

Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugel-Systeme

Otto Rupp in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1895.)

Die Winkelbeziehungen, welche an Schnitten von Kreisen und Kugeln mit Geraden, Ebenen und untereinander auftreten, sind schon mehrfach Gegenstand ausführlicher Betrachtungen gewesen. Dagegen haben die longimetrischen Beziehungen, welche an den genannten Schnitten haften, bisher keine Beachtung gefunden. Es sei mir daher gestattet, in dieser Richtung eine Reihe neuer, bemerkenswerther Eigenschaften zu entwickeln.

1. Das wichtigste Gebilde, mit welchem sich die nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen, ist, wenn wir uns vorläufig auf die Geometrie der Ebene beschränken, das System aller Kreise mit einem gemeinschaftlichen Mittelpunkte. In diesem Systeme sind zwei besondere Kreise enthalten: der eine mit dem Radius Null, der andere mit unendlich grossem Radius, also der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte der Ebene. Da aber dieser geometrische Ort bekanntlich eine Gerade ist, so erscheint eine gewisse Vorsicht in der Auffassung jener besonderen Elemente geboten, und es empfiehlt sich der klaren Darstellung halber, das in Rede stehende Kreissystem als eine metrische Specialisirung eines allgemeinen, projectivischen Gebildes, des Kegelschnittsbüschels, respective der Kegelschnittsschaar, zu betrachten.

In dem allgemeinen Kegelschnittsbüschel mit den Basispunkten A, B, C, D stellen die Geradenpaare AB, CD; AC, BD; und AD, BC drei ausgeartete Elemente (Kegelschnitte) dar.

Rückt B unendlich nahe an A, und D unendlich nahe an C, so übergehen die Geraden AB und CD in Tangenten sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels in den Punkten A und C. In diesem Falle sind die beiden Geradenpaare AC BD, AD BC in der gemeinschaftlichen Berührungssehne $p = AB$ vereinigt, das dritte Paar wird von den Tangenten in A und C gebildet.

Sonach repräsentirt die als Doppelgerade aufgefasste gemeinschaftliche Berührungssehne eines Büschels einander doppelt berührender Kegelschnitte ein ausgeartetes Element dieses Büschels.

Das System doppelt berührender Kegelschnitte steht sich selbst dual gegenüber und kann ebensogut als besonderer Fall einer Kegelschnittsschaar mit paarweise zusammenfallenden Basistangenten angesehen werden. Die der vorstehenden Betrachtung dual gegenüberstehende lehrt, dass die gemeinschaftlichen Berührungspunkte A und C einen degenerirten Kegelschnitt, und der als Doppelpunkt aufgefasste Schnittpunkt P der gemeinschaftlichen Tangenten einen zweiten degenerirten Kegelschnitt der Schaar darstellt.

Lässt man endlich an Stelle der Geraden p die unendlich ferne Gerade treten und an Stelle von A und B die absoluten Punkte (Kreispunkte der Ebene), so übergeht das Büschel doppelt-berührender Kegelschnitte in ein System concentrischer Kreise, in welchem den angestellten Betrachtungen gemäss die unendlich ferne Gerade und der Mittelpunkt, jedes für sich doppelt gezählt, als Elemente auftreten.

Für die folgenden Untersuchungen bleibt es sich desshalb ganz gleich, ob die unendlich ferne Gerade als ein einfacher Ort zweiter Ordnung (d. i. als Kreis von unendlich grossem Radius) oder als Doppelgerade aufgefasst wird.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass der Kürze halber und um eine Gleichförmigkeit in der Benennung der später auftretenden Gebilde zu erzielen, das Büschel concentrischer Kreise als »monocentrisches System« bezeichnet werden soll.

2. Sei o der Mittelpunkt eines monocentrischen Systems, $c_1, c_2, c_3 \ldots$ beliebige Kreise desselben, ferner K ein beliebiger, dem System nicht angehörender Kreis und m sein Mittelpunkt. Jeder Kreis c_i des Systems hat mit K zwei reelle oder imaginäre

Punkte gemein, deren allzeit reelle Verbindungsgerade σ_i die Radicalaxe oder Potenzgerade von c_i und K repräsentirt. Da die Radicalaxen, welche allen Kreisen des Systems entsprechen, auf der Centralen om senkrecht stehen, so bilden sie ein Parallelstrahlenbüschel, dessen unendlich ferner Strahl ebenfalls als Radicalaxe, und zwar für K und den unendlich grossen Kreis des Systems, auftritt.

In gleicher Weise ruft irgend ein anderer Kreis K' der Ebene mit dem monocentrischen Systeme ein Parallelstrahlenbüschel von Radicalaxen σ'_1 hervor.

Zwei derartige Strahlenbüschel σ_i und σ'_i können dadurch auf einander bezogen werden, dass man in denselben solche Radicalaxen σ_i und σ'_i sich entsprechen lässt, welche die beiden Hilfskreise K und K' mit einem und demselben Kreise c_i des Systems ergeben. Die einander entsprechenden Radicalaxen σ_i und σ'_i schneiden sich aber bekanntlich in einem Punkte, welcher auch der vom System unabhängigen Radicalaxe r der Kreise K und K' angehört. Es folgt hieraus:

a) »Die Parallelstrahlenbüschel von Radicalaxen, welche in einem monocentrischen System von zwei beliebigen, dem System nicht angehörenden Kreisen hervorgerufen werden, sind perspectivisch, und ihr perspectivischer Durchschnitt repräsentirt die Radicalaxe der beiden Kreise«.

3. Der eben bewiesene Satz zeigt, dass das Parallelstrahlenbüschel, welches irgend ein Kreis K in einem monocentrischen System erzeugt, ein für dieses System charakteristisches Grundgebilde ist und als solches mit Vortheil zur Feststellung der Projectivität zweier monocentrischer Systeme — die ja als besondere Fälle von Curvenbüscheln zweiter Ordnung anzusehen sind — verwendet werden kann. Es sollen demgemäss zwei solche Systeme als projectivisch definirt werden, wenn die von irgend zwei Kreisen in ihnen erzeugten Radicalaxenbüschel projectivisch sind, und zwar sollen sich solche Kreise der beiden Systeme entsprechen, deren Radicalaxen mit den Hilfskreisen ebenfalls entsprechende Strahlen sind. Da es für die allgemeine Projectivität zweier Parallelstrahlenbüschel wesentlich ist, dass sich das unendlich ferne Element derselben nicht selbst entspricht, so ist nach früheren Erörterungen ein-

leuchtend, dass auch in zwei allgemein projectivisch auf einander bezogenen monocentrischen Systemen der unendlich grosse Kreis nicht ein selbstentsprechendes Element sein wird.

Das Erzeugniss zweier projectivischen monocentrischen Systeme, d. h. der geometrische Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Kreispaare derselben, ist, ebenso wie im Falle zweier allgemeiner projectivischer Kreisbüschel, eine bicirculare Curve vierter Ordnung. Es ist aber bekannt, dass dieses Erzeugniss zerfällt, sobald die beiden Kreisbüschel einen Kreis entsprechend gemein haben, und zwar stellt dieser Kreis einen Bestandtheil zweiter Ordnung des Gesammterzeugnisses dar, während der Rest, d. i. der geometrische Ort der Schnitte aller übrigen Paare entsprechender Kreise, einen zweiten Kreis ergibt.

Setzt man an Stelle beliebiger projectivischer Kreisbüschel insbesondere zwei projectivische monocentrische Systeme, und soll die Projectivität derselben eine solche sein, dass ein selbstentsprechendes Element vorhanden ist, so kann dies bei verschiedenen Mittelpunkten der beiden Systeme offenbar nur dadurch erreicht werden, dass man die unendlich grossen Kreise beider Systeme einander entsprechen lässt. Dass unter dieser besonderen Voraussetzung der Rest des Erzeugnisses beider Systeme, d. i. der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Kreise, thatsächlich ein Kreis ist, lässt sich, wie folgt, auch direct nachweisen.

4. Seien o und o' die Mittelpunkte zweier monocentrischer Systeme, welche derart projectivisch auf einander bezogen werden sollen, dass dem unendlich grossen Kreise c_∞ des einen, der unendlich grosse Kreis c'_∞ des anderen entspricht. Zur Festlegung der Projectivität reicht dann die Angabe zweier weiterer Paare entsprechender Kreise $c_1\, c'_1$, $c_2\, c'_2$ hin. Denkt man sich nun mit dem System o einen Hilfskreis K in Verbindung gebracht, so erzeugt derselbe ein Parallelbüschel von Radicalaxen, worunter sich die Radicalaxen von K und den Kreisen c_1, c_2 und c_∞, also zwei im Endlichen liegende Geraden σ_1 und σ_2 und die unendlich ferne Gerade σ_∞ befinden. In gleicher Weise ruft irgend ein Kreis K' mit dem System o' ein Radicalaxenbüschel hervor, worunter sich die Radicalaxen

von K' und c'_1, c'_2, c'_∞, d. i. wieder zwei im Endlichen liegende Geraden σ'_1, σ'_2 und die unendlich ferne Gerade σ_∞ befinden.

