satze in eine Potenzreihe von z verwandelt, hinterher für z die soeben gefundene Reihe untersetzt und dann nach Potenzen von t ordnet. In der Differenz

$$(1-zi)^{1/3} - (1+zi)^{1/3} = -\frac{2}{3} zi + .$$

verschwinden die Glieder mit den geraden Potenzen von z. Die ungeraden Potenzen von z enthalten den Factor t und daneben je eine Potenzreihe von $t^2 = x$. Da w eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x liefert, deren erstes Glied 1 ist, so darf man

$$\sqrt[3]{w} = \sqrt[6]{1-18x} . \sqrt[6]{1 - \frac{249}{8} x^2 + \frac{1269}{4} x^4}$$

setzen, erhält also dafür auch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x mit dem constanten Gliede 1. Wir erhalten demnach für die Werthe von x von hinlänglich kleinem Betrage

$$y' = p+q = -\frac{1}{2} + x\mathfrak{P}(x),$$

worin $\mathfrak{P}(x)$ das Zeichen für eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x ist. Somit ist die Summe der umgekehrten Reihe (18) bei gehöriger Kleinheit von $|x|$ $y = p+q+{}^1/_2$, unter pq die Ausdrücke (25) und (27) verstanden.

5. Die Formen (25) und (27) für die Zahlen pq lassen sich in der weiteren Untersuchung nicht verwenden, weil sie voraussetzen, dass w nicht verschwindet, was aber schon für $x = 1:18$ eintritt. Wir dürfen jedoch für die Werthe t von hinlänglich kleinem Betrage

$$p = -\frac{ij}{t\sqrt{6}}\left\{w - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(t-19t^3)i\right\}^{1/3}$$

$$q = \frac{ij'}{t\sqrt{6}}\left\{w + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(t-19t^3)i\right\}^{1/3}$$

setzen, wenn wir die dritten Einheitswurzeln jj' so bestimmen, dass $p+q$ bei Entwickelung nach steigenden ganzen Potenzen von t keine negativen Potenzen von t liefert und für $t = 0$ gleich $-1/2$ ist. Es ist aber

$$p = -\frac{ij}{t\sqrt{6}}\left\{1 - \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t + \ldots\right\}$$

$$q = \frac{ij'}{t\sqrt{6}}\left\{1 + \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t + \ldots\right\}$$

wir haben also $j = j'$ und $j = 1$ zu nehmen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\left(w - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(t-19t^3)i\right)^{1/3} = P$$
$$\left(w + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(t-19t^3)i\right)^{1/3} = Q, \tag{29}$$

so ist demnach für die Werthe von x, deren Betrag klein genug ist, die Summe der Reihe (18)

$$y = \frac{1}{2} + \frac{i}{t\sqrt{6}}\{Q-P\}. \tag{30}$$

Daraus folgt aber mit nichten, dass diese Gleichung für alle Werthe von x gilt, wofür die Reihe (18) convergirt. Um über den Giltigkeitsbereich der Formel (30) ins Klare zu kommen, müsste man die sehr verwickelten Unstetigkeitslinien der Hauptwerthe PQ in der x-Ebene, welche durch die Punkte $x = 1$ 18 und (11) gehen, construiren. Für unseren Zweck ist das aber nicht nöthig, da wir blos zu zeigen brauchen, dass die Summe der Reihe (18) in jedem Punkte $x = \xi$ der reellen Axe zwischen 0 und 1/18 den Werth $^1/_2 + \frac{i}{t\sqrt{6}}(Q - P)$ hat. In der That folgt dies sofort aus dem bekannten Satze: »Es seien jedem Punkte x einer Linie $\mathfrak{l} \equiv ab$ (die Endpunkte eingeschlossen) ein oder mehrere, und zwar höchstens m Werthe y zugeordnet, welche eine mehrdeutige Function $y = f(x)$ bilden. Nehmen wir an, $f(x)$ sei bei jedem solchen Werthsysteme xy stetig und es gebe eine positive Zahl $\varkappa$, welche kleiner ist als der absolute Betrag des Unterschiedes irgend zweier zu einem beliebig auf $\mathfrak{l}$ gewählten Punkte x gehörigen Functionswerthe $f(x)$, $f_1(x)$ und ordnen einem festen Punkte x_0 auf $\mathfrak{l}$ einen bestimmten Werth $f(x_0)$ zu, so lässt sich aus den Werthen von $f(x)$ eine und nur eine eindeutige und stetige Function bilden, welche in x_0 den Werth $f(x_0)$ hat«. — Werden nun zwei positive Zahlen $\varkappa\lambda$ so gewählt, dass $\varkappa < \xi < \lambda < 1/18$ und dabei $\varkappa$ gehörig klein ist, so bildet die Summe der Reihe (18) auf der reellen Strecke $(\varkappa, \lambda)$ den eindeutigen und stetigen Zweig der durch die Gleichung (9) definirten Function y, dessen Werth für $x = \varkappa$ aus dem Ausdrucke

