Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schatten-problem

Dr. **Hugo Buchholz.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1895.)

Das Problem, die Gleichung für die Schattenfigur eines beliebigen dunkeln Körpers, der von einem hellen beleuchtet wird, aufzufinden, ist bereits zu Ende des vorigen Jahrhunderts von Laplace bei Betrachtung der Jupitertrabanten-Verfinsterungen eingehend behandelt worden. Auf Grund der bei dieser Gelegenheit von Laplace vollständig entwickelten Schattenmethode[1] wird es aber nur in seltenen Fällen, durch besondere analytische Kunstgriffe, möglich, specielle Aufgaben zu lösen. Und obendrein können diese Aufgaben, sobald sie nicht mehr einfacher Natur sind, mittelst der Laplace'schen Theorie auch nicht mehr strenge, sondern nur noch unter festgesetzten, bei naturwissenschaftlichen Problemen der Wirklichkeit aber nicht immer entsprechenden Voraussetzungen ausgeführt werden. Es rührt dies daher, dass die Laplace'sche Methode im Allgemeinen die Auflösung einer Gleichung höheren Grades erfordert, und dass man bei ihr auf häufig nicht zu überwindende Eliminationsschwierigkeiten stösst, wofern man nämlich die betreffenden Eliminationen ohne Vernachlässigungen ausführen will.

Für den Astronomen hat der Fall ein besonderes Interesse, dass der leuchtende Körper die Sonne ist, die Laplace in seiner Theorie als Kugel voraussetzt, was bei ihrer minimalen

[1] Cf. Laplace, Mécanique céleste, tome IV, cap. 8.

Ellipticität keinen wesentlichen Fehler zur Folge hat. Unter dieser Voraussetzung hat der grosse französische Theoretiker in dem genannten Capitel der Mécanique céleste die Lösung zweier specieller Aufgaben bereits durchgeführt. Diejenige der Ersteren: die Schattengleichung eines kugelförmigen Planeten — und als solche sind unsere acht grossen Planeten mit Ausnahme von Jupiter und Saturn zu betrachten —, der von einer kugelförmigen Sonne beleuchtet wird, zu finden, ergibt sich nach seiner Methode unmittelbar und strenge. Hingegen gelingt die Aufstellung der Schattengleichung des Jupiter-Ellipsoides nur noch durch jene für Laplace typischen Kunstgriffe und wurde zudem nur durch ganz specielle Voraussetzungen und Vernachlässigungen ermöglicht, die aber für das System: »Sonne—Jupiter« astronomisch genügend streng sind, wie man sich aus der betreffenden Partie der Mécanique céleste überzeugt.

Ganz neue Kunstgriffe hingegen erforderte schon die Behandlung des zweiten Sonderfalles im Planetensystem, die Aufstellung der Schattengleichung des Saturn-Ellipsoides, weil bei diesem Planeten der Äquator eine Neigung von circa 28° gegen die Ekliptik aufweist, während beim Jupiter von Laplace diese Winkelgrösse Null gesetzt werden konnte. Die Folge davon ist die, dass beim Saturn der Elevationswinkel der Sonne über der Äquatorebene oder Ringebene (die so gut wie zusammenfallen) bedeutende Werthe anzunehmen vermag, z. B. —11°10'1 für 1889 Nov. 1·0. Desshalb konnte man das Saturnellipsoid-Schattenproblem auch nicht unter der speciellen Voraussetzung behandeln, dass die Sonne in die Äquatorebene des Planeten fällt. Diese Voraussetzung macht nämlich Laplace bei Ableitung der Gleichung der Schattenfigur des Jupiter-Ellipsoides astronomisch genügend strenge und erleichtert sich dadurch den Gang der Rechnung. Und obendrein muss man beim Saturn in Folge seiner starken Äquatorneigung von einer ganz anderen Form der Oberflächengleichung ausgehen, als sie Laplace dem Jupiter-Ellipsoid zu Grunde legen konnte, indem man der genannten Neigung in der Saturnoberflächengleichung Rechnung trägt. Das verursacht aber, wie man sich überzeugt, einen völlig anderen Verlauf der Rechnung, bei der man dann von den Laplace'schen Kunstgriffen in keiner Weise mehr Gebrauch machen kann. Vielmehr entsteht analytisch ein ganz neues Problem. Dieses zweite Problem ist von Prof. Seeliger gelöst worden in der dieser Frage gewidmeten Abhandlung: »Über den Schatten eines Planeten«.[1] Auf den Gang dieser Lösung gehen wir hier indess gleichfalls nicht ein, sondern verweisen auf die betreffende Abhandlung.

Gemeinsam beiden Lösungen ist das eine: wiewohl sie ziemlich bedeutende Schwierigkeiten durch analytische Kunstgriffe überwinden, so sind sie doch nur »astronomisch« genügend genau, hingegen keine mathematisch strengen und allgemeinen Lösungen, was jedoch, wie wir sehen werden, durch die Laplace'sche Methode als solche bedingt ist und an den beiden Lösungen selbst nicht liegt. Man wird überhaupt soweit gehen müssen, zu sagen, dass es, in Folge der eintretenden Eliminationsschwierigkeiten, praktisch kaum durchführbar ist, eine allgemeine und strenge Lösung dieser zwei Probleme nach der Laplace'schen Schattentheorie wirklich aufzufinden.

Bei Anlass schliesslich des von mir behandelten Phänomens der »Iapetosverfinsterung vom Jahre 1889 durch Saturn und sein Ringsystem«[2] machte sich das Bedürfniss geltend, die Gleichung der Schattenfigur des Saturnringes — des letzten Sonderfalles im Planetensystem — zu kennen. Glücklicherweise gestatteten auch hier die speciellen, für das System »Sonne—Saturn« geltenden Verhältnisse die Lösung des Saturnring-Schattenproblems nach der Laplace'schen Methode unter Anwendung von Kunstgriffen astronomisch genügend strenge zu geben. Das war aber in gewissem Sinne eben wieder nur ein glücklicher, durch die beim System »Sonne—Saturn« geltenden Verhältnisse bedingter Zufall. Für die allgemeine und strenge Lösung versagt indess auch hier die Laplace'sche Methode, wie wir an diesem Beispiel ausführlich nachweisen wollen, während die beiden anderen erwähnten Probleme zu noch grösseren Complicationen führen als das letztgenannte.

---

[1] Cf. Seeliger, Aus den Sitzungsberichten der mathem.-physik. Classe der k. bayer. Akad. der Wissensch., 1894, Bd. XXIV, Heft IV

Cf. Astr. Nachr., Bd. 137, Nr. 3280.

Schon bei diesen astronomischen Näherungsuntersuchungen — wenn ich mich so ausdrücken darf — über die Schattengleichung des Saturnringes lag nun aber der Gedanke nahe, die Anwendbarkeit eines vom Laplace'schen total verschiedenen Lösungsweges zur Behandlung von Schattenaufgaben zu prüfen, der im Princip zwar noch complicirter und weitläufiger ist als jener, der aber, wie sich bald ergab, doch wenigstens das für sich hat, dass er stets zu einem positiven Resultate führen muss in jedem beliebigen Falle. Doch erwies sich damals für die Prüfung der Barnard'schen Beobachtungen — die sich auf die genannte Iapetusverfinsterung beziehen — die Behandlung des Saturnring-Schattenproblems auf diesem viel verwickelteren strengen Wege schliesslich nicht als nöthig. In der folgenden Abhandlung aber soll dieser Gedanke wieder aufgenommen, und vom Beispiele des Schattenproblems eines von der kugelförmigen Sonne beleuchteten Kreises — als welchen man, wie in der letztcitirten Abhandlung gezeigt, den Ring des Saturn betrachten durfte — ausgehend, nachgewiesen werden, dass die Laplace'sche Methode bei allgemeiner und strenger Behandlung dieser Aufgabe wirklich versagt; um sodann die schon angedeutete, von dem genialen englischen Geometer George Salmon stammende, in der modernen Geometrie basirende Methode[1] zur Lösung von Schattenproblemen zunächst in einem anderen Zusammenhang noch einmal ausführlich abzuleiten — die Salmon'sche Ableitung ist sehr kurz und bei Behandlung anderer geometrischer Fragen gegeben — und hierauf zur strengen Lösung des Saturnringschattenproblems wirklich zu verwenden. Dabei sei jedoch gleich an dieser Stelle bemerkt, dass die thatsächliche Aufstellung dieser strengen Lösung eines bestimmten Schattenproblems — der erste, so viel mir bekannt, wirklich durchgeführte Versuch — lediglich seines theoretischen Interesses halber im Folgenden ausgeführt wird, weil er einen Einblick in die eigenthümlich complicirte Natur der strengen Lösung als solcher gestattet,

---

Cf. Salmon, Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und der Theorie der Flächen zweiten Grades. Theil I, S. 87 und 88; ferner Theil II, Zusätze VI, §§. 12 und 15 (deutsch von Fiedler; Zusätze VI, §§. 12 und 15 bloss in Fiedler's Übersetzung, nicht im Original).

während auf die praktische Verwerthbarkeit des aufgefundenen Resultates im astronomisch-rechnerischen Sinne — eine Anforderung, welcher die in meiner früheren Abhandlung abgeleitete Saturnring-Schattengleichung genügte — hier gar kein Werth gelegt wird, ja die sogar, wie wir sehen werden, durch die Natur der strengen Lösung überhaupt ausgeschlossen ist. Wohl aber dürfte man nach den folgenden Ausführungen im Stande sein, von vornherein ganz allgemein zu entscheiden, ob es noch einen praktischen Werth und eine Aussicht auf Erfolg hat, sich auf die Behandlung eines Schattenproblems, sei dasselbe nun durch die reine Mathematik oder durch die theoretische Physik gegeben, einzulassen oder nicht, und wie man dann ersterenfalls zu verfahren hat, Vorschriften, die am Schluss der Abhandlung zusammengestellt werden sollen.

Die Laplace'sche Theorie, deren Leistungsfähigkeit zunächst geprüft werden soll, referiren wir hier natürlich nicht, sondern verweisen auf die citirte Partie der Mécanique céleste. Vielmehr wenden wir diese Methode, mittelst deren also unter den beim System »Sonne—Saturn« bestehenden speciellen Verhältnissen die Saturnring-Schattengleichung sich wirklich ableiten liess — es ergab sich die merkwürdige Form:

$$\left(x-\frac{A}{C}z\right)^2+y^2-r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2=$$

$$=\pm 2\lambda z\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2\left[r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2-y^2\right]+r^2\left(\frac{C-z}{C}\right)^2}$$

wobei das positive Zeichen dem Kern-, das negative dem Halbschatten entspricht — des theoretischen Interesses halber auf die Gleichung eines Kreises nun noch einmal allgemein und strenge an, wodurch der analytische Verlauf der Rechnung, der bei der Laplace'schen Methode allein entscheidet, sich von jenem früheren total verschieden gestaltet.