Da die beiden Systeme derart projectivisch auf einander bezogen sind, dass den drei Elementen c_1, c_2, c_∞ die drei Elemente c'_1, c'_2, c'_∞ entsprechen, so werden auch in den abgeleiteten Strahlenbüscheln den Elementen σ_1, σ_2, σ_∞ die Elemente σ'_1, σ'_2, σ'_∞ entsprechen. Diese Büschel besitzen also den unendlich fernen Strahl entsprechend gemein und sind in Folge dessen insbesondere perspectivisch. Man hat demnach den weiteren Satz:

b) »Bildet in zwei projectiven monocentrischen Systemen der unendlich grosse Kreis ein selbstentsprechendes Element, so sind irgend zwei aus den Systemen abgeleitete Radicalaxenbüschel perspectivisch«.

Dass auch die Umkehrung dieses Satzes Giltigkeit hat, bedarf wohl keines besonderen Beweises.

5. Es ist einleuchtend, dass zu der Ableitung der Radicalaxenbüschel aus den beiden Systemen o und o' durchaus nicht zwei verschiedene Hilfskreise K und K' erforderlich sind, sondern dass ebenso gut ein einziger Hilfskreis verwendet werden kann. Zum Zwecke der folgenden Betrachtung ertheilen wir diesem Kreise eine besondere Lage, und zwar führen wir denselben durch die beiden Punktepaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, in welchen sich die entsprechenden Kreispaare $c_1\, c'_1$ und $c_2\, c'_2$ schneiden. Der Mittelpunkt m desselben wird nothwendig auf der Centralen oo' liegen. Durch diese besondere Anordnung wird erreicht, dass die beiden projectiven Radicalaxenbüschel, welche nun der Kreis K mit den Systemen o und o' erzeugt, drei Paare entsprechender Strahlen, nämlich $\sigma_1 = a_1 b_1$, $\sigma_2 = a_2 b_2$ und die unendlich ferne Gerade gemein haben, also identisch sind. Eine Folge davon ist, dass irgend ein Strahl σ_i des Büschels $\sigma_1 \sigma_2$ die Radicalaxe von K und einem gewissen Kreise c_i von o, und zugleich Radicalaxe von K und dem entsprechenden Kreise c'_i in o', mithin auch Radicalaxe zwischen den entsprechenden Kreisen c_i und c'_i ist und demnach die beiden (reellen oder imaginären) Schnittpunkte von c_i und c'_i auf K liegen. Da das Gleiche für jedes andere Paar entsprechender Kreise der

Systeme o und o' gilt, so stellt sich der Kreis K als das Erzeugniss der letzteren dar. Es gilt demgemäss der Satz:

c) »Haben zwei projective monocentrische Systeme den unendlich grossen Kreis entsprechend gemein, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Kreise derselben selbst wieder ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit jenen der beiden Systeme auf derselben Geraden liege«.

Und umgekehrt:

d) »Werden zwei monocentrische Systeme derart auf einander bezogen, dass sich je zwei entsprechende Kreise derselben auf einem festen Kreise, dessen Mittelpunkt mit den Mittelpunkten der Systeme auf einer und derselben Geraden liegt, schneiden, so sind dieselben projectivisch und haben den unendlich grossen Kreis entsprechend gemein«.

Diesfalls ist noch der specielle Fall zu beachten, wenn der von den beiden Systemen erzeugte Kreis K in ein Geradenpaar zerfällt, d. h. wenn entsprechende Kreise beider Systeme sich in einer und derselben zu ihrer Centralen senkrechten Geraden R schneiden, oder mit anderen Worten, wenn die Radicalaxen aller Paare entsprechender Kreise in ein und dieselbe Gerade K fallen. Diese Gerade ist dann der eine Bestandtheil jenes Geradenpaares, in welches der Kreis K zerfällt; der andere Bestandtheil muss nothwendig durch die Kreispunkte gehen, ist mithin wieder die unendlich ferne Gerade. Das Gesammterzeugniss der beiden Systeme besteht also diesfalls aus der Geraden R und der dreifach zählenden unendlich fernen Geraden.

Die Vereinigung zweier monocentrischer Systeme, welche einen Kreis erzeugen, wollen wir als ein »dicentrisches System«, die Mittelpunkte seiner beiden Bestandtheile als seine »Mittelpunkte« und den erzeugten Kreis als seinen »Radicalkreis« bezeichnen; endlich je zwei entsprechende Kreise der monocentrischen Systeme als »conjugirte Kreise« des dicentrischen Systems. Wenn, wie vorhin bemerkt, der von den beiden Systemen erzeugte Kreis in eine im Endlichen gelegene und in die unendlich ferne Gerade zerfällt, so soll das dicentrische System ein »gerades« heissen, und sein im Endlichen gelegenes geradliniges Erzeugniss seine »Radicalaxe«.

6. Sei o_1 der Mittelpunkt eines monocentrischen Systems, o_2 und o_3 die Mittelpunkte zweier anderer solcher Systeme, wovon jedes mit dem ersten ein dicentrisches System bestimmen soll; R_{12} und R_{13} die zu diesen letzteren gehörigen Radicalkreise und c_{12}, c_{13} deren auf $o_1 o_2$, respective $o_1 o_3$ liegenden Mittelpunkte. Zwischen den beiden monocentrischen Systemen o_2 und o_3 herrscht ebenfalls eine Abhängigkeit, welche dadurch charakterisirt ist, dass sich in ihnen solche Kreise entsprechen, welche mit demselben Kreise von o_1 conjugirt sind. Da sich aber dieses Entsprechen auch auf die unendlich grossen Kreise von o_1, o_2, o_3 bezieht, so folgt, dass auch die monocentrischen Systeme o_2 und o_3 projectivisch, mit selbstentsprechendem unendlich grossen Kreise sind, also wieder ein dicentrisches System bilden, dessen Radicalkreis R_{23} heissen möge. Seien ferner σ und σ' die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der Radicalkreise R_{12} und R_{13}. Durch σ geht ein gewisser Kreis c_1; mithin gehen durch denselben auch die mit c_1 conjugirten Kreise c_2 und c_3 der beiden dicentrischen Systeme $o_1 o_2$ und $o_1 o_3$. Da aber diese Kreise sich nun auch in den monocentrischen Systemen o_2 und o_3 entsprechen, so muss der Radicalkreis R_{23} ebenfalls durch σ gehen. Da das Gleiche auch von σ' gilt, so folgt der Satz:

e) »Haben zwei dicentrische Systeme ein monocentrisches System gemein, so bilden die übrigen zwei Bestandtheile derselben ein drittes dicentrisches System, dessen Radicalkreis mit den Radicalkreisen der beiden ersten dieselben zwei Punkte gemein hat«.

Eine unmittelbare Folge hievon ist weiters, dass die Mittelpunkte c_{12}, c_{13} und c_{23} dieser drei Radicalkreise auf einer und derselben Geraden h liegen müssen, dass man also den Mittelpunkt c_{23} von R_{23} im Schnitte der Geraden $c_{12}\,c_{13}$ mit den Geraden $o_2 o_3$ erhält. Auf das Dreieck $o_1 o_2 o_3$ und die Gerade h lässt sich daher der bekannte Transversalensatz anwenden, wonach

$$\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} \cdot \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} \cdot \frac{o_3 c_{13}}{o_1 c_{13}} = 1$$

ist.

Da die Punkte c_{12} und c_{13} willkürlich auf $o_1 o_2$ und $o_1 o_3$ angenommen sind, so können die Verhältnisse $\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}}$ und $\frac{o_3 c_{13}}{o_1 c_{13}}$ stets in der Form $\frac{l^2}{m^2}$ und $\frac{n^2}{l^2}$ dargestellt werden, wobei l^2, m^2, n^2 beliebige, den Punkten o_1, o_2, o_3 zugeschriebene Zahlwerthe darstellen. Das dritte Verhältniss $\frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}}$ erscheint dann in der Form $\frac{m^2}{n^2}$.

Die Vereinigung dreier monocentrischer Systeme, welche paarweise zu dicentrischen Systemen verbunden sind, soll analog als ein »tricentrisches Kreissystem« bezeichnet werden. Sind die drei dicentrischen Systeme »gerade«, so soll auch das tricentrische ein »gerades« heissen. Die drei Radicalaxen schneiden sich diesfalls in einem und demselben Punkte und es ist $l^2 = m^2 = n^2 = 1$.

7 Seien c_1, c_2 und R drei Kreise, welche einem und demselben Büschel angehören, sich also in zwei (reellen oder imaginären) Punkten σ und σ' schneiden, und o_1, o_2, c, beziehungsweise ihre in derselben Geraden liegenden Mittelpunkte. Denken wir uns auf dem Kreise K zwei beliebige Punkte r und r' angenommen und dieselben durch eine Gerade g verbunden, welche den Kreis c_1 in a_1 und b_1, den Kreis c_2 in a_2 und b_2 schneidet. Die drei Punktepaare rr', $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ gehören bekanntlich einer Involution an, d. h. es ist

$$(rr'a_1a_2) = (r'rb_1b_2),$$

oder ausgeschrieben:

$$\frac{ra_1}{r'a_1} \; \frac{ra_2}{r'a_2} = \frac{r'b_1}{rb_1} \; \frac{r'b_2}{rb_2}.$$

Diese Beziehung lässt sich auf nachstehende Form bringen:

$$\frac{ra_1 . rb_1}{ra_2 . rb_2} = \frac{r'a_1 . r'b_1}{r'a_2 . r'b_2}.$$

Die vier hier auftretenden Rechtecke $ra_1 . rb_1$, $ra_2 . rb_2$, $r'a_1 . r'b_1$ und $r'a_2 . r'b_2$ stellen aber die Potenzen des Punktes r, respective des Punktes r' in Bezug auf die Kreise c_1 und c_2 dar und die Beziehung sagt demnach aus, dass das Verhältniss der Potenzen von r in Bezug auf c_1 und c_2 gleich ist dem Verhältnisse der Potenzen von r' in Bezug auf c_1 und c_2. Berücksichtigt man ferner, dass r und r' zwei beliebig auf R gewählte Punkte sind, so erkennt man, dass das in Rede stehende Verhältniss, für alle Punkte von R überhaupt, constant ist. Der Werth v dieses Verhältnisses ergibt sich, wenn man dasselbe für die beiden Punkte von R berechnet, welche in der Centralen $o_1 o_2 c$ liegen.