$$y_1 = {}^1/_2 + \frac{i}{t\sqrt{6}}(Q - P) = h(x) \tag{31}$$

durch die Annahme $t = \sqrt{\varkappa}$ hervorgeht. Der nämliche Zweig von y wird aber durch den Ausdruck (31) selbst dargestellt, denn auch er ist für die positiven $x : \varkappa < x < \lambda$ stetig. Die Hauptwerthe PQ sind ja nur für jene x unstetig, wofür das Argument einer in ihnen vorkommenden Wurzel Null oder negativ wird, w^2 ist aber für jedes solche x positiv (vergl. (15*)), $t - 19t^3$ ist reell, somit weder P^3 noch Q^3 Null oder negativ.

Für $t = \sqrt{1\ 18}$ ist $w = 0$, somit

$$y_1 = {}^1/_2 + i\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt[3]{-i}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[3]{i}}{2\sqrt{3}}\right\},$$

also, da $\pm i = e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$

$$\sqrt[3]{-i} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

ist, $y_1 = {}^1/_2 + \sin\pi/6 = {}^1/_2 + {}^1/_2 = 1$, d. i. y_1 ist die zu $x = 1:18$ gehörige wiederholte Wurzel der Gleichung (9). Ob die Reihe (18), deren Summe wir mit $S(x)$ bezeichnen wollen, für $x = 1:18$ convergirt, ist unbekannt; jedenfalls aber thut sie das, wenn $|x| < 1/18$ ist. Wir haben also für die reellen x zwischen 0 und 1/18 $S(x) = h(x)$, somit

$$\lim_{x=1/18-0} S(x) = \lim_{x=1/18-0} h(x) = 1. \tag{32}$$

Schon daraus ergibt sich, dass $S(x)$ unmöglich für $x = 1/18$ holomorph sein kann, denn wäre das der Fall, so müsste der Grenzwerth (32) gleich der zu $x = 1/18$ gehörigen einfachen Wurzel $-{}^1/_2$ der Gleichung (9) sein.

6. Um jeden Zweifel zu beseitigen, wollen wir noch zeigen, dass $y_1 = S(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = 1/18$ durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt{x - 1/18}$ dargestellt wird. Wir haben, falls $t = \sqrt{x}$ und $|x|$ zwischen 1/19 und 1/18 gelegen vorausgesetzt wird, nach (29)

$$P = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{i}\sqrt[3]{19t^3 - t}\left\{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\ \frac{wi}{19t^3 - t}\right\}^{1/3} \tag{33}$$

denn diese Formel ist für $t = \sqrt{1\ 18}$ richtig, da beide Seiten $\sqrt[3]{i}\ 2\sqrt{3}$ geben und für die übrigen unter den genannten Werthen von t alle Wurzeln stetig sind. Ebenso ist

$$Q = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{-i}\sqrt[3]{19t^3 - t}\left\{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\ \frac{wi}{19t^3 - t}\right\}^{1/3} \tag{34}$$

Setzen wir nun

$$(t^2 =)x = 1/18 - u,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} 1\;\; t &= x^{-1/2} = \sqrt{18}\,.(1-18u)^{-1/2} \\ \frac{1}{t}\sqrt[3]{19t^3-t} &= \sqrt[3]{19-\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1-\frac{18^2u}{1-18u}} \\ \frac{1}{19t^3-t} &= \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{19x-1} = \frac{1}{t}\quad\frac{18}{1-18\times 19u}; \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

diese Ausdrücke liefern somit bei hinlänglich kleinem $|u|$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von u. Für w erhalten wir nach (22), indem wir $u = v^2$ (und zwar $\sqrt{u} = v$) setzen, das Product von v in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von u. Also wird

$$U = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\;\frac{wi}{19t^3-t} \tag{37}$$

ebenfalls das Product von v in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von u. Um den letzten Factor in (33) und (34) zu entwickeln, bildet man zunächst

$$\sqrt[3]{1\pm U} = 1 \pm {}^1/_3 U + \binom{1/3}{2} U^2 \pm . \tag{38}$$

setzt dann für U den soeben erhaltenen Ausdruck unter und ordnet nach Potenzen von v. Führt man die soeben für $\sqrt[3]{19t^3-t} : t$ und $\sqrt[3]{1\mp U}$ gewonnenen Entwickelungen in (31) ein, so erhellt unmittelbar, dass die ungeraden Potenzen von v daraus nicht verschwinden. Man findet nämlich

$$y_1 = 1 - 6v\sqrt{3} + \ldots \qquad (v = \sqrt{1\;\; 18 - x})$$

Es ist auch leicht einzusehen, dass die Coëfficienten dieser Reihe sämmtlich reell sind.