Zunächst definiren wir das Problem analytisch, damit die Laplace'sche Methode überhaupt darauf anwendbar wird. Denn Laplace hat das allgemeine Schattenproblem nur für den Fall zweier Oberflächen, nicht aber für den einer Oberfläche und einer Linie behandelt, für welchen die

Grundgleichungen in etwas anderer Form erscheinen und etwas anders abgeleitet werden müssen. Es geht ja Laplace bei seiner allgemeinen Untersuchung aus von der Tangentialebenengleichung:

$$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{y}' + b\mathfrak{z}' + c. \tag{1}$$

Damit nun diese die Kreislinie berühre, müssen offenbar zwei Gleichungen vorliegen:

$$\mu_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = 0 \tag{2}$$

$$\mu_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = 0, \tag{3}$$

indem der Kreis aus dem Schnitt der zwei Flächen, welche letztere Gleichungen repräsentiren, entstanden gedacht werden kann. Differentiiren wir jetzt im Sinne der Laplace'schen Methode diese drei Relationen (1), (2), (3), so erhält man folgendes System:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x}' &= a d\mathfrak{y}' + b d\mathfrak{z}' \\ 0 &= \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} d\mathfrak{x}' + \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} d\mathfrak{y}' + \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' \\ 0 &= \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'} d\mathfrak{x}' + \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'} d\mathfrak{y}' + \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' \end{aligned}$$

Durch Elimination von $d\mathfrak{x}'$, $d\mathfrak{y}'$, $d\mathfrak{z}'$ aus letzteren drei Gleichungen ergibt sich dann die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & a & b \\ \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} & \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} & \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'} \\ \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'} & \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'} & \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

die in Gleichungsform geschrieben so lautet:

$$\left.\begin{aligned} &-1\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'}\,\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'}\,\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'}\right) + \\ &+a\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{z}'}\,\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'}\,\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{z}'}\right) + \\ &+b\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'}\,\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{y}'} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\mathfrak{x}'}\right) \end{aligned}\right\} = 0. \tag{5}$$

Aus den vier Gleichungen (1), (2), (3), (5) hätte man jetzt $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ zu eliminiren, um die Laplace'sche Methode allgemein anwenden zu können. Was man durch diese Elimination erhielte, wäre die Bedingung, der die a, b, c genügen müssen, damit die durch Gleichung (1) repräsentirte Ebene den Kreis berühre.

Um diese Rechnung ausführen zu können, fassen wir unseren bestimmten Fall ins Auge. Da wir denselben aber allgemein behandeln wollen, dürfen wir jetzt nicht mehr von der speciellen Form der Kreisgleichung:

$$\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{y}'^2 = r'^2$$

ausgehen, weil diese nur eine ganz specielle Lage des Kreises zur leuchtenden Kugel charakterisirt, die nämlich, wo die Verbindungslinie d des Kugelcentrums mit demjenigen des Kreises senkrecht auf der Ebene des letzteren steht, und wobei die vom Kreiscentrum als Ursprung ausgehende $\mathfrak{x}'$-Axe mit dieser Linie d zusammenfällt. Die Gleichung der Kugel würde dann:

$$(\mathfrak{x}-d)^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2 = r^2$$

und diejenige der Ebene:

$$\mathfrak{x}' = 0.$$

Ginge ferner die Ebene des Kreises zufällig durch den Kugelmittelpunkt, so hätte man an Stelle der einen Gleichung:

$$\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{y}'^2 = r'^2$$

auszugehen von den zwei folgenden:

$$(\mathfrak{x}'-d)^2+\mathfrak{y}'^2 = r'^2$$
$$\mathfrak{x}'-d = a\mathfrak{y}'+c-d.$$

Wir wollen jedoch das Beleuchtungsproblem wie gesagt hier allgemein charakterisiren und haben daher von der folgenden Form der Kreisgleichung auszugehen:

$$(\mathfrak{x}'-A)^2+(\mathfrak{y}'-B)^2 = r'^2. \tag{6}$$

Der Oberflächengleichung der Kugel indess können wir die etwas speciellere Form zu Grunde legen:

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-\mathfrak{k})^2 = r^2, \tag{7}$$

indem wir von ihrem Mittelpunkt ein Loth auf die Ebene des Kreises fällen und den Fusspunkt dieses Lothes als Ursprung zu Grunde legen, was die folgende Rechnung etwas vereinfacht, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun.

Verstehen wir jetzt unter der Gleichung:

$$\mu_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}') = 0$$

die Ebene des Kreises, und diese fällt mit der Coordinatenebene $\mathfrak{z}' = 0$ zusammen, so geht die Gleichung (5) über in:

$$-1\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} - a\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} = 0. \tag{8}$$

Die Relation

$$\mu_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = 0$$

repräsentirt die allgemeine Gleichung (6) unseres Kreises. Als dritte Bedingung tritt im Sinne der Laplace'schen Theorie noch hinzu:

$$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{y}'+c. \tag{9}$$

Mithin haben wir das Problem jetzt vollständig analytisch präcisirt. Man hat zunächst die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-\mathfrak{k})^2 = r^2 \tag{10}$$

$$\mathfrak{x} = a\mathfrak{y}+b\mathfrak{z}+c. \tag{11}$$

Aus ihnen folgt die eine nöthige Relation der Laplace'schen Theorie in a, b, c. Die zweite, hier nur in a und c, ergibt sich aus den drei anderen Gleichungen:

$$\mu_1 = (\mathfrak{x}'-A)^2+(\mathfrak{y}'-B)^2-r'^2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{y}'} + a\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathfrak{x}'} = 0 \tag{8}$$

$$\mathfrak{x}' = a\mathfrak{y}'+c, \tag{12}$$

indem man aus diesen drei Relationen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ eliminirt. Aus den sich in dieser Weise ergebenden zwei Gleichungen folgen dann b und c als Functionen von a und somit auch:

$$\frac{db}{da} \quad \text{und} \quad \frac{dc}{da}.$$

Hierauf wäre a selbst nach Laplace aus der Relation.

$$0 = y + z\frac{db}{da} + \frac{dc}{da} \tag{13}$$

zu finden und durch Einsetzen der sich so für a, b, c ergebenden Werthe, die ausgedrückt erscheinen als Functionen sämmtlicher Constanten des Problems, in die allgemeine Gleichung:

$$x = ay + bz + c \tag{14}$$

erhielte man nach Laplace die gesuchte Gleichung der Schattenfläche eines von einer hellen Kugel beleuchteten dunkeln Kreises.

Nach dem Gesagten scheint es, als müsse die angedeutete Rechnung in einfachster Weise zum Ziele führen. Nur zu bald werden wir uns aber vom Gegentheil überzeugt sehen, was eben in der dies Beispiel ebensogut wie die meisten anderen betreffenden Unmöglichkeit begründet liegt, gewisse Eliminationen auszuführen.

Aus Gleichung (10) folgt nach der allgemeinen Theorie:

$$\mathfrak{y} + a\mathfrak{x} = 0$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{f} + b\mathfrak{x} = 0,$$

woraus

$$\mathfrak{y}^2 = a^2\mathfrak{x}^2$$

$$(\mathfrak{z} - \mathfrak{f})^2 = b^2\mathfrak{x}^2.$$

Ferner

$$a\mathfrak{y} = -a^2\mathfrak{x}$$

$$b\mathfrak{z} = b\mathfrak{f} - b^2\mathfrak{x}.$$

Die Gleichung (10) wird daher:

$$\mathfrak{x}^2 . [1 + a^2 + b^2] = r^2. \tag{15}$$

Die Relation (11) geht über in:

$$\mathfrak{x}^2 . [1+a^2+b^2]^2 = (c+b\mathfrak{f})^2. \tag{16}$$

Also liefern (15) und (16) zusammen:

$$(c+b\mathfrak{f})^2 = r^2(1+a^2+b^2),$$

d. i. die erste gesuchte Relation in a, b, c. Die zweite, in a und c, ergibt sich aus den Gleichungen: (6), (8), (12). Durch Differentation folgt aus denselben:

$$(\mathfrak{y}'-B)^2 = a^2(\mathfrak{x}'-A)^2$$
$$a\mathfrak{y}' = aB.$$

Demnach wird Gleichung (6):

$$(\mathfrak{x}'-A)^2 . [1+a^2] = r'^2. \tag{17}$$

Gleichung (12) geht über in:

$$(\mathfrak{x}'-A)^2 . [1+a^2]^2 = (c+aB-A). \tag{18}$$

Mithin die genannte Bedingung:

$$(c+aB-A)^2 = r'^2(1+a^2).$$

Aus den so gewonnenen zwei Gleichungen:

$$(c+b\mathfrak{f})^2 = r^2(1+a^2+b^2)$$
$$(c+aB-A)^2 = r'^2(1+a^2)$$

bestimmen wir zunächst b und c als Functionen von a. Für c folgt sofort:

$$c = r'\sqrt{1+a^2}-aB+A. \tag{19}$$

Der Coëfficient b hingegen ergibt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$b^2 - \frac{2c\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2} \cdot b - \frac{c^2-r^2(1+a^2)}{r^2-\mathfrak{f}^2} = 0.$$

Substituiren wir für c gleich seinen Werth, so erhält b die folgende Form:

$$b=\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2}\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)^2.\mathfrak{f}^2}{(r^2-\mathfrak{f}^2)^2}+\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)^2-r^2(1+a^2)}{r^2-\mathfrak{f}^2}} \qquad (20)$$

und von dieser Form geht man bei der folgenden Differentation, wie leicht ersichtlich, besser aus, als z. B. von der Form eines Productes, als welches man b auch schreiben könnte.

Nun sind also, entsprechend der Laplace'schen Theorie, die Differentialquotienten von b und c nach a zu bilden. Für c folgt wieder sofort:

$$\frac{dc}{da}=\frac{r'a}{\sqrt{1+a^2}}-B. \qquad (21)$$

Der Differentialquotient von b hingegen ergibt sich erst nach längerer Rechnung. Wenn man zur Abkürzung für die bei dieser Rechnung auftretenden Constanten die folgenden Werthe einführt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +r^2[(r'^2-r^2)+(\mathfrak{f}^2+B^2)]\\
\lambda_2 &= -r^2AB\\
\lambda_3 &= -2r^2r'B\\
\lambda_4 &= +2r^2r'A\\
\lambda_5 &= -2r^2r'
\end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= -r^2r'B\\
\nu_2 &= +r^2r'A\\
\nu_3 &= +r^2(r'^2-r^2)+\mathfrak{f}^2(r^2+B^2)\\
\nu_4 &= -2r^2AB\\
\nu_5 &= +\mathfrak{f}^2(2r'^2-r^2)-r^2(r'^2-r^2)
\end{aligned}$$

nimmt dieser Differentialquotient die folgende Form an:

$$\frac{db}{da}=\frac{\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2}\left[\frac{ar'}{\sqrt{1+a^2}}-B\right]+$$

$$+\frac{\lambda_1 a\sqrt{1+a^2}+\lambda_2\sqrt{1+a^2}+\lambda_3 a^2+\lambda_4 a+\lambda_5}{(r^2-\mathfrak{f}^2)\sqrt{1+a^2}\sqrt{\nu_1 a\sqrt{1+a^2}+\nu_2\sqrt{1+a^2}+\nu_3 a^2+\nu_4 a+\nu_5}} \qquad (22)$$

Soweit ist bei den gemachten allgemeinen Annahmen der analytische Verlauf der Rechnung durch die Laplace'sche Methode unabänderlich festgelegt, und man kann hier durch keinerlei Kunstgriffe auf eine einfachere Gleichungsform als die folgende kommen. Die nach Laplace's directer Vorschrift bezüglich a aufzulösende Gleichung (14) der allgemeinen Theorie wird nämlich im jetzigen speciellen Falle:

$$0 = y + z\left[\frac{ar'}{1+a^2} - B\right]\frac{\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2} + \\ + z\frac{\lambda_1 a\sqrt{1+a^2}+\lambda_2\sqrt{1+a^2}+\lambda_3 a^2+\lambda_4 a+\lambda_5}{(r^2-\mathfrak{f}^2)\sqrt{1+a^2}\sqrt{\nu_1 a\sqrt{1+a^2}+\nu_2\sqrt{1+a^2}+\nu_3 a^2+\nu_4 a+\nu_5}} + \\ + \frac{r'a}{\sqrt{1+a^2}} - B \tag{23}$$

d. i. eine Relation in x, y, z, a und den Constanten des Problems $r, r', A, B, \mathfrak{f}$.