Sind r_1, r_2 und ρ die Radien von c_1, c_2 und K, so erhält man leicht

$$v = \frac{(r_1 + co_1 - \rho)(r_1 - co_1 + \rho)}{(\rho + co_2 - r_2)(\rho + co_2 - r_2)}$$

und

$$v = \frac{(\rho + co_1 + r_1)(\rho + co_1 - r_1)}{(r_2 - co_2 + \rho)(r_2 + co_2 - \rho)}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$[(\rho + co_2)^2 - r_2^2]\, v = r_1^2 - (co_1 - \rho)^2$$

und

$$[r_2^2 - (co_2 - \rho)]^2\, v = (\rho + co_1)^2 - r_1^2$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$4v \,.\, co_2 \,.\, \rho = 4\, co_1$$

woraus endlich

$$v = \frac{o_1 c}{o_2 c}$$

folgt.

Sind demnach p_1 und p_2 die Potenzen irgend eines Punktes von R in Bezug auf C_1 und C_2, so ist stets

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{o_1 c}{o_2 c}.$$

Es sei hier bemerkt, dass mit den Grössen, welche in dieser Verhältnissgleichung auftreten, auch Vorzeichen verknüpft werden können. Das Verhältniss $\frac{o_1 c}{o_2 c}$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Strecken o_1c und o_2c in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne verlaufen, d. h. je nachdem c ausserhalb oder innerhalb o_1o_2 liegt. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist positiv oder negativ, je nachdem die beiden Strecken, welche er auf einer durch ihn gehenden Secante bestimmt, von ihm selbst aus in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne verlaufen, d. h. je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Wir haben nun folgende Fälle zu unterscheiden.

α. Der Punkt c liegt ausserhalb o_1o_2; dann ist das Verhältniss $\frac{o_1c}{o_2c}$ positiv, mithin auch das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ d. h. jeder Punkt des Kreises R liegt entweder ausserhalb oder innerhalb der beiden Kreise C_1 und C_2. Dies ist auch thatsächlich der Fall. Denn sind die gemeinschaftlichen Punkte σ und σ' von C_1, C_2 und R reell, so liegt der eine Bogen $\sigma\sigma'$ des Kreises R innerhalb der beiden Kreise C_1 und C_2, der andere Bogen hingegen ausserhalb derselben. Sind die Punkte σ und σ' dagegen imaginär, so wird der Kreis R entweder beide Kreise C_1 und C_2 umschliessen oder von ihnen umschlossen werden, falls einer von ihnen den andern umschliesst, oder R wird den einen der beiden Kreise umschliessen, und ausserhalb des anderen liegen, falls auch C_1 und C_2 ausserhalb einander liegen.

β. Der Punkt c liegt innerhalb o_1o_2; dann ist das Verhältniss $\frac{o_1c}{o_2c}$, also auch das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ negativ, d. h. jeder Punkt des Kreises R liegt ausserhalb C_1 und innerhalb C_2 oder umgekehrt. Sind die Punkte σ und σ' reell, so liegt der eine Bogen $\sigma\sigma'$ von R innerhalb C_1 und ausserhalb C_2, der andere Bogen aber ausserhalb C_1 und innerhalb C_2. Sind σ und σ' dagegen imaginär, so wird, falls die Kreise C_1 und C_2 ausserhalb einander liegen, der Kreis R (sofern er überhaupt reell ist) von einem derselben umschlossen; umschliesst aber einer der Kreise C_1 und C_2 den anderen, dann liegt R zwischen beiden.

Kehren wir zu der ursprünglichen Betrachtung zurück, so erkennen wir, dass das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ bloss von den Abständen des Punktes c von den Punkten o_1 und o_2, nicht aber von den Radien der drei Kreise abhängig ist. Es wird demnach seinen Werth behalten, wenn man die Kreise C_1 und C_2 durch irgend zwei andere Kreise mit denselben Mittelpunkten o_1 und o_2 ersetzt, vorausgesetzt, dass ihre beiden Schnittpunkte auf R liegen, das ist durch irgend zwei conjugirte Kreise desjenigen dicentrischen Systems, dessen Mittelpunkte o_1 und o_2 sind und dessen Radicalkreis R ist. Es gilt daher der Satz:

f) »Das Verhältniss der Potenzen irgend eines Punktes des Radicalkreises eines dicentrischen Systems in Bezug auf zwei conjugirte Kreise des letzteren ist constant und gleich dem Verhältnisse, in welchem das Centrum des Radicalkreises die Strecke der Mittelpunkte des Systems theilt«.

Und für den besonderen Fall eines geraden dicentrischen Systems:

g) »Die Potenzen irgend eines Punktes der Radicalaxe eines geraden dicentrischen Systems in Bezug auf zwei conjugirte Kreise des letzteren, sind einander gleich«.

Das Verhältniss $\frac{o_1 c}{o_2 c}$ soll in der Folge als das »Potenzverhältniss« des dicentrischen Systems bezeichnet werden. Dasselbe lässt sich stets in der Form $\frac{o_1 c}{o_2 c} = \frac{l^2}{m^2}$ darstellen, wobei l^2 und m^2 zwei beliebige, den monocentrischen Systemen o_1 und o_2 zugeschriebene Zahlwerthe bedeuten.

8. Seien o_1, o_2, o_3 die Mittelpunkte eines tricentrischen Systems; R_{12}, R_{23}, R_{31} die Radicalkreise der Paare $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ und c_{12}, c_{23}, c_{31} deren Mittelpunkte; endlich σ und σ' die gemeinschaftlichen Punkte von R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Wie in 6) gezeigt wurde, lassen sich die drei Verhältnisse

$$\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}}, \qquad \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{13}} \qquad \frac{o_3 c_{31}}{o_1 c_{31}}$$

stets in den Formen

$$\frac{l^2}{m^2}, \qquad \frac{m^2}{n^2}, \qquad \frac{n^2}{l^2}$$

darstellen.

Fällt man von o_1, o_2, o_3 auf die Gerade h, welche die Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} der drei Radicalkreise enthält, die

Lothe x_1, x_2, x_3, so ergibt sich ohne Weiteres aus ähnlichen Dreiecken

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2}, \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{o_3 c_{31}}{o_1 c_{31}} = \frac{}{l^2}$$

Nehmen wir nun in dem tricentrischen System drei beliebige, conjugirte Kreise C_1, C_2, C_3, so bestehen zwischen den Potenzen p_1, p_2, p_3 des Punktes σ in Bezug auf diese drei Kreise nach Satz *f)* die Beziehungen

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2} = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{x_2}{x_3},$$

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{o_3 c_{31}}{o_1 c_{31}} = \frac{n^2}{l^2} = \frac{x_3}{x_1}$$

oder

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 = x_1 \quad x_2 \quad x_3 = l^2 \quad m^2 \quad n^2$$

Das Gleiche gilt für den anderen Schnittpunkt σ' der drei Radicalkreise, und auch für jedes andere Tripel conjugirter Kreise des tricentrischen Systems. Mithin:

h) »Die Potenzen eines jeden der beiden gemeinschaftlichen Punkte der Radicalkreise eines tricentrischen Systems in Bezug auf irgend drei conjugirte Kreise des letzteren verhalten sich wie die Abstände der Mittelpunkte des Systems von der Centralen der Radicalkreise«.

Und insbesondere:

i) »Der Schnittpunkt der Radicalaxen eines geraden, tricentrischen Systems ist Potenzcentrum für je drei conjugirte Kreise des Systems«.

9. Sei wieder $o_1 o_2 o_3$ ein tricentrisches System; die Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} der drei Radicalkreise mögen mittelst dreier willkürlicher Zahlwerthe l^2, m^2, n^2 vermöge der Relationen $\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2}$ u. s. w. gegeben sein, womit auch die Gerade h

bestimmt ist. Die Radicalkreise R_{12}, R_{23}, R_{31} sind, wie bereits bekannt, so zu wählen, dass sie ein reelles oder imaginäres Punktepaar σ, σ' gemein haben.

Es lässt sich nun unschwer zeigen, dass jeder beliebige vierte Punkt o_4 zum Mittelpunkt eines monocentrischen Systems gemacht werden kann, so, dass $o_1 o_2 o_4$, $o_1 o_3 o_4$ und $o_2 o_3 o_4$ als drei neue tricentrische Systeme auftreten.