7. Es ist noch von Interesse, die beiden anderen Wurzeln der Gleichung (9) ins Auge zu fassen. Wir haben dafür bekanntlich

$$y_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{t\sqrt{6}}\left\{e^{-\frac{2\pi i}{3}}Q - e^{\frac{2\pi i}{3}}P\right\} \tag{39}$$

$$y_3 = \frac{1}{2} + \frac{i}{t\sqrt{6}}\left\{e^{\frac{2\pi i}{3}}Q - e^{-\frac{2\pi i}{3}}P\right\} \tag{40}$$

Hieraus ergibt sich für $t = \sqrt{1\;\;18}$

$$y_2 = 1 \qquad y_3 = -{}^1/_2.$$

Die Wurzel y_3 muss also bei $x = 1\;\;18$ holomorph sein. Entwickeln wir in der That den Ausdruck (40) mit Hilfe der in der letzten Nummer vorgeführten Formeln in eine Reihe nach ganzen Potenzen von v, so erscheinen in ihr nur die Potenzen von v^2 oder $1\;\;18-x$. Denn es verschwinden im Ausdrucke

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{-i}\, \sqrt[3]{1+U} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{i}\, \sqrt[3]{1-U} =$$

$$= e^{\frac{\pi i}{2}} \sqrt[3]{1+U} - e^{-\frac{\pi i}{2}} \sqrt[3]{1-U} = i \{ \sqrt[3]{1+U} + \sqrt[3]{1-U} \}$$

die ungeraden Potenzen von U.

Um y_2 und y_3 in der Umgebung von $x = 0$ in Reihen zu entwickeln, setze man in (9) $x = t^2$, $y = 1:z$, wodurch diese Gleichung übergeht in

$$z^2 \;\; (2-3z+18z^2+z^3) = t^2. \tag{41}$$

Es entspricht also $x = 0$ der Werth $z = 0$. Zieht man aus (41) die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$z\left(1 - \frac{3z}{2} + 9z^2 + \frac{z^3}{2}\right)^{-1/2} = t\sqrt{2}. \tag{42}$$

Entwickelt man den zweiten Factor links nach dem polynomischen Satze in eine Potenzreihe von z, so dass man die Gleichung

$$z\left(1 + \frac{3}{4} z + \;\; ..\right) = t\sqrt{2}$$

erhält, so lässt sich dieselbe nach z durch die umgekehrte Reihe

$$z = t\sqrt{2} - \frac{3}{2} t^2 +$$

auflösen. Somit finden wir für y die Reihe nach steigenden Potenzen von t:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{t\sqrt{2}} + \frac{3}{4} + t\mathfrak{Q}(t) \qquad (t = \pm\sqrt{x}). \tag{43}$$

$y_2 y_3$ werden durch dieselbe wenigstens unter ähnlichen Beschränkungen wie y_1 durch die Reihe (18) dargestellt. Der Convergenzradius der Potenzreihe (43) ist genau $1:\sqrt{18}$. Construirt man nämlich in der t-Ebene vom Punkte $t = 0$ aus den Kreis mit diesem Radius, so muss die Summe von (43) bei der Annäherung von t entweder an den Punkt $1 \quad \sqrt{18}$ oder $-1 \quad \sqrt{18}$ zum Grenzwerthe $+1$, welchen Werth y_2 für $t = 1 \quad \sqrt{18}$ annimmt, convergiren, d. h. sie verliert in dem betreffenden Punkte den Charakter einer ganzen Function von t.

8. Aus der Gleichung (9) lässt sich leicht eine andere ableiten, durch deren Auflösung sich eine gewöhnliche Potenzreihe ergibt, deren Convergenzkreis über den nächsten singulären Werth des Argumentes hinausreicht. Bezeichnet nämlich c einen Punkt der x-Ebene in der Nähe von $x = 1/18$ und d den zugehörigen Werth von y_3, d. i. (40), so braucht man nur in (9) $x = c+u$, $y = d+v$ zu setzen. Da $cg_1(d) = d$ ist, so geht die Gleichung

$$(c+u)g_1(d+v)-(d+v) = 0$$

dadurch, dass man

$$g_1(d+v) = g_1(d)+g_1'(d)v+{}^1/_2\, g_1''(d)v^2+2v^3$$

setzt, über in die folgende:

$$ug_1(d)-v\{1-cg_1'(d)\} + \text{Glieder höh. Ordnung} = 0.$$

Da $1-cg_1'(d)$ nicht verschwindet, so gewinnt man hieraus für v eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von u ohne constantes Glied. Wenn nun c näher an $1:18$ liegt als an jedem der Punkte (11), so geht ihr Convergenzkreis über den Punkt $u = 1:18-c$ hinaus, weil ihre Summe y_3-d daselbst holomorph ist.