Eine Auflösung dieser Gleichung nach a überhaupt, geschweige denn eine lineare, wie sie Laplace allgemein fordert, um den so gefundenen a-Werth dann in Gleichung (14) einsetzen zu können, ist nun aber eben praktisch gar nicht ausführbar, wie man sich überzeugt. Die Elimination hingegen von a aus den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= ay + \frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)\,\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2}\cdot z \pm \\ &\pm\sqrt{\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+A)^2.\mathfrak{f}^2}{(r^2-\mathfrak{f}^2)^2}+\frac{(r'\sqrt{1+a^2}-aB+a)^2-r^2\sqrt{1+a^2}}{r^2-\mathfrak{f}^2}+} \\ &\qquad + r'\sqrt{1+a^2}-aB+A \\ 0 &= y + z\left[\frac{ar'}{1+a^2}-B\right]\frac{\mathfrak{f}}{r^2-\mathfrak{f}^2} + \\ &+ z\frac{\lambda_1 a\sqrt{1+a^2}+\lambda_2\sqrt{1+a^2}+\lambda_3 a^2+\lambda_4 a+\lambda_5}{(r^2-\mathfrak{f}^2)\sqrt{1+a^2}\sqrt{\nu_1 a\sqrt{1+a^2}+\nu_2\sqrt{1+a^2}+\nu_3 a^2+\nu_4 a+\nu_5}} + \\ &\qquad + \frac{r'a}{\sqrt{1+a^2}} - B \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

die zusammen, wie man sagen könnte, die Schattenfläche, gegeben durch den Parameter a, repräsentiren, führt, wenn sie principiell betrachtet natürlich auch immer möglich ist, praktisch doch zu so enormen Weitläufigkeiten, dass man von diesem zweiten, fast ebenso aussichtslosen Weg gleichfalls absehen muss. Auch nicht wesentlich verringert wären diese Complicationen worden, wenn man die ursprüngliche Gleichung (6) wie folgt angesetzt hätte:

$$(\mathfrak{x}'-A)^2+\mathfrak{y}'^2 = r'^2,$$

indem man das Coordinatensystem noch um die $\mathfrak{z}'$-Axe so gedreht hätte, dass die $\mathfrak{x}'$-Axe durch den Mittelpunkt des Kreises ginge, was auch noch, unbeschadet der Allgemeinheit der Aufgabe, möglich gewesen wäre. Denn auch, wenn B in Gleichung (23) und im System (24) Null wird, ist die Auflösung, respective bei (24) die Elimination, doch nicht wesentlich leichter.

Die Laplace'sche Methode versagt also, wie dies eine Beispiel zeigt — und auf die Betrachtung weiterer Beispiele gehen wir hier nicht ein — bei der strengen Behandlungsweise schon verhältnissmässig einfacher Probleme in gewissem Sinne buchstäblich. Ein umso unleugbareres Interesse würde, angesichts dieses negativen Resultates, ein Weg besitzen, mittelst dessen man factisch im Stande wäre, diese nach der Laplace'schen Methode nicht zu findende strenge Gleichung der Schattenfigur des von einer Kugel beleuchteten Kreises — und ebenso in anderen Fällen die Gleichungen beliebiger anderer Schattenfiguren — aufzufinden, d. h. in Form einer einzigen Gleichung thatsächlich hinzuschreiben. Wie schon angedeutet, existirt aber in der That ein solcher Weg. Derselbe wurde in unserem Jahrhundert von dem Engländer George Salmon gefunden, ohne dass jedoch von ihm seine praktische Verwerthbarkeit geprüft worden wäre, und wir wollen unser eben behandeltes Problem an der Hand dieser allgemeinen Theorie, die wir noch einmal im Zusammenhang unseres Beispieles neu ableiten wollen, jetzt vollständig lösen.

Bekanntlich ist die Gleichung:

$$ux+vy+wz+1 = 0 \tag{25}$$

diejenige einer Ebene, welche nicht durch den Ursprung geht, da in ihm u, v, w unendlich werden. Und da die drei Grössen u, v, w diese Ebene bestimmen, so bezeichnet man sie als Coordinaten derselben, als »Ebenencoordinaten« im Gegensatz zu »Punktcoordinaten«. Offenbar gibt nun eine Gleichung in u, v, w:

$$F(u, v, w) = 0 \tag{26}$$

eine zwiefach unendliche Mannigfaltigkeit von Ebenen an, indem man ja v und w z. B. beliebig annehmen und u daraus bestimmen kann. Allgemein ist jetzt die Bedingung aufstellbar, dass eine solche Ebene eine Fläche berührt, z. B. Tangentialebene an eine Kugel ist. Die Gesammtheit aller Ebenen, welche diese Kugel berühren, ist dann in der Gleichung der Kugel in Ebenencoordinaten enthalten.

Ferner kann man aber auch die weitere Bedingung aufstellen:

$$G(u, v, w) = 0, \tag{27}$$

die besagt, dass unsere Ebene eine andere Fläche, etwa zunächst auch wieder eine Kugel, berührt. Die Relationen (26) und (27) zusammengenommen geben dann alle Ebenen, welche die beiden Kugeln gleichzeitig berühren, und dieselben bilden wieder eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, weil man w etwa beliebig annehmen und dann u und v aus (26) und (27) bestimmen kann. Das dualistische Gegenstück hiezu ist, dass die Gleichungen zweier Flächen in Punktcoordinaten gegeben sind:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{28}$$

$$\Gamma(x, y, z) = 0, \tag{29}$$

welche zusammen die Schnittcurve der zwei Flächen im Raume, d. h. eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten definiren, die diese Curve bilden, und dieselbe entspricht im ersten Problem jener einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Ebenen, welche die beiden Flächen gleichzeitig berühren.

Es kann aber auch zweitens die Relation:

$$G(u, v, w) = 0 \tag{27}$$

die Gleichung einer Curve darstellen, indem sie die Bedingung dafür ist, dass die Ebene:

$$ux+vy+wz+1=0$$

diese Curve berührt. Die Gleichung (27) repräsentirt dann eine zweifach unendliche Ebenenschaar. In diesem Falle umfassen die Gleichungen (26) und (27) zusammen die Gesammtheit aller der Ebenen, welche die Fläche und die Curve — in unserem zu lösenden Schattenproblem die Kugel und den Kreis — gleichzeitig berühren. Das dualistische Gegenstück zu diesem zweiten, für uns wesentlichen Fall, dass:

$$G(u, v, w)=0$$

eine Curve, die wir dann als Kreis betrachten werden, darstellt, ist, dass die Relation:

$$\Gamma(x, y, z)=0 \tag{29}$$

eine abwickelbare Fläche definirt, bei der bekanntlich jede Tangentialebene längs einer ganzen Geraden berührt; speciell würde eine Kegelfläche zweiter Ordnung dem Fall entsprechen, dass die Relation:

$$G(u, v, w)=0$$

einen Kegelschnitt darstellt. Ein solcher wird also, ähnlich wie eine Kegelfläche in xyz, so analog in u, v, w durch eine quadratische Gleichung dargestellt. Bekanntlich ist nun

$$A_{11}u^2+2A_{12}uv+2A_{13}uw+2A_{14}u+A_{22}v_2+$$
$$+2A_{23}vw+2A_{24}v+A_{33}w^2+2A_{34}w+A_{44}=0$$

die allgemeine Gleichung zweiten Grades in u, v, w. Dieselbe entspricht also der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, und das durch sie dargestellte Gebilde heisst eine Fläche zweiter Classe. Die Bedingung dafür, dass speciell letztere Gleichung in u, v, w einen Kegelschnitt repräsentire, ist das Verschwinden der folgenden, aus ihren Coëfficienten gebildeten Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \\ A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \\ A_{31} A_{32} A_{33} A_{34} \\ A_{41} A_{42} A_{43} A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei allgemein:

$$A_{i\varkappa} = A_{i\varkappa}$$

ist. Dem entspricht dualistisch, dass die Gleichung

$$A_{11}x^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{14}x+A_{22}y^2+$$
$$+2A_{23}yz+2A_{24}y+A_{33}z^2+2A_{34}z+A_{44}=0$$

eine Curve zweiter Ordnung repräsentirt, speciell eine Kegelfläche, wenn die genannte Determinante verschwindet.

In unserem Schattenproblem, wo

$$F(u, v, w) = 0$$

die Gleichung einer Kugel in Ebenencoordinaten,

$$G(u, v, w) = 0$$

diejenige eines Kreises in denselben Coordinaten bedeutet, müsste also letztere Determinante Null sein, damit

$$G(u, v, w) = 0$$

einen Kegelschnitt darstellt. Wir haben somit die Gleichung einer Kugelfläche mit derjenigen eines Kreises, beide in u, v, w gleichzeitig zusammenbestehen zu lassen, oder dualistisch: wir haben die Gleichung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung und speciell die Gleichung einer Kegelfläche zweiter Ordnung zusammenbestehen zu lassen, um den Schnitt, d. h. die Durchdringungscurve des Kegels mit der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung zu bekommen. Das Zusammenbestehen der beiden Relationen:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

gibt somit die Schattenfläche.

Allein wir wollen diese Gleichung nicht in u, v, w, d. h. nicht in Ebenencoordinaten, sondern vielmehr in Punktcoordinaten x, y, z haben. Das entspricht dualistisch dem Fall, dass wir die Gleichung der Durchdringungscurve nicht in x, y, sondern in u, v, w haben wollen. Mit anderen Worten: wir haben die Gleichung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung und einer Kegelfläche zweiter Ordnung, die sich durchdringen. Durch die Gleichungen:

$$\Phi(x, y, z) = 0$$
$$\Gamma(x, y, z) = 0$$

ist dann diejenige der Durchdringungscurve gegeben. Allein wir wollen diese Gleichung nicht in x, y, z, sondern in u, v, w haben, d. h. wir wollen die Bedingung dafür aufstellen, dass eine Ebene diese Durchdringungscurve berührt.

In unserem Schattenproblem müssen wir dazu die Bedingung so formuliren, dass ein Punkt x, y, z angehört der Schattenfläche, was dualistisch dem Fall entspricht, dass eine Ebene u, v, w die Durchdringungscurve berührt. Hat man also die zwei Gleichungen:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0,$$

so muss, falls ein Punkt auf den durch diese beiden Gleichungen repräsentirten Flächen zugleich liegen soll, die Gleichung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

bestehen. Das Zusammenbestehen der drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F(u, v, w) &= 0 \\ G(u, v, w) &= 0 \\ ux + vy + wz + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

bedeutet mithin, dass der Punkt x, y, z auf einer Ebene liegt, welche die beiden Flächen F und G gleichzeitig berührt.