Legen wir nämlich dem Punkte o_4 ebenfalls irgend einen Zahlwerth p_2 bei, so dass die beiden Systeme o_1 und o_4 zu einem dicentrischen System vom Potenzverhältniss $\frac{l^2}{p^2}$ zusammengefasst werden können, und der Mittelpunkt c_{14} des zugehörigen Radicalkreises R_{14} die Strecke $o_1 o_4$ in dem Verhältnisse $\frac{l^2}{p^2} = \frac{o_1 c_{14}}{o_4 c_{14}}$ theilt; dann bilden nach Satz *e)* auch die monocentrischen Systeme o_2 und o_4 ein dicentrisches System, dessen Radicalkreis R_{24} den Schnittpunkt c_{24} von c_{14}, c_{12} und $o_2 o_4$ zum Mittelpunkt hat und welchem das Potenzverhältniss $\frac{m^2}{p^2}$ entspricht. Wenn wir uns den Radicalkreis R_{14} mit beliebigem Radius aus dem Mittelpunkte c_{14} beschrieben denken, so wird der Radicalkreis R_{24} durch die Schnittpunkte σ_1, σ_1' von R_{12} und R_{14} hindurchgehen.

Die drei Systeme o_1, o_2, o_4 bilden daher ein tricentrisches System. In gleicher Weise werden auch o_1, o_3, o_4 ein tricentrisches System bilden, da die beiden dicentrischen Systeme $o_1 o_3$ und $o_1 o_4$ das monocentrische System o_1 gemein haben. Der Radicalkreis R_{24} des dritten Paares o_3, o_4 geht dann durch die Schnittpunkte σ_2 und σ_2' von R_{13} und R_{14} und sein Mittelpunkt c_{34} ergibt sich im Schnitte von $c_{14} c_{13}$ mit $o_3 o_4$. Das zugehörige Potenzverhältniss ist $\frac{n^2}{p^2} = \frac{o_3 c_{34}}{o_4 c_{34}}$

Endlich müssen aber auch die beiden dicentrischen Systeme $o_2 o_4$ und $o_3 o_4$ ein tricentrisches System bilden, da sie das monocentrische System o_4 gemein haben, und wobei das ursprünglich vorhandene dicentrische System $o_2 o_3$ als drittes Paar auftritt. Dann müssen aber die Mittelpunkte c_{23}, c_{34}, c_{24} der zugehörigen Radicalkreise R_{23}, R_{34}, R_{24} in einer und derselben Geraden liegen. Dass dies thatsächlich der Fall ist, kann auch folgendermassen eingesehen werden.

Die beiden Dreiecke $o_2 o_4 o_3$ und $c_{12} c_{24} c_{14}$ liegen auf dem Dreistrahle o_1 $(o_2 o_4 o_3)$; die entsprechenden Seitenpaare derselben $o_2 o_4$, $c_{12} c_{14}$; $o_3 o_4$, $c_{13} c_{14}$ und $o_2 o_3$, $c_{12} c_{13}$ müssen sich demnach einem bekannten Satze zufolge auf einer und derselben Geraden schneiden. Die betreffenden Schnittpunkte sind aber eben die in Rede stehenden Mittelpunkte c_{24}, c_{34}, c_{23}. Die dem tricentrischen System o_2, o_3, o_4 entsprechenden Potenzverhältnisse sind respective $\frac{m^2}{n^2}$ $\frac{n^2}{p^2}$, $\frac{p^2}{m^2}$ und die drei Radicalkreise R_{23}, R_{34}, R_{42} werden nothwendig zwei Punkte σ_3, σ_3' gemein haben.

Überblicken wir nochmals in Kürze die hergestellten Combinationen, so gelangen wir zu folgendem Resultate: In der Ebene sind vier beliebige Punkte o_1, o_2, o_3, o_4 als Mittelpunkte von vier monocentrischen Systemen gegeben, deren jedem ein Zahlwerth l^2, m^2, n^2, respective p^2 entspricht. Verknüpft man eines dieser Systeme, z. B. o_1 mit allen übrigen zu dicentrischen Systemen mit Hilfe der Potenzverhältnisse $\frac{l^2}{m^2}$ $\frac{l^2}{n^2}$, $\frac{l^2}{p^2}$, wodurch sich auf $o_1 o_2$, $o_1 o_3$, $o_1 o_4$ die Mittelpunkte c_{12}, c_{13}, c_{14} der zugehörigen Radicalkreise R_{12}, R_{13}, R_{14} ergeben, deren Radien beliebig gewählt werden können, so sind hiedurch auch die Systeme o_2, o_3, o_4 untereinander zu dicentrischen Systemen verbunden; das Potenzverhältniss eines jeden Paares ist hiebei gleich dem Verhältnisse der Zahlwerthe, welche seinen beiden Mittelpunkten zugeschrieben sind. Die zugehörigen Radicalkreise sind nicht willkürlich, sondern jeder derselben geht durch die Schnittpunkte eines gewissen Paares der früher beliebig gewählten Radicalkreise, und zwar jenes Paares, dessen Mittelpunkte mit seinem Mittelpunkt in gerader Linie liegen.

Es ist nun einleuchtend, dass man in derselben Weise noch ein 5tes, 6tes. $x$tes monocentrisches System mit den früheren verbinden kann, was zu folgendem allgemeinen Satze führt:

j) »Sind in einer Ebene n beliebige monocentrische Systeme $o_1 \ldots o_n$ gegeben, deren jedem ein Zahlwerth $l_1^2 \ldots l_n^2$ beigelegt wird, und verbindet man eines davon, z. B. o_1 mit allen übrigen $o_2 \ldots o_n$ zu dicentrischen Systemen solcherart, dass die Verhältnisse $\frac{l_1^2}{l_2^2} \quad \frac{l_1^2}{l_n^2}$ als die zugehörigen Potenzverhältnisse auftreten und die Radicalkreise $R_{12} \ldots R_{1n}$ beliebige Radien erhalten, so sind hiedurch überhaupt alle Paare $o_2 o_3 \ldots o_{n-1} o_n$ zu dicentrischen Systemen verbunden. Das Potenzverhältniss eines beliebigen Paares $o_i o_k$ ist dann stets gleich dem Verhältnisse der den Mittelpunkten o_i und o_k entsprechenden Werthen $l_i^2 l_k^2$; der Mittelpunkt des zugehörigen Radicalkreises R_{ik} theilt die Strecke $o_i o_k$ in demselben Verhältnisse und liegt mit den Mittelpunkten c_{1i} und c_{1k} in gerader Linie, während der Radicalkreis R_{ik} durch die Schnittpunkte der Radicalkreise R_{1i}, R_{1k} geht. Je drei unter den n monocentrischen Systemen vereinigen sich zu einem tricentrischen Systeme«.

10. Sei $o_1 o_2 o_3$ ein tricentrisches System, dessen drei Potenzverhältnisse, wie früher, vermöge dreier den Mittelpunkten o_1, o_2, o_3 beigelegten Werthe l^2, m^2, n^2 bestimmt sind. Die Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} der drei zugehörigen Radicalkreise R_{12}, R_{23}, R_{31} liegen in einer und derselben Geraden h, und die letzteren selbst haben ein Punktepaar $(\sigma\sigma')_{123}$ gemein. Wir wollen nun wieder ein beliebiges monocentrisches System o_4 mit dem tricentrischen System in Verbindung bringen, aber nicht mehr in der allgemeinen Art, dass wir, wie im vorhergehenden Artikel dem Mittelpunkte o_4 einen beliebigen Werth p^2 beilegen, sondern dadurch, dass als Radicalkreis R_{14} für das dicentrische System $o_1 o_4$ ein Kreis mit beliebigem Radius gewählt wird, dessen Mittelpunkt aber in den Schnitt c_{14} von $o_1 o_4$ und h fällt. Dieser Kreis wird jeden der beiden Radicalkreise R_{12}, R_{31} in einem Punktepaar $(\sigma\sigma')_{124}$, $(\sigma\sigma')_{341}$ treffen. Durch diese Bedingungen ist nun dem System o_4 ein bestimmter Werth p^2 zugewiesen, welcher sich aus dem Potenzverhältnisse $\frac{l^2}{p^2} = \frac{o_1 c_{14}}{o_4 c_{14}}$ ergibt.

Da nun o_1 und o_2, o_1 und o_4 zwei dicentrische Systeme mit gemeinschaftlichem monocentrischen System o_1 vorstellen, so bilden auch o_2 und o_4 ein dicentrisches System. Der Mittelpunkt c_{24} seines Radicalkreises R_{24} muss mit c_{12} und c_{14} in einer und derselben Geraden liegen, ist also in diesem Falle nothwendig der Schnittpunkt von $o_2 o_4$ und h, und der Radicalkreis selbst geht durch die Schnittpunkte $(\sigma\sigma')_{124}$ von R_{12} und R_{14}.