Nehmen wir nun eine andere Ebene an, welche die beiden gegebenen Flächen F und G auch berührt, so ist dieselbe gleichfalls eine Tangentialebene an die Schattenfläche und beide Tangentialebenen schneiden sich offenbar in einer Kante. Denkt man sich nun die erste Tangentialebene festgehalten und die zweite so bewegt, dass sie nach und nach zur Deckung mit der ersteren gelangt, so bewegt sich die Schnittkante auf der festen Tangentialebene entlang, der Schattenfläche entgegen und fällt beim Grenzübergang in dieselbe hinein. Sie bildet dann also die Berührungslinie, längs welcher die Tangentialebene die Schattenfläche berührt. Auf dieser Linie nun muss der Punkt xyz liegen, wenn er der Schattenfläche angehören soll. Bedeuten:

$$u, v, w$$

die Coordinaten der ersten,

$$u+du, \quad v+dv, \quad w+dw$$

diejenigen der zweiten Tangentialebene, so müssen also auch die folgenden drei Gleichungen bestehen, wenn der Punkt x, y, z der Schattenfläche angehören soll:

$$\left.\begin{aligned} F(u+du,\ v+dv,\ w+dw) &= 0 \\ G(u+du,\ v+dv,\ w+dw) &= 0 \\ (u+du)x+(v+dv)y+(w+dw)z+1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Das gemeinsame Bestehen der beiden Gleichungssysteme (I) und (II) zusammen ist demnach erforderlich, wenn der Punkt $x, y,$ der Schattenfläche angehören soll. Aus ihnen wären jetzt:

$$u, \quad v, \quad w, \quad du, \quad dv, \quad dw$$

zu eliminiren. Da man indess durch Subtraction:

$$F(u+du,\ v+dv,\ w+dw)-F(u, v, w) = 0$$

oder

$$dF(u, v, w) = 0$$

erhält, so kann man das System II auch ersetzen durch das folgende:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{dv}\partial v+\frac{\partial F}{\partial w}dw=0\\ \frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv+\frac{\partial G}{\partial w}dw=0\\ xdu+ydv+zdw=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$

so dass also auch die beiden Systeme (I) und (III) zusammengenommen unsere sechs Bedingungen umfassen, aus denen

$$u,\ v,\ w,\ du,\ dv,\ dw$$

zu eliminiren sind. Dabei kann man, um das zu bemerken, in (III) *du*, *dv*, *dw* alle in demselben Verhältniss vergrössern oder verkleinern, ohne dass dadurch etwas geändert würde. Da also in (III) bloss die Verhältnisse von *du*, *dv*, *dw* in Betracht kommen, so kommt es überhaupt nur auf diese an. Durch Elimination von *du*, *dv*, *dw* aus (III) folgt:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial w}\\ x & y & \end{vmatrix}=0$$

oder

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial G}{\partial v}\right)+y\left(\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial w}\right)+$$
$$+z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0$$

Man hat somit folgendes Hauptsystem:

$$\left.\begin{aligned}x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial G}{\partial v}\right)+\\ +y\left(\frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial w}\right)+\\ +z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0\\ F(u,v,w)=0\\ G(u,v,w)=0\\ ux+vy+wz+1=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IV)}$$

Aus diesen vier Grundgleichungen dieser allgemeinen Theorie hätte man u, v, w zu eliminiren, um die Schattengleichung einer beliebigen Figur G, die durch eine andere Figur F beleuchtet wird, zu erhalten. Ehe wir uns aber mit dieser Elimination beschäftigen, wollen wir unser nach der Laplace'schen Methode behandeltes Beispiel der Saturnring-Schattengleichung gleich analytisch neu präcisiren, um seine Behandlung in Ebenencoordinaten nach Salmon's Theorie zu ermöglichen.

In unserem Schattenbeispiel sind ja

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

die Gleichungen einer Kugel und eines Kreises, also vom zweiten Grad, und wir wollen dieselben, um der rechnerischen Behandlung des Folgenden willen in Form von ganzen rationalen Functionen zweiten Grades schreiben. Dann sind die partiellen Differentialquotienten offenbar Functionen ersten Grades und folglich die erste Gleichung unseres Hauptsystems (IV) vom zweiten Grad. Wir haben dann also drei Gleichungen zweiten Grades und eine Gleichung ersten Grades in u, v, w. Aus den drei ersten folgen u, v, w als bekannte Functionen und durch Einsetzen derselben in die vierte ergibt sich die gesuchte Schattengleichung. Die Elimination wird später ausgeführt werden.

Zunächst sind im Sinne der allgemeinen Theorie für $F = 0$ und $G = 0$ in (IV) die Gleichungen von Kugel und Kreis in Ebenencoordinaten einzuführen. Bedeuten r, s, t die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel, R ihren Radius, so lautet die erstere Gleichung bekanntlich:

$$\frac{ru + sv + tw + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = R.$$

Das Coordinatensystem ist nun aber völlig willkürlich. Wir können daher, ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu beschränken, über seine Lage die Annahme machen, dass die xz-Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht. In diesem Fall wird die Kugelgleichung etwas einfacher:

$$\frac{ru + tw + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = R$$

oder als ganze rationale Function geschrieben:

$$(ru + tw + 1)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Die Gleichung des Kreises leiten wir für unseren Fall gleichfalls unter solchen Annahmen über die Lage des Coordinatensystems ab, welche die spätere rechnerische Behandlung der Kreisgleichung in unserem Problem überhaupt erst ermöglichen. Wir nehmen nämlich an, dass die Ebene des Kreises die xy-Ebene sei und dass der Coordinatenursprung mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfalle. Ohne diese scheinbar unbedeutenden Annahmen würde, wie noch ersichtlich werden wird, die spätere Rechnung im wörtlichen Sinne um viele tausendmal umfangreicher werden. Die Gleichung der Kreisebene E lautet jetzt:

$$z = 0.$$

Denken wir uns ferner die Gleichung des Kreises, die als Gleichung zweiten Grades in x und y die allgemeine Form hat:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

so können wir diese Relation offenbar auch als die Gleichung eines Kreiscylinders betrachten, dessen Axe senkrecht zur xy-Ebene steht und als dessen Schnitt mit der Kreisebene $z = 0$ dann unser Kreis erscheint.

Nun haben wir die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

den Kreis berühre. An Stelle der zwei Gleichungen der allgemeinen Theorie:

$$\Phi(x, y, z) = 0$$
$$\Gamma(x, y, z) = 0$$

treten jetzt offenbar diejenigen des Cylinders und der Kreisebene, und unser früher allgemein charakterisirtes Problem specialisirt sich jetzt dahin, dass die Gleichung der Durchdringungscurve von zwei Flächen, der Kreisebene und des Cylinders in Ebenencoordinaten zu suchen ist.

Das dualistische Gegenstück hiezu haben wir früher gleichfalls schon allgemein behandelt. Für den jetzigen Fall können wir das Resultat direct hinschreiben, wenn wir nur im Gleichungssystem (IV) bezüglich x mit u, y mit v und z mit w vertauschen und für $F = 0$ und $G = 0$ die Gleichungen der Ebene E und des Cylinders φ setzen. So erhalten wir folgendes allgemeine Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\partial E}{\partial y}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial E}{\partial z}\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)&+\\ +v\left(\frac{\partial E}{\partial z}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)&+\\ +w\left(\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)&=0\\ E=z&=0\\ \varphi(x,y)&=0\\ ux+vy+wz+1&=0 \end{aligned}$$

oder, da φ jetzt z nicht enthält:

$$v\frac{\partial\varphi}{\partial x}-u\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{30}$$

$$z=0 \tag{31}$$

$$\varphi(x,y)=0 \tag{32}$$

$$ux+vy+wz+1=0 \tag{33}$$

Um x, y, z aus letzterem Gleichungssystem zu eliminiren, machen wir dasselbe homogen. Wir setzen dazu:

$$x=\frac{x_1}{x_4}$$

$$y=\frac{x_2}{x_4}$$

Dann wird die Gleichung (32) des Kreises homogen vom zweiten Grad in x_1, x_2, x_4. Die Kreisebenengleichung (31) wird

$x_3 = 0$ $\left(\text{indem } z = \frac{x_3}{x_4}\right)$. Die Gleichung (33) wird homogen vom ersten Grad in x_1, x_2, x_3, x_4. Sei nun die aus Gleichung (32) dadurch entspringende Relation:

$$l(x_1, x_2, x_4) = 0,$$

so lautet die aus (30) hervorgehende Gleichung in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} & \frac{\partial l}{\partial x_2} & 0 \\ u & v & w \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

Hiebei haben wir x_1, x_2 und x_3 als variabel, x_4 als constant betrachtet. Wir können die Veränderung von x, y, z aber auch dadurch bewirken, dass wir x_2, x_3, x_4 sich ändern lassen, dagegen x_1 constant setzen. Dann erhält man folgende Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial l}{\partial x_4} \\ v & w & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Diese zwei Determinantengleichungen sind vom ersten Grad in x_1, x_2, x_4. Aus ihnen können wir also die Verhältnisse von x_1, x_2, x_4 bestimmen und darauf für diese wieder ihre ursprünglichen Werthe:

$$\frac{x_1}{x_4} = x$$

$$\frac{x_2}{x_4} = y$$

einführen. Durch Einsetzen schliesslich der so für x und y gefundenen Werthe in die Relation (33) erhält man eine Gleichung zweiten Grades in u, v, w, die gesuchte Gleichung unseres Kreises in Ebenencoordinaten.

Um diesen allgemeinen Gedankengang rechnerisch durchzuführen, schreiben wir die beiden Determinantengleichungen (34) und (35) wie folgt:

$$v \frac{\partial l}{\partial x_1} - u \frac{\partial l}{\partial x_2} = 0 \tag{36}$$

$$v \frac{\partial l}{\partial x_4} - \frac{\partial l}{\partial x_2} = 0, \tag{37}$$

welche zwei Gleichungen vom ersten Grad sind, da dies der Grad der drei in ihnen auftretenden Differentialquotienten ist.

Für die allgemeine Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

welche ebenso die eines Kreises wie die eines Cylinders repräsentirte, setzen wir jetzt, indem der Ursprung ja im Kreiscentrum liegt:

$$\varphi = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{38}$$

Die Gleichung:

$$l(x_1, x_2, x_4) = 0$$

wird dann:

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_4^2 = 0.$$

Und da:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_2} = 2x_2,$$

so gehen die Gleichungen (36) und (37) über in:

$$vx_1 - ux_2 = 0$$

$$r^2 v x_4 + x_2 = 0.$$

Mit x_4 dividirt, für $\frac{x_1}{x_4}$ und $\frac{x_2}{x_4}$ wieder x und y eingeführt und ausmultiplicirt, folgt:

$$vx - uy = 0$$

$$vr^2 + y = 0$$

woraus:

$$x = -r^2 u$$

$$y = -r^2 v.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (33) folgt als Gleichung unseres Kreises in Ebenencoordinaten in der speciellen Form, wie wir sie im Folgenden brauchen:

$$r^2 u^2 + r^2 v^2 = 1. \tag{39}$$

Mit der allgemeinen höchst verwickelten Form der Kreisgleichung in Ebenencoordinaten hingegen hätte man später, wie ersichtlich werden wird, die rechnerische Behandlung des Problems nicht durchführen können.

Nach dieser speciellen Zwischenbetrachtung wenden wir uns wieder dem allgemeinen Problem zu. Um die Schattengleichung eines von einer Kugel beleuchteten Kreises jetzt wirklich zu bekommen, haben wir im Hauptgleichungssystem (IV) nur an Stelle der zwei allgemeinen Relationen:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

die abgeleiteten Gleichungen von Kugel und Kreis einzuführen. Mithin besteht unser Schattenproblem nunmehr in der Elimination von u, v, w aus nachfolgendem System:

$$\left.\begin{aligned}
x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial G}{\partial v}\right)+\qquad&\\
+y\left(\frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial w}\right)+\qquad&\\
+z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0&\quad(42)\\
(ru+tw+1)^2-R^2(u^2+v^2+w^2)=0&\quad(43)\\
r^2u^2+r^2v^2=1&\quad(44)\\
ux+vy+wz+1=0&\quad(45)
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{V})$$

Um diese Elimination durchzuführen, schlagen wir folgenden Weg ein, im Sinne des Bisherigen das Problem wieder erst allgemein analytisch behandelnd und erst hierauf rechnerisch, für die in Betracht kommenden speciellen Werthe.

Die allgemeine Form der Kreisgleichung:

$$G(u, v, w) = 0$$

multipliciren wir mit einem unbestimmten Factor λ und addiren den so auf der linken Seite erhaltenen Werth zur linken Seite der Kugelgleichung:

$$F(u, v, w) = 0.$$

Die dadurch entstehende Relation:

$$F(u, v, w) + \lambda \; G(u, v, w) = 0 \tag{46}$$

repräsentirt dann die Gleichung einer Fläche, welche einbeschrieben ist unserer Schattenfläche, weil jede Ebene, welche die Kugel und den Kreis gleichzeitig berührt, auch diese Fläche (46) berührt. Unsere Aufgabe ist jetzt, diese Fläche (46) durch eine Gleichung in Punktcoordinaten x, y, z darzustellen, die vom zweiten Grad in x, y, z sein muss. Diese Gleichung wird aber bezüglich λ vom dritten Grad, woraus zu ersehen ist, dass im Allgemeinen einem beliebigen Raumpunkt $x_0 y'_0 z_0$ drei Wurzeln λ entsprechen. Eine jede dieser drei Wurzeln liefert eine von unseren Flächen (46), wenn wir sie in diese Gleichung eingesetzt denken. Es gehen somit von den Flächen, welche durch Gleichung (46) repräsentirt sind, durch jeden Punkt des Raumes im Allgemeinen drei hindurch. Gehört nun aber unser Punkt speciell der Schattenfläche an, so fallen zwei der Wurzeln zusammen, es wird:

$$\lambda_2 = \lambda_3.$$

Die Gleichung der Schattenfläche wird mithin gefunden, indem man die Bedingung dafür aufstellt, dass unsere cubische Gleichung in λ eine Doppelwurzel hat.

Um zunächst die Fläche (46) in Punktcoordinaten darzustellen, ist folgendes Princip anzuwenden. Es sei:

$$\begin{aligned} a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + a_{44} + 2\,a_{14}u + 2\,a_{24}v + \\ + 2\,a_{34}w + 2\,a_{23}vw + 2\,a_{31}wu + 2\,a_{12}uv = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Classe in Ebenencoordinaten. Dann findet man die Gleichung dieser Fläche in Punktcoordinaten in folgender Weise. Man stellt die Determinante auf:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}$$

wobei allgemein:

$$a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$$

ist, und bildet die zu den einzelnen Elementen gehörenden Unterdeterminanten. Sei $A_{i\varkappa}$ diejenige Unterdeterminante, welche zum Element $a_{i\varkappa}$ gehört, so lautet allgemein die Gleichung der Fläche (46) in Punktcoordinaten:

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}+2A_{14}x+2A_{24}y+$$
$$+2A_{34}z+2A_{32}yz+2A_{31}zx+2A_{12}xy = 0, \quad (48)$$

und es ist das eine Fläche zweiter Ordnung. Die a enthalten nun λ in erster Potenz. Und folglich enthalten die A, als Unterdeterminanten der a, λ in dritter Potenz. Ordnen wir nun letztere Gleichung nach Potenzen von λ, so folgt eine cubische Gleichung in λ, die äquivalent ist der Gleichung 46) in Punktcoordinaten. Wir wollen diese cubische Gleichung in der folgenden allgemeinen Form ansetzen:

$$\underset{\sim}{Q}_0\lambda^3+\underset{\sim}{Q}_1\lambda^2+\underset{\sim}{Q}_2\lambda+\underset{\sim}{Q}_3 = 0 \quad (49)$$

und haben dann also die Bedingung dafür aufzustellen, dass diese Gleichung dritten Grades eine Doppelwurzel hat. Dazu muss der Differentialquotient der linken Seite, genommen nach λ, zugleich verschwinden für die Doppelwurzel. Derselbe ist aber:

$$3\underset{\sim}{Q}_0\lambda^2+2\underset{\sim}{Q}_1\lambda+\underset{\sim}{Q}_2 = 0. \quad (50)$$

Diese beiden Gleichungen (49) und (50) muss die Doppelwurzel erfüllen.

An Stelle der ursprünglichen cubischen Gleichung (49) können wir aber mit Vortheil eine quadratische setzen, die wir erhalten, wenn wir die cubische Gleichung (49) mit 3 und die Gleichung (50) mit λ multipliciren und dann die linken Seiten von einander subtrahiren, wodurch das Glied in λ^3 fortfällt. Es folgt so die Gleichung:

$$\underset{\sim}{Q}_1\lambda^2+2\underset{\sim}{Q}_2\lambda+3\underset{\sim}{Q}_3 = 0. \quad (51)$$

Das allgemeine Schattenproblem läuft mithin darauf hinaus, die Resultante der zwei Gleichungen:

$$3\underset{\sim}{Q}_0\lambda^2+2\underset{\sim}{Q}_1\lambda+\underset{\sim}{Q}_2=0 \tag{50}$$

$$\underset{\sim}{Q}_1\lambda^2+2\underset{\sim}{Q}_2\lambda+3\underset{\sim}{Q}_3=0 \tag{51}$$

aufzustellen. Dass aber diese zwei Gleichungen eine Wurzel gemein haben, können wir dadurch bewirken, dass wir sie als lineare Gleichungen in den Unbekannten λ^2 und λ auffassen, sie für diese Unbekannten auflösen und zum Schluss den für λ gefundenen Werth, zum Quadrat erhoben, gleichsetzen dem für λ^2 gefundenen Werth. Durch Multiplication bezüglich mit $\underset{\sim}{Q}_2$ und $\underset{\sim}{Q}_1$ folgt zunächst aus (50) und (51):

$$\begin{array}{r}
3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2\lambda^2+2\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2\lambda+\underset{\sim}{Q}_2^2=0\\
-\underset{\sim}{Q}_1^2\lambda^2-2\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2\lambda-3\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_3=0\\
\hline
\lambda^2(3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2-\underset{\sim}{Q}_1^2)+\underset{\sim}{Q}_2^2-3\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_3=0,
\end{array}$$

woraus.

$$\lambda^2=\frac{3\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_2^2}{3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2-\underset{\sim}{Q}_1^2}.$$

Multiplicirt man aber (50) und (51) bezüglich mit $\underset{\sim}{Q}_1$ und $3\underset{\sim}{Q}_0$ und addirt, so ergibt sich:

$$\begin{array}{r}
3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_1\lambda^2-2\underset{\sim}{Q}_1^2\lambda+\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2=0\\
-3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_1\lambda^2-6\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2\lambda-9\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_3=0\\
\hline
\lambda(2\underset{\sim}{Q}_1^2-6\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2)+\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2-9\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_3=0
\end{array}$$

$$\lambda^2=\frac{(9\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2)^2}{(2\underset{\sim}{Q}_1^2-6\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2)^2}.$$

Setzen wir jetzt die zwei für λ^2 gefundenen Werthe einander gleich, so erhalten wir als endgiltiges Resultat unserer allgemeinen Untersuchungen die Relation:

$$\frac{3\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_2^2}{3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2-\underset{\sim}{Q}_1^2}=\frac{(9\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2)^2}{(2\underset{\sim}{Q}_1^2-6\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2)^2},$$

d. h. die Gleichung:

$$(9\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2)^2+4(\underset{\sim}{Q}_1^2-3\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_2)(3\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_2^2)=0, \tag{52}$$

d. i. die gesuchte strenge Gleichung der Schattenfläche. Und da dieselbe eine Gleichung vierten Grades in den Q, diese selbst aber x, y, z im zweiten Grad enthalten, so ist die strenge Schattengleichung eine Gleichung achten Grades.

Um jetzt die allgemeine Form (52) der Schattengleichung zur Behandlung unserer speciellen Schattenaufgabe rechnerisch verwerthen zu können, muss man noch einmal die Bedeutung der vier Coëfficienten Q ins Auge fassen und ihre Form allgemein aufstellen. Dies ist aber in folgender Weise möglich. Es standen ja mit unseren früheren Untersuchungen gewisse Determinanten in innigster Beziehung. Wie man leicht sieht, haben nun die Coëfficienten der allgemeinen Gleichung (48) die folgenden Formen, die man sofort sämmtlich der allgemeinen viergliedrigen Determinante von S. 889 entnehmen kann:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{14} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{24} \\ a_{41} a_{42} a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \\ a_{41} a_{42} a_{43} \end{vmatrix} \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \\ a_{41} a_{42} a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{41} a_{42} a_{43} \end{vmatrix} \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{14} \\ a_{31} a_{32} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}$$

Diese Coëfficienten lassen sich aber auch noch anders schreiben. Setzen wir nämlich allgemein:

$$a_{i\varkappa} = b_{i\varkappa} + \lambda \,.\, c_{i\varkappa},$$

so wird, indem wir hier z. B. bloss die eine der 10 Determinanten, A_{44} hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} b_{11}b_{12}b_{13}\\ b_{21}b_{22}b_{23}\\ b_{31}b_{32}b_{33}\end{vmatrix} + \\ &+\left\{\begin{vmatrix} c_{11}b_{12}b_{13}\\ c_{21}b_{22}b_{23}\\ c_{31}b_{32}b_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}c_{12}b_{13}\\ b_{21}c_{22}b_{23}\\ b_{31}c_{32}b_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}c_{13}\\ b_{21}b_{22}c_{23}\\ b_{31}b_{32}c_{33}\end{vmatrix}\right\}\cdot\lambda \\ &+\left\{\begin{vmatrix} b_{11}c_{12}c_{13}\\ b_{21}c_{22}c_{23}\\ b_{31}c_{32}c_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11}b_{12}c_{13}\\ c_{21}b_{22}c_{23}\\ c_{31}b_{32}c_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11}c_{12}b_{13}\\ c_{21}c_{22}b_{23}\\ c_{31}c_{32}b_{33}\end{vmatrix}\right\}\cdot\lambda^2 \\ &\left\{\begin{vmatrix} c_{11}c_{12}c_{13}\\ c_{21}c_{22}c_{23}\\ c_{31}c_{32}c_{33}\end{vmatrix}\right\}\cdot\lambda^3 \end{aligned}\right\} = A_{44} \tag{53}$$

oder kürzer:

$$A_{44} = B_{44}+\lambda C_{44}+\lambda^2 D_{44}+\lambda^3 E_{44},$$

wobei dann also B, C, D, E Determinanten bezüglich Determinantensummen von obiger Form repräsentiren. Man hat somit für die Coëfficienten der allgemeinen Gleichung (48) folgendes Schema:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}+\lambda\,.\,C_{11}+\lambda^2 D_{11}+\lambda^3 E_{11}\\ A_{22} &= B_{22}+\lambda\;\; C_{22}+\lambda^2 D_{22}+\lambda^3 E_{22}\\ A_{33} &= B_{33}+\lambda\;\; C_{33}+\lambda^2 D_{33}+\lambda^3 E_{33}\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

u. s. f.

Auf diese Weise hat man aber die allgemeine Form unserer Q bereits gefunden. Denn da dieselben nichts Anderes als die Coëfficienten jener Gleichung dritten Grades in λ waren, diese selbst aber erhalten wird, indem man sich die A sämmtlich nach dem Schema (54) berechnet, ihre Werthe in Gleichung (48) eingesetzt denkt und die so erhaltene Gleichung nach λ ordnet, wodurch sich eben Gleichung (49) ergibt, so haben die Q die folgende allgemeine analytische Form:

$$\left.\begin{aligned}
Q_0 &= E_{11}x^2+E_{22}y^2+E_{33}z^2+E_{44}+2\,E_{14}x+2\,E_{24}y+ \\
&\qquad +2\,E_{34}z+2\,E_{23}\,yz+2\,E_{31}zx+2\,E_{12}\,xy \\
Q_1 &= D_{11}x^2+D_{22}y^2+D_{33}z^2+D_{44}+2\,D_{14}x+2\,D_{24}y+ \\
&\qquad +2\,D_{34}z+2\,D_{23}\,yz+2\,D_{31}zx+2\,D_{12}xy \\
Q_2 &= C_{11}x^2+C_{22}y^2+C_{33}z^2+C_{44}+2\,C_{14}x+2\,C_{24}y+ \\
&\qquad +2\,C_{34}z+2\,C_{23}\,yz+2\,C_{31}zx+2\,C_{12}\,xy \\
Q_3 &= B_{11}x^2+B_{22}y^2+B_{33}z+B_{44}+2\,B_{14}x+2\,B_{24}y+ \\
&\qquad +2\,B_{34}z+2\,B_{23}\,yz+2\,B_{31}zx+2\,B_{12}\,xy
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

In der That sind also die Q ganze Functionen zweiten Grades in x, y, z. Durch Einsetzen derselben in Gleichung (52) folgt mithin wirklich eine Gleichung achten Grades in xyz.