In gleicher Weise findet man, dass der Radicalkreis R_{34} des dicentrischen Systems $o_3 o_4$ den Schnittpunkt c_{34} von h und $o_3 o_4$ zum Mittelpunkt hat und dass er durch die Schnittpunkte $(\sigma\sigma')_{134}$ der Kreise R_{13}, R_{14} gehen muss. Endlich, dass die drei Kreise R_{24} und R_{34} und R_{23} sich in einem und demselben Punktepaar $(\sigma\sigma')_{234}$ treffen müssen. Wir ersehen hieraus, dass ebenso wie in dem früher betrachteten allgemeinen Falle je drei von den vier Systemen o_1, o_2, o_3, o_4 ein tricentrisches System bilden, nur tritt hier die besondere Eigenschaft hinzu, dass die Mittelpunkte der sechs Radicalkreise nicht zu dreien je einer Geraden angehören, sondern dass sie überhaupt alle auf einer und derselben Geraden liegen. Was nun den Werth von p^2 betrifft, so ist derselbe, wie schon oben ersichtlich war, davon abhängig, wie die Gerade h die Strecke $o_1 o_4$ theilt, also abhängig sowohl von der Lage des Punktes o_4 gegen das Dreieck $o_1 o_2 o_3$, als auch von der Lage von h gegen $o_1 o_2 o_3$, d. i. von l^2, m^2, n^2. Es wird demnach zwischen l^2, m^2, n^2, p^2 und den Bestimmungsstücken der gegenseitigen Lage von o_1, o_2, o_3, o_4 eine metrische Relation herrschen, die wir jetzt entwickeln wollen.

Fällen wir von o_1, o_2, o_3, o_4 Lothe auf h, die x_1, x_2, x_3, x_4 heissen mögen, so ist offenbar

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 = l^2 \quad m^2 \quad n^2 \quad p^2$$

Bezeichnen wir ferner mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Strecken $o_1 o_4$, $o_2 o_4$, $o_3 o_4$ und mit γ_1, γ_2, γ_3 die drei Winkel $o_2 o_4 o_3$, $o_3 o_4 o_1$, $o_1 o_4 o_2$ zwischen denselben, mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 die Flächen jener Dreiecke, in welchen die gleich indicirten Punkte o nicht als Eckpunkte auftreten, und endlich den Neigungswinkel der Geraden $o_1 o_4$ gegen die Lothe mit φ, so ist

$$\frac{x_1 - x_4}{\rho_1} = \cos\varphi,$$

$$\frac{x_4-x_2}{\rho_2} = -\cos(\gamma_3+\varphi) = -\cos\gamma_3\cos\varphi+\sin\gamma_3\sin\varphi,$$

$$\frac{x_4-x_3}{\rho_3} = -\cos(\gamma_2-\varphi) = -\cos\gamma_2\cos\varphi-\sin\gamma_2\sin\varphi.$$

Die Elimination von $\sin\varphi$ ergibt

$$(x_4-x_2)\frac{\sin\gamma_2}{\rho_2}+(x_4-x_3)\frac{\sin\varphi_3}{\rho_3} =$$

$$= -\cos\varphi(\cos\gamma_3\sin\gamma_2+\cos\gamma_2\sin\gamma_3) = -\cos\varphi\cos\gamma_1$$

und die Substitution von $\cos\varphi$ aus der ersten Gleichung:

$$(x_4-x_1)\frac{\sin\gamma_1}{\rho_1}+(x_4-x_2)\frac{\sin\gamma_2}{\rho_2}+(x_4-x_3)\frac{\sin\gamma_3}{\rho_3} = o$$

oder

$$x_4\Delta_4 = x_1\Delta_1+x_2\Delta_2+x_3\Delta_3$$

und vermöge der obigen Proportionen

$$p^2\Delta_4 = l^2\Delta_1+m^2\Delta_2+n^2\Delta_3 \qquad \text{I)}$$

als die gesuchte Beziehung.

Insbesondere verdient der Fall hervorgehoben zu werden, wenn o_4 der Höhenschnittpunkt des ursprünglichen Dreieckes $o_1o_2o_3$ ist. Man findet leicht, dass dann für α_1, α_2, α_3 als die Winkel des Dreieckes $o_1o_2o_3$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \operatorname{ctg}\alpha_3\operatorname{ctg}\alpha_1, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2$$

ist, womit an Stelle der allgemeinen Relation I) die besondere

$$p^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3 = l^2\operatorname{tg}\alpha_1+m^2\operatorname{tg}\alpha_2+n^2\operatorname{tg}\alpha_3 \qquad \text{II)}$$

tritt.

Die Gesammtheit von vier solchen monocentrischen Systemen, welche zu je drei verbunden, tricentrische Systeme ergeben und deren sechs Radicalkreiscentren auf einer und derselben Geraden h liegen, soll, um die eingeführten Bezeichnungen consequent abzuschliessen, ein »tetracentrisches System« heissen.

Liegen die vier Punkte o_1, o_2, o_3, o_4 so, dass einer davon den Höhenschnitt des von den übrigen drei gebildeten Dreieckes darstellt, so ist überhaupt jeder der vier Punkte der Höhenschnitt des übrigen Dreieckes. Die vier Punkte können in diesem Falle auch als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes angesehen werden, welches sich durch die besondere Eigenschaft auszeichnet, dass je zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen und desshalb ein »orthogonales vollständiges Viereck« heisst und wir wollen aus diesem Grunde auch das tetracentrische System, dessen vier Mittelpunkte eine solche Lage haben, als ein »orthogonal-tetracentrisches« bezeichnen.

11. Seien o_1 und o_2 die Mittelpunkte eines dicentrischen Systems, R der Radicalkreis und c sein Mittelpunkt. Bezeichnen wir das Verhältniss $o_1c:o_2c$ wieder durch $l^2 \; m^2$, so verhalten sich nach Satz *f)* die Potenzen eines jeden Punktes von R in Bezug auf irgend zwei conjugirte Kreise des Systems ebenfalls wie $l^2 \; m^2$, oder was dasselbe ist, die von irgend einem Punkte des Radicalkreises R an ein beliebiges Paar conjugirter Kreise gezogenen Tangenten stehen in dem Verhältnisse $l \; m$.

Theilen wir nun die Strecke o_1o_2 innerlich und äusserlich durch die Punkte f_x und f'_x, so dass

$$o_1f_x \;\; o_2f'_x = o_1f:o_2f' = l:m.$$

Die Punkte f_x und f'_x liegen dann bekanntlich symmetrisch gegen den Punkt c, und sie können als Brennpunkte eines Kegelschnittes Σ angesehen werden, dessen Brennpunktsaxe dem Durchmesser von R gleich ist.

Sei nun s eine beliebige Tangente dieses Kegelschnittes, und w_1, w_2, ρ, ρ' die Fusspunkte der von o_1, o_2, f und f' auf dieselbe gefällten Lothe, wobei ρ und ρ' nach einem bekannten Satze aus der Kegelschnittstheorie auf dem Kreise R liegen müssen.

Sind endlich λ und μ die Sehnen, welche die Gerade s in den beiden Kreisen C_1 und C_2 bestimmt und deren Mittelpunkte offenbar w_1 und w_2 sind, so ergeben sich die Potenzen des Punktes ρ in Bezug auf C_1 und C_2 respective gleich $\frac{\lambda^2}{4}-\overline{\rho w_1^2}$ und $\frac{\mu^2}{4}-\overline{\rho w_2^2}$, und da ρ auf dem Radicalkreise R

liegt, so ist

$$\frac{\lambda^2}{4} - \overline{\rho w_1^2} : \frac{\mu^2}{4} - \overline{\rho w_2^2} = l^2 \quad m^2. \tag{1}$$

Ausserdem ist

$$\rho w_1 \quad \rho w_2 = f o_1 : f o_2 = l \quad m$$

oder

$$\rho w_1^2 \quad \rho w_2^2 = l^2 \quad m^2. \tag{2}$$

Aus 1) und 2) folgt aber unmittelbar

$$\lambda \quad \mu = l \quad m.$$

Bezeichnen wir den Kegelschnitt Σ als den dem dicentrischen Kreissystem »beigeordneten Kegelschnitt«, so folgt mit Rücksicht auf die willkürliche Wahl des conjugirten Kreispaares $C_1 C_2$ der Satz:

k) »Das Verhältniss der Längen jener Sehnen, welche eine beliebige Tangente des einem dicentrischen Systeme beigeordneten Kegelschnittes in irgend zwei conjugirten Kreisen dieses Systemes bestimmt, ist constant, und zwar gleich dem Verhältnisse der Quadratwurzeln jener Strecken, in welchen der Mittelpunkt des Radicalkreises die Strecke der Mittelpunkte des dicentrischen Systems theilt«.

12. Jede beliebige Tangente t des Kegelschnittes Σ berührt stets auch einen Kreis C_1 mit dem Mittelpunkte o_1, d. h. sie bestimmt in demselben eine unendlich kleine Sehne. Dem eben bewiesenen Satze zufolge muss nun auch die Sehne, welche t in dem mit C_1 conjugirten Kreise C_2 bestimmt, unendlich klein sein, oder mit anderen Worten, jede Tangente des Kegelschnittes Σ ist gleichzeitig eine gemeinschaftliche Tangente irgend zweier conjugirter Kreise des dicentrischen Systems und umgekehrt, jede gemeinschaftliche Tangente irgend zweier conjugirter Keise ist eine Tangente des Kegelschnittes Σ (wie übrigens mit Hilfe einer ähnlichen Betrachtung wie in 9) auch direct leicht nachgewiesen werden kann). Daher:

l) »Die gemeinschaftlichen Tangenten aller Paare conjugirter Kreise eines dicentrischen Systems umhüllen den diesem System beigeordneten Kegelschnitt«.