Ehe wir nun die allgemeine Form (52) der Schattengleichung unter Berücksichtigung der Systeme (53) und (55) zur strengen Lösung des Kreisschattenproblems verwenden, wollen wir zuvor noch eine Bemerkung machen, die über die rechnerischen Complicationen, zu denen diese Theorie wohl in den meisten Fällen führt — die aber, im Gegensatz zur Laplace'schen in ganz bestimmt vorgeschriebener, wenn auch mehr oder minder umständlicher Weise doch stets überwunden werden können — einiges Licht verbreitet. Es sind ja die Q allgemeine Functionen zweiten Grades, von denen eine jede zehn Glieder umfasst. Bildet man also, wie Gleichung (52) das vorschreibt, die Producte je zweier Q, so erhält man im Allgemeinen eine Gleichung von folgender Gliederanzahl, indem wir zur Abkürzung Glieder mit »G« bezeichnen

$$(100\,G-100\,G^{\mathrm{I}})^2-(100\,G^{\mathrm{II}}-100^{\mathrm{III}})(100\,G^{\mathrm{IV}}-100\,G^{\mathrm{V}}) = \\ = 60.100 \text{ Glieder,}$$ [1]

wobei freilich vorausgesetzt, dass sich gar keine Glieder in den drei Klammern letzterer Gleichung vereinigen, indem nie gemeinsame Potenzen von x, y, z oder gleichen Combinationen dieser Grössen auftreten. Das ist nun zwar sicher nicht der Fall — wie wir auch an unserem speciellen Beispiel sehen werden — indem sich eine Anzahl von Gliedern jedenfalls immer vereinigen lassen wird. Aber man bemerkt doch schon,

[1] Indem, da es sich um algebraische Summen handelt, hier $100^2 = 1+2+3+.\ .+98+99+100 = 5050$ bedeutet.

dass auf diesem Wege, bei jeder speciellen Aufgabe, wenn man keine Vereinfachungen einzuführen im Stande ist, die Berechnung einer geradezu ungeheueren Zahl von Gliedern nothwendig wird, deren gemeinsames Anordnen nach den verschiedenen auftretenden Potenzen, wie: x^8, x^5, y^6, z^3, x^1y^3, z^3y^2, xyz^3 etc., d. h. nach einer sehr grossen Anzahl von Combinationen zu lauter verschiedenen Classen eine beinahe unausführbare Arbeit werden würde. Dies ist offenbar die bei dieser Theorie sich vor Allem einstellende grosse Schwierigkeit, die, ganz wie bei der Laplace'schen, schliesslich rechnerischer Natur ist. Allein diese Schwierigkeit ist eben dadurch ganz ausserordentlich zu vermindern, dass man durch Annahmen über die Lage des an sich willkürlichen Coordinatensystems, wie wir es früher gethan, den Gleichungen der allgemeinen Theorie:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

im speciellen Falle eine möglichst einfache und praktisch verwerthbare Form zu geben sucht, wodurch eine ganze Anzahl von Gliedern in den allgemeinen Functionen zweiten Grades, durch welche die Q dargestellt werden, zum Verschwinden gebracht wird, indem eine mehr oder minder grosse Zahl der Determinantencoëfficienten Null wird. Dieses Herabdrücken der Gliederanzahl der Q ist aber in der genannten Weise immer zu ermöglichen. Inwieweit, ist eine andere Frage, welche durch die mehr oder minder grosse Complicirtheit der zwei Figuren bedingt wird, deren Gleichungen durch $F = 0$ und $G = 0$ gegeben sind.

Nach diesen Ausführungen können wir unser specielles Problem nun wirklich strenge lösen, ohne weitere principielle Schwierigkeiten, während die rechnerische Ausführung, deren Ergebnisse in den verschiedenen Partien wir hier bloss mittheilen werden, immerhin noch sehr verwickelt bleibt. Was wir dabei überhaupt auf diesem Wege gewinnen, ist aber keineswegs bloss das Resultat als solches, welches die Laplace'sche Methode uns nicht lieferte, sondern das Werthvolle ist sozusagen vor Allem der Einblick in die complicirte und eigenthümliche Natur solcher strenger Lösungen überhaupt.

Wir ordnen jetzt im Sinne der allgemeinen Theorie die Kugel und Kreisgleichung in Ebenencoordinaten nach u, v, w. Man erhält dann:

$$(r^2-R^2)u^2-R^2v^2+(t^2-R^2)w^2+2rtuw+2ru+2tw+1=0 \quad (56)$$

$$r^2u^2+r^2v^2-1=0. \quad (57)$$

Weiter stellen wir die allgemeine Gleichung (46) für unseren jetzigen Fall auf, indem wir Gleichung (57) mit λ multipliciren und sie hierauf zu Gleichung (56) addiren. Gleich nach u, v, w geordnet folgt:

$$[r^2(1+\lambda)-R^2]u^2+[r^2\lambda-R^2]v^2+(t^2-R^2)w^2+$$
$$+2rtuw+2ru+2tw-\lambda+1=0.$$

Mithin haben jetzt die Coëfficienten a der allgemeinen Gleichung (47) die folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= (r^2-R^2)+r^2\lambda \\
a_{22} &= -R^2+r^2\lambda \\
a_{33} &= (t^2-R^2)+0.\lambda \\
a_{44} &= 1-1.\lambda \\
a_{14} &= r+0.\lambda \\
a_{24} &= 0+0.\lambda \\
a_{34} &= t+0.\lambda \\
a_{23} &= 0+0.\lambda \\
a_{31} &= rt+0.\lambda \\
a_{12} &= 0+0.\lambda
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Das sind zehn Glieder, und vier Elemente, zu je zweien combinirt, ergeben in der That so viele. Festzuhalten ist für die folgende Rechnung noch, dass die sechs übrigen a, die ausser diesen zehn eben angeführten in der allgemeinen Determinante:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\
a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\
a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\
a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}
\end{vmatrix}$$

auftreten, also:

$$a_{13},\ a_{21},\ a_{32},\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43}$$

jetzt nicht etwa Null gesetzt werden dürfen, wie man vielleicht meinen könnte, wodurch indess ein ganz anderes Resultat erzielt werden würde. Vielmehr ist, entsprechend der allgemeinen Form der früheren Theorie:

$$a_{i\varkappa} = a_{i\varkappa}$$

auch jetzt:

$$\left.\begin{aligned} a_{13} &= a_{31} = rt+0\,.\,\lambda \\ a_{21} &= a_{12} = 0+0\,.\,\lambda \\ a_{32} &= a_{23} = 0+0\,.\,\lambda \\ a_{41} &= a_{14} = r+0\,.\,\lambda \\ a_{42} &= a_{24} = 0+0\,.\,\lambda \\ a_{43} &= a_{34} = t+0\,.\,\lambda \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Unter Zugrundelegung dieser zwei Werthetabellen (58) und (59) nun hat man die vier Gleichungen des Systems (55) auszurechnen. Dabei erfordert offenbar die Berechnung des durch die erste Gleichung in (55) gegebenen Coëfficienten Q_0 die Ausrechnung von zehn Determinanten, diejenige von Q_1 die Ausrechnung von dreissig Determinanten, die von Q_2 ebenfalls die Berechnung von dreissig Determinanten und schliesslich die von Q_3 fordert wieder die Ausrechnung von zehn Determinanten, so dass im Ganzen achtzig dreigliedrige Determinanten gemäss Schema (58) und (59) erst aufzustellen und dann auszurechnen sind, was sehr rasch bewerkstelligt werden kann, indem man in bekannter Weise die beiden ersten Verticalreihen rechts hinter die Determinante schreibt und multiplicirt. Bei dieser Ausrechnung zeigt sich nun aber, dass in Folge unserer früher gemachten vereinfachenden Annahmen über die Lage des Coordinatensystems nicht weniger als zweiundfünfzig von den achtzig stets zu lösenden Determinanten verschwinden, was die folgende Rechnung eben so ausserordentlich vereinfacht, ja in gewissem Sinne, wie zur Genüge ersichtlich werden wird, überhaupt erst durchführbar macht. Die Rechnung ergibt nämlich für diese achtzig Determinanten die folgenden Werthe:

I. Ad $\underset{\sim}{Q}_0$:

$$E_{11}=E_{22}=E_{44}=E_{14}=E_{24}=E_{34}=E_{23}=E_{31}=E_{12}=0$$
$$E_{33}=-r^4.$$

II. Ad $\underset{\sim}{Q}_1$

$$D_{11}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ -r^2(t^2-R^2) \\ 0 \\ \hline +r^2(R^2-t^2) \end{array}\right. \qquad D_{22}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ -r^2(t^2-R^2) \\ 0 \\ \hline +r^2(R^2-t^2) \end{array}\right.$$

$$D_{33}=\left\{\begin{array}{l} -r^2(r^2-R^2) \\ +r^2R^2 \\ r^4 \\ \hline +2r^2R^2 \end{array}\right.$$

$$D_{44}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +r^4(t^2-R^2) \\ \hline +r^4(t^2-R^2) \end{array}\right. \qquad D_{14}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right. \qquad D_{24}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right.$$

$$D_{34}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -tr^4 \\ \hline -tr^4 \end{array}\right. \qquad D_{23}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right. \qquad D_{31}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ tr^3 \\ 0 \\ \hline +tr^3 \end{array}\right. \qquad D_{12}=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right.$$

III. Ad $\underset{\sim}{Q}_2$:

$$C_{11}=\left\{\begin{array}{l} -r^2R^2 \\ 0 \\ R^2(t^2-R^2) \\ \hline +R^2(t^2-r^2-R^2) \end{array}\right. \qquad C_{22}=\left\{\begin{array}{l} -r^2R^2 \\ 0 \\ R^2(t^2+r^2-R^2) \\ \hline +R^2(t^2-R^2) \end{array}\right.$$

$$C_{33}=\left\{\begin{array}{l} -r^2R^2 \\ -r^2R^2 \\ R^2(r^2-R^2) \\ \hline -R^2(r^2+R^2) \end{array}\right.$$

$$C_{44} = \left\{\begin{array}{l} -r^2R^2(t^2-R^2) \\ -r^2R^2(t^2+r^2-R^2) \\ 0 \\ \hline -r^2R^2(2t^2+r^2+2R^2) \end{array}\right. \qquad C_{14} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ +r^3R^2 \\ 0 \\ \hline +r^3R^2 \end{array}\right. \qquad C_{24} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right.$$

$$C_{34} = \left\{\begin{array}{l} tr^2R^2 \\ tr^2R^2 \\ 0 \\ \hline +2tr^2R^2 \end{array}\right. \qquad C_{23} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right. \qquad C_{31} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -trR^2 \\ \hline -trR^2 \end{array}\right. \qquad C_{12} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right.$$

IV Ad $\underset{\sim}{Q}_3$:

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = R^4; \ B_{44} = R^4(r^2+t^2-R^2);$$
$$B_{14} = -rR^4; \ B_{34} = -tR^4; \ B_{24} = B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0.$$