13. Der Satz K gestattet, wie man unschwer erkennt folgende Umkehrungen:

m) Alle Geraden, welche in zwei gegebenen Kreisen C_1 und C_2 Sehnen bestimmen, welche in einem gegebenen Verhältnisse l m stehen, umhüllen einen Kegelschnitt. Die Brennpunkte des letzteren theilen die Strecke der beiden Kreismittelpunkte innerhalb und ausserhalb in dem Verhältnisse l m und der über der Brennpunktsaxe als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der beiden gegebenen Kreise. Die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise sind ebenfalls Tangenten des genannten Kegelschnittes«.

Und insbesondere:

n) »Alle Geraden, welche in zwei gegebenen Kreisen gleiche Sehnen bestimmten, umhüllen jene Parabel, deren Scheiteltangente die Radicalaxe der Kreise ist und deren Brennpunkt in der Mitte zwischen den Kreismittelpunkten liegt. Unter den Parabeltangenten befinden sich auch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise«.

o) »Alle Kreispaare aus zwei gegebenen Mittelpunkten, welche auf einer gegebenen Geraden Sehnen von bestimmtem Längenverhältniss ausschneiden, sind conjugirte Kreispaare eines dicentrischen Systems«.

14. Erwähnenswerth ist, dass der einem dicentrischen Kreissystem beigeordnete Kegelschnitt unter besonderen Verhältnissen in zwei Einhüllende erster Classe, d. i. in zwei Strahlenbüschel zerfallen kann. Dieser Fall tritt jedesmal ein, wenn die Mittelpunkte o_1 und o_2 des dicentrischen Systems zugleich polar conjugirte Punkte des Radicalkreises R sind, d. h. wenn sie den in ihrer Verbindungslinie $o_1 o_2$ liegenden Durchmesser $\varphi\varphi'$ des Radicalkreises R innerhalb und ausserhalb in demselben Verhältnisse l m theilen. Bezeichnen wir noch den Mittelpunkt des Radicalkreises mit c, so bestehen folgende aus der Elementargeometrie bekannte Eigenschaften.

Das Verhältniss der Entfernungen eines jeden Punktes des Kreises R von den Punkten o_1 und o_2 ist ebenfalls gleich l m und das Verhältniss $o_1 c : o_2 c = l^2 : m^2$. Seien nun C_1 und C_2 irgend zwei conjugirte Kreise des dicentrischen Systems,

(o_1, o_2, R), d. h. zwei Kreise aus den Mittelpunkten o_1 und o_2, welche sich in den nämlichen zwei (reellen oder imaginären) Punkten von R treffen. Die Potenzen irgend eines beliebigen Punktes P von R in Bezug auf C_1 und C_2 verhalten sich nach *f)* wie $o_1 c : o_2 c$, d. h. wie $l^2 \; m^2$. Mithin stehen die von P aus an C_1 und C_2 gezogenen Tangenten Pa_1 und Pa_2 im Verhältnisse $l \; m$. Dieses Verhältniss weisen aber auch die Strecken Po_1 und Po_2 auf, so dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke $Po_1 a_1$ und $Po_2 a_2$ ähnlich sind, und daher auch die Radien $r_1 = o_1 a_1$ und $r_2 = o_2 a_2$ sich wie $l \; m$ verhalten. Hieraus folgt aber, dass φ und φ' die beiden Ähnlichkeitspunkte des beliebig gewählten Paares $C_1 C_2$, mithin überhaupt aller Paare conjugirter Kreise des dicentrischen Systems $(R o_1 o_2)$ darstellen. Was den diesem Systeme beigeordneten Kegelschnitt Σ betrifft, so sieht man sofort, dass sowohl seine Brennpunkte, als auch seine Scheitel in die Punkte φ und φ' fallen, dass derselbe also in diesen beiden Punkten ausartet. Jede durch φ respective φ' gezogene Gerade ist diesfalls als eine Tangente von Σ anzusehen und sie besitzt auch thatsächlich die im Satze K ausgesprochene Eigenschaft, in conjugirten Kreisen C_1 und C_2 Sehnen von constantem Verhältnisse $(l \; m)$ auszuschneiden.

Es gilt demgemäss der Satz:

p) »Sind die Mittelpunkte eines dicentrischen Kreissystems polar conjugirt in Bezug auf den Radicalkreis des Systems, so sind die in der Symmetrieaxe des letzteren gelegenen Punkte des Radicalkreises die Ähnlichkeitspunkte für sämmtliche Paare conjugirter Kreise; der dem System beigeordnete Kegelschnitt zerfällt zugleich in diese beiden Punkte«.

15. Die Ausdehnung der in den vorhergehenden Artikeln angestellten Betrachtungen auf ein tricentrisches Kreissystem führt zu merkwürdigen Beziehungen. Seien o_1, o_2, o_3 die Mittelpunkte eines derartigen Systems. Dasselbe stellt die Vereinigung dreier dicentrischen Systeme (o_1, o_2); (o_2, o_3); (o_3, o_1) dar, unter der Bedingung (§. 6.), dass die drei zugehörigen Radicalkreise R_{12}, R_{23}, R_{31} sich in den nämlichen zwei Punkten schneiden, ihre auf $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ befindlichen Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} also auf einer und derselben Geraden liegen. Die Potenzver-

hältnisse der drei dicentrischen Systeme $(o_1 o_2 R_{12})$; $(o_2 o_3 R_{23})$; $(o_3 o_1 R_{31})$ sind, wie bereits bekannt, in der Form

$$\frac{o_1 c_{12}}{o_2 c_{12}} = \frac{l^2}{m^2}; \quad \frac{o_2 c_{23}}{o_3 c_{23}} = \frac{m^2}{n^2}; \quad \frac{o_3 c_{13}}{o_1 c_{13}} = \frac{n^2}{l^2}$$

darstellbar.

Den drei dicentrischen Systemen $(o_1 o_2 R_{12})$, $(o_2 o_3 R_{23})$ und $(o_3 o_1 R_{31})$ sind drei Kegelschnitte Σ_1, Σ_2, Σ_3 beigeordnet, deren Mittelpunkte c_{12}, c_{23}, c_{31} sind, und deren Brennpunktspaare f_{12}, f'_{12}; f_{23}, f'_{23}; f_{31}, f'_{31} die Strecken $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ beziehungsweise in den Verhältnissen $l : m$, $m : n$, $n : l$ theilen. Diese drei Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} gehören ein und derselben Kegelschnittsschaar an, d. h. sie haben vier gemeinschaftliche Tangenten, wie folgende Überlegung lehrt. Stellen wir uns unter C_1, C_2, C_3 irgend ein Tripel conjugirter Kreise des tricentrischen Systems $(o_1 o_2 o_3)$ vor und bezeichnen wir die Sehnen, welche eine gemeinschaftliche Tangente t von Σ_{12} und Σ_{23} von ihnen bestimmt, mit s_1, s_2, s_3.

Nach Satz *k)* ist dann

$$s_1 : s_2 = l : m$$

und

$$s_2 : s_3 = m : n,$$

woraus sich unmittelbar $s_3 : s_1 = n : l$ ergibt; dies bedeutet aber nach Satz *m)*, dass die Gerade t auch den Kegelschnitt Σ_{31} berührt. Dasselbe gilt in gleicher Weise von den übrigen 3 gemeinschaftlichen Tangenten der Curven Σ_{12} und Σ_{23}.

Daher:

q) »Die drei Kegelschnitte, welche den drei dicentrischen Bestandtheilen eines tricentrischen Kreissystems beigeordnet sind, gehören derselben Kegelschnittschaar an«.

Zwischen den Brennpunktepaaren f_{12}, f'_{12}; f_{23}, f'_{23}; f_{31}, f'_{31} der drei Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} besteht eine leicht erkennbare Beziehung. Da nämlich f_{12} die Dreieckseite $o_1 o_2$ in dem Verhältnisse $l : m$ und f_{23} die Dreieckseite $o_2 o_3$ in dem Verhältnisse $m : n$ theilt, so wird die Gerade f_{12}, f_{23} nach dem bekannten Transversalensatze die Dreieckseite $o_3 o_1$ in dem Verhältnisse $n : l$ theilen, mithin nothwendig durch den einen der beiden Punkte f_{31}, f'_{31} gehen. Dasselbe gilt auch von den drei Verbindungslinien $f_{12}f'_{23}$, $f'_{12}f_{23}$, $f'_{12}f'_{23}$. Berücksichtigt man nun, dass Σ_{12} und Σ_{23} als zwei beliebige Kegelschnitte einer Schaar angesehen werden können und wie vorhin gezeigt wurde, dass Σ_{31} derselben Schaar angehört, so folgt der Satz:

r) »Sind $f_{12}\,f'_{12}$ und $f_{23}\,f'_{23}$ die Brennpunkte zweier Kegelschnitte, so sind die Schnittpunkte der Strahlenpaare $f_{12}\,f_{23}$, $f'_{12}\,f'_{23}$ und $f'_{12}\,f_{23}$, $f_{12}\,f'_{23}$ stets Brennpunkte eines dritten Kegelschnittes, welcher der durch die beiden ersten bestimmten Kegelschnittschaar angehört«.

16. Den letzt ausgesprochenen Satz hat Herr Schröter[1] in seiner Abhandlung »Über Curven dritter Ordnung« auf einem anderen, directen Wege bewiesen. Die Resultate dieser Abhandlung mögen, so weit sie hier in Betracht kommen, angeführt werden.

»Die Brennpunktspaare aller Kegelschnitte einer Schaar sind conjugirte Punkte einer und derselben Curve dritter Ordnung. Alle Paare conjugirter Punkte dieser Curve werden von einem beliebigen Punkte der Curve durch ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem (d. i. durch ein involutorisches Büschel mit rechtwinkligen Doppelstrahlen) projicirt. Die Axen aller Kegelschnitte der Schaar umhüllen eine Curve dritter Classe, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat; beide Curven stehen zu einander in der Beziehung der Hesse'schen und Cayley'schen Curve«. Eine weitere, dort entwickelte Eigenschaft der Brennpunktscurve ist folgende:

Sind $f_{12}\,f'_{12}$, $f_{23}\,f'_{23}$ (bezugnehmend auf die vorgehenden Betrachtungen und Bezeichnungen) die Brennpunktspaare zweier Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23} der Schaar und fasst man dieselben als 2 Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseites auf, so repräsentirt auch das dritte Paar f_{31}, f'_{31} von Gegenecken das Brennpunktspaar eines Kegelschnittes Σ_{31} der Schaar.

Denken wir uns in dem Diagonaldreiseit $o_1 o_2 o_3$ dieses vollständigen Viereckes eine Höhe, z. B. $o_1\pi_1$ gezogen, deren Fusspunkt auf der Gegenseite $o_2 o_3$ der Punkt π_1 sei. Verbindet man π_1 mit f_{12}, f'_{12} und f_{23}, f'_{23} durch zwei Strahlenpaare, so stellen diese, da sie beide durch das rechtwinklige Strahlenpaar $o_1\pi_1$, $o_2 o_3$ harmonisch getrennt werden, conjugirte Paare eines

[1] Mathem. Annalen, Band V.

gleichseitig involutorischen Büschels dar und π_1 ist demnach wieder ein Punkt der Brennpunktscurve und da ferner alle Brennpunktspaare von π_1 aus durch das eben genannte involutorische Büschel projicirt werden so folgt, dass der Doppelstrahl $\pi_1 o_1$ dieses Büschels ein Brennpunktspaar enthalten muss, oder mit anderen Worten, dass die Höhe $o_1 \pi_1$ des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ die Brennpunktsaxe eines gewissen Kegelschnittes Σ_{14} der Schaar ist. Dasselbe gilt auch von den beiden übrigen Höhen $o_2 \pi_2$ und $o_3 \pi_3$ von $o_1 o_2 o_3$.

Was die Brennpunkte der neuen drei Kegelschnitte Σ_{14}, Σ_{24}, Σ_{34} betrifft, so lässt sich leicht noch eine weitere Beziehung derselben zu dem Dreiecke $o_1 o_2 o_3$ erkennen. Denken wir uns nämlich alle möglichen Brennpunktspaare, darunter auch jenes des Kegelschnittes Σ_{14} von dem Höhenfusspunkt π_2 auf $o_1 o_3$ projicirt, so erhalten wir, wie schon vorhin gezeigt wurde, ein involutorisches Büschel, dessen Doppelstrahlen $o_1 o_3$ und $o_2 o_4$ sind. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Brennpunkte des Kegelschnittes Σ_{14} nothwendig durch o_1 und o_4 harmonisch getrennt sein müssen. Da endlich die Mittelpunkte c_{12}, c_{13} aller Kegelschnitte der Schaar auf einer und derselben Geraden h liegen, so ergibt sich auch der Mittelpunkt c_{14} von Σ_{14} im Schnitte dieser Geraden mit $o_1 o_4$.

Berücksichtigt man endlich, dass die Einhüllende aller Axen der Kegelschnittschaar von der dritten Classe ist, so leuchtet ein, dass ausser den Seiten und Höhen des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ keine weiteren Kegelschnittaxen durch die 4 Punkte $o_1 o_2 o_3 o_4$ gehen können. Die vorstehenden Betrachtungen ergeben sonach den Satz:

s) »Die Brennpunktaxen je dreier Kegelschnitte einer Schaar, deren Brennpunktspaare als Gegenecken eines vollständigen Vierseites angeordnet werden können, bilden ein Dreieck, dessen Höhen die Brennpunktsaxen dreier weiteren Kegelschnitte der Schaar sind. Die Brennpunktspaare der letzteren werden von dem Höhenpunkt und je einem Eckpunkt des Dreieckes harmonisch getrennt«.

17 Der letzt ausgesprochene Satz führt zu einer merkwürdigen Eigenschaft des orthogonal-tetracentrischen Kreissystems. Denken wir uns nämlich wieder ein tricentrisches

System $o_1 o_2 o_3$ gegeben, dessen Potenzverhältnisse vermöge der drei willkürlichen Werthe l^2, m^2, n^2 bestimmt sind. Desgleichen mögen alle übrigen Elemente in der gewohnten Weise bezeichnet werden.

Wir wissen nun, dass die drei den dicentrischen Systemen $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ beigeordneten Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} einer Schaar angehören und ihre 4 gemeinschaftlichen Tangenten t, t', t'', t''' in je drei conjugirten Kreisen des Systems Sehnen ausschneiden, welche sich wie $l \;\; m \;\; n$ verhalten. Nach Satz *s)* gehört zu dieser Schaar aber unter anderem auch ein Kegelschnitt Σ_{14}, dessen Brennpunktsaxe in die Höhe $o_1 o_4$ des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ fällt. Es ist mithin möglich, diesen Kegelschnitt Σ_{14} als beigeordneten Kegelschnitt eines dicentrischen Systems anzusehen, welches aus dem System o_1 und einem zweiten monocentrischen System besteht. Da der Mittelpunkt des letzteren nothwendig auf der Brennpunktsaxe $o_1 o_4$ liegen und durch die Brennpunkte des Kegelschnittes Σ_{14} von o_1 harmonisch getrennt sein muss, so folgt aus Satz *s*, dass nur o_4 dieser Punkt sein kann. Da weiters der Mittelpunkt von Σ_{14} der Schnitt c_{14} der Axe $o_1 o_4$ mit der Mittelpunktsgeraden $h = c_{12}, c_{23}, c_{31}$ der Schaar ist, so wird zugleich das Potenzverhältniss des Systemes $o_1 o_4$, gleich $\dfrac{o_1 c_{14}}{o_4 c_{14}} = \dfrac{l^2}{p^2}$ erhalten, wobei

$$p^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 = l^2 \operatorname{tg} \alpha_1 + m^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + n^2 \operatorname{tg} \alpha_3,$$

wie in 10) gezeigt wurde. Das System o_4 ist also mit $o_1 o_2 o_3$ zu einem orthogonal-tetracentrischen System verbunden. Endlich werden alle Tangenten von Σ_{14}, darunter auch die 4 vorgenannten Tangenten t, t', t'' t''' in je zwei conjugirten Kreisen von $o_1 o_4$ Sehnen bestimmen, welche sich wie $l \;\; p$ verhalten. Wir können daher den Satz aussprechen:

t) »Die sechs, einem orthogonal-tetracentrischen Kreissystem beigeordneten Kegelschnitte gehören einer und derselben Kegelschnittsschaar an und jede ihrer vier gemeinschaftlichen Tangenten bestimmt in je vier conjugirten Kreisen des Systemes Sehnen, welche sich wie $l \;\; m : n \;\; p$ verhalten, wobei die Verhältnisse von l^2, m^2, n^2, p^2, respective die Potenzverhältnisse der dicentrischen Systeme von o_1, o_2, o_3, o_4 darstellen«.

Zu diesem Satze findet man leicht die nachstehende, besondere Form:

t) Die sechs, einem geraden orthogonal-tetracentrischen System beigeordneten Parabeln gehören einer und derselben Parabelschaar an und jede ihrer drei gemeinschaftlichen Tangenten bestimmt in je vier conjugirten Kreisen des Systems gleiche Sehnen.»

18. Nehmen wir jetzt umgekehrt vier beliebige Gerade t, t', t'', t''' in einer Ebene an. Dieselben können stets als Basistangenten einer Kegelschnittsschaar gedacht werden. Wählen wir ausserdem einen beliebigen Punkt o_1, so gehen, da die Einhüllende aller Kegelschnittsaxen eine Curve dritter Classe ist, durch denselben die Axen $o_1 o_2$, $o_1 o_3$, $o_1 o_4$ dreier Kegelschnitte Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} der Schaar. Bezeichnen wir mit $f_{12} f'_{12}$ und $f_{13} f'_{13}$ die Brennpunktspaare von Σ_{12} und Σ_{13}, so werden nach Satz *r)* auch die Schnittpunkte f_{23}, f'_{23} der Strahlenpaare $f_{12}\, f_{13}$ und $f'_{12}\, f'_{13}$, $f_{12}\, f'_{13}$ und $f_{13}\, f'_{12}$ die Brennpunkte eines Kegelschnittes der Schaar darstellen, dessen Axe $o_2 o_3$ die Verbindungslinie $f_{23}\, f'_{23}$ darstellt. Die Höhen des von den Brennpunktsaxen der drei Curven C_{12}, C_{23}, C_{31} gebildeten Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ sind ebenfalls Axen von Kegelschnitten $\Sigma_{14}\, \Sigma_{24}\, \Sigma_{31}$ der Schaar. Die sechs Kegelschnitte $\Sigma_{12} \ldots \Sigma_{34}$ können also als die beigeordneten Kegelschnitte eines orthogonal-tetracentrischen Systems $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ angesehen werden und ihre Axenkreise stellen zugleich die sechs Radicalkreise dieses Systems dar. Die Anwendung des Satzes *t)* auf dieses System und die vier Geraden t, t', t'', t''' liefert den weiteren Satz:

u) »Es gibt unendlich viele orthogonal-tetracentrische Kreissysteme, von solcher Beschaffenheit, dass je vier conjugirte Kreise eines derselben in einer jeden von vier gegebenen Geraden Sehnen bestimmen, deren Verhältniss für das betreffende orthogonal-tetracentrische Kreissystem constant ist. Die Mittelpunkte eines jeden solchen tetracentrischen Systems sind die Eckpunkte eines der unendlich vielen vollständigen orthogonalen Vierecke, die sich aus den Axen der den vier Geraden eingeschriebenen Kegelschnitte bilden lassen. Die Angabe eines Mittelpunktes bestimmt vollständig die drei übrigen«.

19. Seien endlich $C_1\, C_2\, C_3$ drei beliebige Kreise mit den Mittelpunkten $o_1\, o_2\, o_3$. Es können stets vier Gerade t, t', t'', t''' bestimmt werden, welche in den drei Kreisen Sehnen bestimmen, die proportional mit irgend drei gegebenen Strecken l, m, n sind, und zwar auf folgende Weise:

Wir fassen C_1, C_2, C_3 als conjugirte Kreise eines tricentrischen Systems o_1, o_2, o_3 auf, dessen Paare $o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_1$ respective die Potenzverhältnisse $\frac{l^2}{m^2}$, $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{n^2}{p^2}$ besitzen und Radicalkreise, welche durch die Schnittpunkte von C_1, C_2; C_2, C_3; C_3, C_1 beziehungsweise gehen. Die vier gesuchten Geraden sind dann die gemeinschaftlichen Tangenten der diesem tricentrischen System beigeordneten Kegelschnitte. Dieselben vier Geraden werden aber nach Satz *t)* auch noch in einem vierten Kreise C_4, der mit $C_1 C_2 C_3$ in dem aus $o_1 o_2 o_3$ abgeleiteten orthogonal-tetracentrischen System conjugirt ist, Sehnen ausschneiden, welche proportional zu einer bestimmten Strecke p sind, nämlich jener, die mit l, m, n durch die Relation $p^2 \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = l^2 \operatorname{tg}\alpha_1 + m^2 \operatorname{tg}\alpha_2 + n^2 \operatorname{tg}\alpha_3$ verbunden ist, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ sind.

Wir wollen nun den Radius r_4 dieses Kreises unter der Voraussetzung bestimmen, dass r_1, r_2, r_3 die Radien von C_1, C_2, C_3 sind.

Sei t eine der vier vorgenannten Geraden. Bezeichnen s_1, s_2, s_3, s_4 die halben Sehnen, welche die vier Kreise C_1, C_2, C_3, C_4 auf ihr bestimmen, so ist

$$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 = l \quad m \quad n : p,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$s_4^2 \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = s_1^2 \operatorname{tg}\alpha_1 + s_2^2 \operatorname{tg}\alpha_2 + s_3^2 \operatorname{tg}\alpha_3. \qquad \text{III)}$$

Seien ferner $o_1 a_1 = x_1$, $o_2 a_2 = x_2$, $o_3 a_3 = x_3$, $o_4 a_4 = x_4$ die von den Eckpunkten o_1, o_2, o_3 und dem Höhenschnitt o_4 auf t gefällten Lothe.

Man findet nun

$$a_1 a_2 = \sqrt{\overline{o_1 o_2}^2 - (x_1 - x_2)^2}; \; a_1 a_3 = \sqrt{\overline{o_1 o_3}^2 - (x_1 - x_3)^2};$$

$$a_2 a_3 = \sqrt{\overline{o_2 o_3}^2 - (x_2 - x_3)^2};$$

mithin

$$\sqrt{\overline{o_1o_2}^2-(x_1-x_2)^2}+\sqrt{\overline{o_1o_3}^2-(x_1-x_3)^2}=\sqrt{\overline{o_2o_3}^2-(x_2-x_3)^2}$$

und von den Wurzeln befreit:

$$x_1^2\overline{o_2o_3}^2+x_2^2.\overline{o_3o_1}^2+x_3^2.\overline{o_1o_2}^2-x_1x_2[\overline{o_2o_3}^2+\overline{o_3o_1}^2-\overline{o_1o_2}^2]-$$
$$-x_2x_3[\overline{o_3o_1}^2+\overline{o_1o_2}^2-\overline{o_2o_3}^2]-x_3x_1[\overline{o_1o_2}^2+\overline{o_2o_3}^2-\overline{o_3o_1}^2]=$$
$$=\overline{o_1o_2}^2.\overline{o_1o_3}^2-\frac{1}{4}[\overline{o_1o_2}^2+\overline{o_1o_3}^2-\overline{o_2o_3}^2]^2$$

oder vermöge bekannter Beziehungen am Dreiecke

$$x_1^2.\overline{o_2o_3}^2+x_2^2\overline{o_3o_1}^2+x_3^2\overline{o_1o_2}^2-2x_1x_2\overline{o_1o_3}.\overline{o_3o_1}\cos\alpha_3-$$
$$-2x_2x_3\overline{o_3o_1}.\overline{o_1o_2}._2\cos\alpha_2=\overline{o_1o_2}^2.\overline{o_1o_3}^2\sin\alpha_1^2.$$

Dividirt man durch $\overline{o_1o_2}.\overline{o_1o_3}$ und ersetzt man die auftretenden Seitenverhältnisse durch die Sinus-Verhältnisse der Gegenwinkel, so erhält man nach den nöthigen Reductionen unter Berücksichtigung der Winkelsumme die Gleichung:

$$(x_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+x_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3^2\operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3-$$
$$-[x_1\operatorname{tg}\alpha_1+x_2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3\operatorname{tg}\alpha_3]^2=2F\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3,$$

worin F den Flächeninhalt des Dreieckes $o_1o_2o_3$ bedeutet.

Zwischen den Lothen besteht aber, wie bereits in 10) gezeigt wurde, auch die Relation

$$x_4\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3=x_1\operatorname{tg}\alpha_1+x_2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3\operatorname{tg}\alpha_3$$

Man erhält also schliesslich

$$x_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+x_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+x_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-x_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3=2F$$

Substituirt man hierin $x_1^2=r_1^2-s_1^2$ u. s. w., so folgt

$$r_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+r_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+r_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-r_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3-2F=$$
$$=s_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+s_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+s_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-s_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3$$

und mit Berücksichtigung von III.,

$$r_1^2\operatorname{tg}\alpha_1+r_2^2\operatorname{tg}\alpha_2+r_3^2\operatorname{tg}\alpha_3-r_4^2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3=2F \qquad \text{IV)}$$

Man ersieht hieraus, dass der Radius r_4 bloss von den Winkeln des Dreieckes $o_1o_2o_3$ und von den Radien r_1, r_2, r_3, nicht aber von den Verhältnissgrössen l, m, n, p oder s_1, s_2, s_3, s_4 abhängig ist, so dass sich unmittelbar folgende zwei Sätze ergeben:

v) »Sind drei conjugirte Kreise eines orthogonal-tetracentrischen Systems gegeben, so ist dadurch auch der vierte conjugirte Kreis unabhängig von den Potenzverhältnissen bestimmt; sein Radius r_4 ist mit den Radien r_1, r_2, r_3 der ersten drei Kreise durch die Beziehung

$$r_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 + r_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + r_3^2 \operatorname{tg} \alpha_3 - r_4^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 = 2F$$

verbunden, worin α_1, α_2, α_3, F die Winkel und den Flächeninhalt des Mittelpunktdreieckes der ersten drei Kreise bedeuten«.

w) »Sind in einer Ebene drei beliebige Kreise C_1, C_2, C_3 mit den Radien r_1, r_2, r_3 gegeben, deren Mittelpunkte o_1, o_2, o_3 ein Dreieck mit den Winkeln α_1, α_2, α_3 und dem Flächeninhalt F bilden und wird der Höhenschnitt o_4 des Dreieckes zum Centrum eines vierten Kreises C_4 gemacht, dessen Radius r_4 durch die Gleichung

$$r_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + r_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + r_3^2 \operatorname{tg} \alpha_3 - r_4^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 = 2F$$

bestimmt ist, so sind die vier Sehnen s_1, s_2, s_3, s_4, welche diese Kreise auf einer beliebigen Geraden der Ebene ergeben, stets durch die Gleichung

$$s_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 + s_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2 + s_3^2 \operatorname{tg} \alpha_3 = s_4^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3$$

verbunden«.

Zum Schlusse sei mir die Bemerkung gestattet, dass die analogen Betrachtungen im Raume auf interessante Strahlencomplexe, Congruenzen und Regelflächen führen. Die diessbezüglichen Untersuchungen, welche sich mitunter sehr verwickelt und schwierig gestalten, beabsichtige ich zum Gegenstande einer weiteren Abhandlung zu machen.