Auf Grund dieser Determinantenwerthe aber nehmen die $\underset{\sim}{Q}$ die Form an:

$$\underset{\sim}{Q}_0 = -r^4z^2 = 1 \text{ Glied}$$

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{Q}_1 &= r^2(R^2-t^2)x^2+r^2(R^2-t^2)y^2+2R^2r^2z^2- \\
&\qquad -r^4(R^2-t^2)-2r^4tz+2r^3txz = 6 \text{ Glieder} \\
\underset{\sim}{Q}_2 &= R^2(t^2-r^2-R^2)x^2-R^2(R^2-t^2)y^2-R^2(R^2+r^2)z^2- \\
&\qquad -R^2r^2(2t^2+r^2+2R^2)+2R^2r^3x+ \\
&\qquad +4R^2r^2tz-2R^2rtxz = 7 \text{ Glieder} \\
\underset{\sim}{Q}_3 &= R^4x^2+R^4y^2+R^4z^2+R^4(r^2+t^2-R^2)- \\
&\qquad -2R^4rx-2R^4tz = 6 \text{ Glieder}
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Die Gesammtsumme aller Glieder der vier $\underset{\sim}{Q}$ = Coëfficienten beträgt also statt vierzig jetzt nur noch zwanzig Glieder, was eben die folgende Rechnung so bedeutend vereinfacht. Allgemein wird dadurch nämlich die Gesammtzahl der Glieder, aus denen sich die strenge Schattengleichung zusammensetzt, in unserem jetzigen Falle reducirt auf:

$$(6G-42G^{I})^2-(21G^{II}-7G^{III})(36G^{IV}-28G^{V})$$

oder, da sich hier in der früher erwähnten Weise eine Reihe von Gliedern innerhalb der einzelnen Klammern vereinigen, noch einfacher:

$$(6G-22G^{I})^2-(19G^{II}-7G^{III})(22G^{IV}-22G^{V}) = 1550 \text{ Glieder.}$$

Diese 1550 Glieder aber muss man wirklich ausrechnen und dann zusammenziehen, indem man nach gemeinsamen Potenzen ordnet, was zwar eine ermüdende mechanische Arbeit ist, die man indess kaum noch mehr wird vereinfachen können. Zunächst ergibt die Rechnung die folgenden Werthe für die in der Schattengleichung (52) auftretenden zweigliedrigen $\underset{\sim}{Q}$-Producte, indem wir sie gleich nach fallenden Potenzen und der Übersichtlichkeit halber mit den folgenden Abkürzungen schreiben:

$$9\underset{\sim}{Q}_0\underset{\sim}{Q}_3 = \alpha_1 z^4 + \alpha_1 x^2 z^2 + \alpha_1 y^2 + \beta_1 z^3 + \gamma_1 x z^2 + \delta_1 z^2 = 6 \text{ Glieder.} \tag{61}$$

wobei gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -9R^4 r^4 \\ \beta_1 &= +18R^4 r^4 t \\ \gamma_1 &= +18R^4 r^5 \\ \delta_1 &= -9R^4 r^4 (r^2+t^2-R^2) \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2 = {} & \alpha_2 x^4 + \beta_2 y^4 + \gamma_2 z^4 + \delta_2 x^3 z + \varepsilon_2 x z^3 + \zeta_2 x^2 y^2 + \eta_2 x^2 z^2 \\ & + \vartheta^2 y^2 z^2 + i_2 x y^2 z + \varkappa_2 x^3 + \lambda_2 z^3 + \mu_2 x^2 z + \nu_2 x z^2 + \\ & + \xi_2 y^2 z + \varkappa_2 x y^2 + o_2 x^2 + \pi_2 y^2 + \rho_2 z^2 + \sigma^2 x z + \\ & + \tau_2 x + \chi_2 z + \psi_2 = 22 \text{ Glieder} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Dabei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= +R^2 r^2 (R^2-t^2)(t^2-r^2-R^2) \\ \beta_2 &= -R^2 r^2 (R^2-t^2)^2 \\ \gamma_2 &= -2R^4 r^2 (R^2+r^2) \\ &= +2R^2 r^3 t (2t^2-2R^2-r^2) \\ &= -2R^2 r^3 t (3R^2+r^2) \\ \zeta_2 &= +r^2 R^2 (R^2-t^2)(t^2-r^2-R^2-1) \\ \eta^2 &= +3R^2 r^2 (R^2 t^2-R^2 r^2-R^4-r^2 t^2) \\ \vartheta_2 &= -R^2 r^2 (R^2-t^2)(3R^2+r^2) \\ \iota_2 &= -4R^2 r^3 t (R^2-t^2) \\ \varkappa_2 &= +2R^2 r^5 (R^2-t^2) \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2 &= +2R^2r^4t(5R^2+r^2)\\
\mu_2 &= +6R^2r^4t(R^2-t^2+r^2)\\
\nu_2 &= +4R^2r^5(R^2+3t^2)\\
\xi_2 &= +6R^2r^4t(R^2-t^2)\\
o_2 &= +r^4R^2(R^2-t^2)(3t^2+R^2)\\
\pi_2 &= -r^4R^2(R^2-t^2)(t^2+3R^2+r^2)\\
\rho_2 &= +R^2r^4(3R^2t^2-3R^4-R^2r^2-9r^2t^2)\\
\sigma_2 &= +2R^2r^5t(3R^2+t^2-r^2)\\
\tau_2 &= -2R^2R^7(R^2-t^2)\\
\chi_2 &= +2R^2r^6t(4t^2+r^2)\\
\psi_2 &= +R^2r^6(R^2-t^2)(2t^2+r^2+2R^2)
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Weiter wird:

$$\left.\begin{aligned}
4Q_1^2 = \alpha_3x^4+\alpha_3y^4+\beta_3z^4+2\alpha_3x^2y^2+\gamma_3x^2z^2+&\\
+\delta_3y^2z^2+\varepsilon_3x^3z+\zeta_3xz^3+\varepsilon_3xy^2z+\eta_3z^3+&\\
+\vartheta_3x^2z+\iota_3xz^2+\vartheta_3y^2z+\varkappa_3x^2+\varkappa_3y^2+&\\
+\lambda_3z^2+\mu_3xz+\nu_3z+\xi_3 = 19 \text{ Glieder}&
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Dabei ist:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_3 &= +4r^4(R^2-t^2)^2\\
\beta_3 &= +16R^4r^4\\
2\alpha_3 &= +8r^4(R^2-t^2)^2\\
\gamma_3 &= +16r^4(R^4+r^2t^2-R^2t^2)\\
\delta_3 &= +16r^4R^2(R^2-t^2)\\
\varepsilon_3 &= +16r^5t(R^2-t^2)\\
\zeta_3 &= +32R^2r^5t\\
\eta_3 &= -32R^2r^6t\\
\vartheta_3 &= -16R^6t(R^2-t^2)\\
\iota_3 &= -32r^7t^2\\
\varkappa_3 &= -8r^6(R^2-t^2)^2\\
\lambda_3 &= +16r^6(R^4+r^2t^2-R^2t^2)\\
\mu_3 &= -16r^7t(R^2-t^2)\\
\nu_3 &= +16r^8t(R^2-t^2)\\
\xi_3 &= +4r^8(R^2-t^2)^2
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned}12Q_0Q_2 = \alpha_4 z^4 + \beta_4 x^2z^2 + \gamma_4 y^2z^2 + \delta_4 xz^3 + \\ + \varepsilon_4 z^3 + \zeta_4 xz^2 + \eta_4 z^2 = 7 \text{ Glieder}\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Hiebei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_4 &= +12R^2r^4(R^2+r^2)\\ \beta_4 &= -12R^2r^4(t^2-r^2-R^2)\\ \gamma_4 &= +12R^2r^4(R^2-t^2)\\ \delta_4 &= +24R^2r^5t\\ \varepsilon_4 &= -48R^2r^6t\\ \zeta_4 &= -24R^2r^7\\ \eta_4 &= +12R^2r^6(2t^2+r^2+2R^2)\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Ferner wird:

$$\left.\begin{aligned}3Q_1Q_3 = \alpha_5 x^4 + \alpha_5 y^4 + \beta_5 z^4 + \gamma_5 x^2y^2 + \delta_5 x^2z^2 + \delta_5 y^2z^2 + \\ + \varepsilon_5 xy^2z + \varepsilon_5 x^3z + \varepsilon_5 xz^3 + \zeta_5 x^3 + \eta_5 z^3 + \vartheta_5 x^2z + \\ + \iota_5 xz^2 + \varkappa_5 y^2z + \zeta_5 xy^2 + \lambda_5 x^2 + \lambda_5 y^2 + \mu_5 z^2 + \\ + \nu_5 xz + \xi_5 x + o_5 z + \pi_5 = 22 \text{ Glieder}\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_5 &= +3R^4r^2(R^2-t^2)\\ \beta_5 &= +2R^4r^2(8R^2-3r^2t)\\ \gamma_5 &= +6R^4r^2(R^2-t^2)\\ \delta_5 &= +3R^4r^2(3R^2-t^2)\\ \varepsilon_5 &= +6R^4r^3t\\ \zeta_5 &= -6R^4r^3(R^2-t^2)\\ \eta_5 &= -12R^6r^2t\\ \vartheta_5 &= +16R^4r^2t(t^2-R^2-3r^2)\\ \iota_5 &= +12R^4r^3(t^2+R^2)\\ \varkappa_5 &= +6R^4r^2t(t^2-R^2-r^3)\\ \lambda_5 &= -3R^4r^2(R^2-t^2)^2\\ \mu_5 &= +3R^4r^2(R^2r^2+2R^2t^2+5r^2t^2-2R^4)\\ \nu_5 &= +6R^4r^3t(3r^2+t^2-R^2)\\ \xi_5 &= +6R^4r^5(R^2-t^2)\\ o_5 &= +6R^4r^4t(2R^2-2t^2-r^2)\\ \pi_5 &= -3R^4r^4(R^2-t^2)(r^2+t^2-R^2)\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Schliesslich ist:

$$\left.\begin{aligned} Q_2^2 = {} & \alpha_6 x^4+\beta_6 y^4+\gamma_6 z^4+\delta_6 x^2y^2+\varepsilon_6 x^2z^2+\zeta_6 y^2z^2+ \\ & +\eta_6 x^3z+\vartheta_6 xz^3+\iota_6 xy^2z+\varkappa_6 x^3+\lambda_6 z^3+\mu_6 x^2z+ \\ & +\nu_6 xz^2+\xi_6 xy^2+o_6 y^2z+\pi_6 x^2+\rho_6 y^2+\sigma_6 z^2+\tau_6 xz+ \\ & +\chi_6 x+\psi_6 z+\omega_6 = 22 \text{ Glieder} \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \alpha_6 &= +R^4(t^2-r^2-R^2)^2 \\ \beta_6 &= +R^4(R^2-t^2)^2 \\ \gamma_6 &= +R^4(R^2+r^2)^2 \\ \delta_6 &= -2R^4(t^2-r^2-R^2)(R^2-t^2) \\ \varepsilon_6 &= +2R^4(2r^2t^2-[t^2-R^2-r^2][R^2+r^2]) \\ \zeta_6 &= +2R^4(R^2-t^2)(R^2+r^2) \\ \eta_6 &= +4R^4rt(t-R^2-r^2) \\ \vartheta_6 &= +4R^4rt(R^2+r^2) \\ \iota_6 &= +4R^4rt(R^2-t^2) \\ \varkappa_6 &= +4R^4r^3(t-r^2-R^2) \\ \lambda_6 &= -8R^4r^2t(R^2+r^2) \\ \mu_6 &= +8R^4r^2t(t^2-R^2-2r^2) \\ \nu_6 &= -4R^4r^3(R^2+r^2+4t^2) \\ \xi_6 &= -4R^4r^3(R^2-t^2) \\ o_6 &= -8R^4r^2t(R^2-t^2) \\ \pi_6 &= -2R^4r^2[(2t^2+2R^2+r^2)(t^2-r^2-R^2)+2r^4] \\ \rho_6 &= +2R^4r^2(R^2-t^2)(2t^2+r^2+2R^2) \\ \sigma_6 &= +2R^4r^2[(R^2+r^2)(2t^2+2R^2+r^2)+8r^2t^2] \\ &= +4R^4r^3t(2t^2+5r^2+2R^2) \\ \chi_6 &= -4R^4r^5(2t^2+r^2-2R^2) \\ \psi_6 &= -8R^4r^4t(2t^2+r^2-2R^2) \\ \omega_6 &= +R^4r^4(2t^2+r^2+2R^2)^2 \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Setzt man nun die Gleichung (52) in der vorgeschriebenen Weise aus den sechs algebraischen Summen (61), (63), (65), (67), (69), (71) zusammen, wodurch man eine Productensumme von 1550 Gliedern erhält — von denen im vollen Einklang mit der allgemeinen Theorie wirklich kein einziges in der Exponentialquersumme den achten Grad überschreitet — und ordnet diese Glieder, indem man die gleichen zusammenzieht, nach gemeinsamen Potenzen von x, y, z, xy, xz, yz, xyz, bei der achten Potenz beginnend bis herab zur nullten, so reduciren sich die 1550 Glieder auf gerade 96, und die Schattengleichung des von der kugelförmigen Sonne beleuchteten Saturnringes nimmt, wenn man den Ring als Kreis betrachtet, die folgende völlig strenge und allgemein giltige, freilich sehr complicirte Form an:

$$\left.\begin{aligned}
&[A_8x^8+B_8y^8+C_8z^8+D_8x^6y^2+E_8x^2y^6+F_8x^4y^4+G_8x^7z+\\
&\quad+H_8xz^7+I_8x^6z^2+K_8x^2z^6+L_8x^5z^3+M_8x^3z^5+N_8x^4z^4+\\
&\quad+O_8y^6z^2+P_8y^2z^6+Q_8y^4z^4+R_8x^5y^2z+S_8xy^2z^5+\\
&\quad+T_8x^4y^2z^2+U_8x^2y^2z^4+V_8x^3y^4z+W_8xy^4z^3+\\
&\quad+X_8x^3y^2z^3+Y_8x^2y^4z^2+Z_8xy^6z]^8_{(25)}+[A_7x^7+B_7y^7+\\
&\quad+C_7x^5y^2+D_7x^3y^4+E_7xy^6+F_7x^6z+G_7xz^6+H_7x^5z^2+\\
&\quad+I_7x^2z^5+K_7x^4z^3+L_7x^3z^4+M_7y^6z+N_7y^4z^3+\\
&\quad+O_7y^2z^5+P_7x^4y^2z+Q_7xy^2z^4+R_7x^3y^2z^2+S_7x^2y^2z^3+\\
&\quad+T_7x^2y^4z+U_7xy^4z^2]^7_{(20)}+[A_6x^6+B_6y^6+C_6z^6+\\
&\quad+D_6x^4y^2+E_6x^2y^4+F_6x^5z+G_6xz^5+H_6x^4z^2+I_6x^2z^4+\\
&\quad+K_6x^3z^3+L_6y^4z^2+M_6y^2z^4+N_6x^3y^2z+O_6x^2y^2z^2+\\
&\quad+P_6xy^2z^3+Q_6xy^4z]^6_{(16)}+[A_5x^5+B_5z^5+C_5x^3y^2+\\
&\quad+D_5xy^4+E_5x^4z+F_5xz^4+G_5x^3z^2+H_5x^2z^3+I_5y^4z+\\
&\quad+K_5y^2z^3+L_5x^2y^2z+M_5xy^2z^2]^5_{(12)}+[A_4x^4+B_4y^4+\\
&\quad+C_4z^4+D_4x^2y^2+E_4x^3z+F_4xz^3+G_4x^2z^2+H_4y^2z^2+\\
&\quad+I_4xy^2z]^4_{(9)}+[A_3x^3+B_3z^3+C_3x^2y+D_3xy^2+E_3x^2z+\\
&\quad+F_3xz^2+G_3y^2z]^3_{(7)}+[A_2x^2+B_2y^2+C_2z^2+D_2xz]^2_{(4)}+\\
&\quad+[A_1x+B_1z]^1_{(2)}+[A_0]^0_{(1)}=0
\end{aligned}\right\}\quad(73)$$

wobei zur Übersichtlichkeit die Glieder gleichen Grades in Klammern gesetzt und Indices beigefügt sind, von denen der obere den Grad, der untere die Gliederzahl der betreffenden Klammer sogleich erkennen lässt. Dabei setzen sich die 96 Coëfficienten $A_8 \ldots A_0$ aus den $\alpha_1 \ldots \omega_5$ der Systeme (62), (64), (66), (68), (70), (72) zusammen. Diese ganzen 96 Coëfficienten-summen von A_8 bis A_0, von denen einzelne aus über dreissig Gliedern bestehen, z. B. K_6 aus 37, Q_7 aus 33 u. s. f. und deren vollständiges Aufzählen viele Seiten in Anspruch nehmen würde, wollen wir hier indess nicht anführen. Denn das Resultat, welches wir in erster Linie anstrebten, der genaue Einblick in die complicirte Natur der strengen Lösung wird durch Gleichung (73) vollständig gegeben. Zugleich lässt diese Gleichung erkennen, dass sie rechnerisch keinesfalls verwerthbar ist, ein Grund mehr dafür, wie überflüssig es wäre, die Unmenge von Coëfficienten hier alle wirklich aufzuzählen. Nur um einen Begriff davon zu geben, in wie mannigfacher Weise sich dieselben aus den α_1 bis ω_6 zusammensetzen, wollen wir jedesmal den ersten von jeder Klammer anführen, zumal diese ersten Coëfficienten zufällig nur eine kleinere Gliederzahl aufweisen und also nicht überflüssig viel Platz beanspruchen. Die Rechnung ergibt die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
A_8 &= \alpha_2^2 - \alpha_3\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 \\
A_7 &= 2\alpha_2\varkappa_2 - \alpha_3\zeta_5 + \alpha_3\varkappa_6 \\
A_6 &= \varkappa_2^2 + 2\alpha_2 o_2 - \alpha_3\lambda_5 - \xi_3\alpha_5 + \alpha_3\pi_6 + \xi_3\alpha_6 + o_3\gamma_6 \\
A_5 &= 2\alpha_2\tau_2 + 2\varkappa_2 o_2 - \alpha_3\zeta_5 - \xi_3\zeta_5 + \alpha_3\chi_5 + \xi_3\varkappa_6 \\
A_4 &= o_2^2 + 2\alpha_2\psi_2 + 2\varkappa_2\tau_2 - \alpha_3\pi_5 - \xi_3\lambda_5 - \sigma_3\alpha_5 + \alpha_3\omega_6 + \\
&\qquad\qquad + \xi_3\pi_6 + \sigma_3\alpha_6 \\
A_3 &= 2\varkappa_2\psi_2 + 2 o_2\tau_2 - \xi_3\zeta_5 - \sigma_3\zeta_5 + \xi_3\chi_6 + \sigma_3\varkappa_6 \\
A_2 &= \tau_2^2 + 2 o_2\psi_2 - \xi_3\pi_5 - \sigma_3\lambda_5 + \xi_3\omega_6 + \sigma_3\pi_6 \\
A_1 &= 2\tau_2\psi_2 - \sigma_3\zeta_5 + \sigma_3\chi_6 \\
A_0 &= \psi_2^2 - \sigma_3\pi_5 + \sigma_3\omega_6
\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Ziehen wir nun das Resumé unserer Untersuchungen über die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie, so wird man zunächst keiner den directen Vorzug vor der anderen einräumen dürfen. Die Laplace'sche Methode zeichnet sich aus durch die verhältnissmässige Einfachheit und vor Allem durch die praktische Verwerthbarkeit ihrer Resultate im astronomisch-rechnerischen Sinne, Resultate, die sie freilich, wie wir gesehen, nicht allgemein in jedem beliebigen Falle zu liefern vermag und die obendrein nicht mathematisch strenge sind. Doch wird sie immerhin im Grossen und Ganzen dem Astronomen genügen. Denn die drei für diesen wichtigsten Fälle — vom höchst einfachen Kugelschattenproblem abgesehen — sind durch sie gelöst. Zunächst hat, wie schon erwähnt, Laplace im achten Capitel des vierten Bandes der Mécanique céleste für das Jupiterellipsoid die Schattengleichung abgeleitet, die astronomisch, wie man sich überzeugt, genügend strenge ist, und die wir, ihrer interessanten Form halber, hier anführen wollen:

I. Kernschatten:

$$\frac{R^2(1-\lambda)^2}{D^2}\left(\frac{D}{1-\lambda}-x\right)^2=y^2+z^2+\frac{2\lambda}{1-\lambda}\rho z^2\left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}}-1\right).$$

II. Halbschatten:

$$\frac{R^2(1+\lambda^2)}{D^2}\left(x-\frac{D}{1+\lambda}\right)^2=y^2+z^2+\frac{2\lambda}{1+\lambda}\rho z^2\left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}}+1\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\lambda=\frac{(1+\rho)R'}{R}.$$

Dann hat Prof. Seeliger das Saturnellipsoid-Schattenproblem vollständig nach der Laplace'schen Methode gelöst. Die Gleichung, die er in der zu Anfang citirten Abhandlung gefunden, ist besonders einfach; sie hat die folgende Form:

$$\Delta\rho=\pm\frac{R}{D}\xi\frac{\rho_0}{R'}\sqrt{\frac{D^2}{R'^2}\;\frac{R'^2-\varepsilon A^2y^2}{(D^2-A^2\varepsilon)}}.$$

Die übrigen Planeten sind Kugeln; für sie ist das Problem also eo ipso gelöst. Für den Saturnring, den letzten Sonderfall im Planetensystem ist die Form der näherungsweisen Lösung nach der Laplace'schen Methode gleichfalls verhältnissmässig einfach und im Anfang dieser Abhandlung auf S. 867 bereits citirt. Zur Lösung weiterer Probleme ist die Laplace'sche Schattentheorie, soviel mir bekannt, bisher noch nicht verwendet worden.

Bei der Wiederkehr des wichtigen Phänomens der nächsten Iapetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem, die im Jahre 1905 stattfinden wird, hat man natürlich, um das hier gleich hervorzuheben, bei der Rechnung auszugehen von der genannten astronomischen Näherungs-Schattengleichung des Saturnringes und nicht von der in dieser zweiten Abhandlung gegebenen strengen Saturnring-Schattengleichung (73), die astronomisch-rechnerisch nicht verwerthbar ist, die indess nicht nur selbst, sondern auch in ihrer ganzen Entstehungsweise ein unleugbares theoretisches Interesse besitzen dürfte, da sie einen allgemeinen Einblick in die eigenthümliche und complicirte Natur strenger Lösungen von Schattenproblemen gibt.

Damit ist die Salmon'sche Methode zugleich schon charakterisirt. Ihre Resultate sind zu verwickelt, um im Allgemeinen praktisch verwerthbar zu sein. Allein daraus einen Vorwurf gegen sie ableiten zu wollen, würde verfehlt sein, da die grosse Complicirtheit, wie wir gesehen, in der Natur der strengen Lösung als solcher begründet liegt. Auf der anderen Seite muss man es aber als einen entschiedenen Vorzug der Salmon'schen Methode anerkennen, dass sie die Lösung, falls man sich nur der Mühe der Ausrechnung unterzieht, die freilich bisweilen eine ausserordentlich grosse werden kann, doch wenigstens immer in ganz bestimmter Weise wirklich zu liefern vermag. Der Weg, den man dazu nach den hier gegebenen Entwicklungen einzuschlagen hat, ist nunmehr, wenn wir das Resumé ziehen, ziemlich einfach, und aus ihm wird schon sehr rasch, gleich zu Anfang ersichtlich werden, ob die Rechnung bei der strengen Behandlung eines Schattenproblems grössere Dimensionen annehmen wird oder nicht.

Man hat offenbar nur die Gleichungen der zwei Figuren des leuchtenden und des dunkeln Körpers:

$$F(u, v, w) = 0$$
$$G(u, v, w) = 0$$

in Ebenencoordinaten darzustellen, bildet dann sofort die Relation (46):

$$F+\lambda . G = 0$$

und stellt hierauf direct die Tabellen der a Nr. 58 und Nr. 59 auf. Jetzt ersieht man schon durch diese Tabellen vollständig.

ob von den achtzig allgemein und stets zu lösenden Determinanten des Problems viele Null werden. Ist das der Fall, so verfolgt man die Aufgabe weiter. Man bildet die Q, und trifft es sich nun zufällig so glücklich, dass die Gliederzahl der einzelnen Q nicht gross wird, etwa die ganzen Zahlen 2 oder 3 nicht überschreitet, so hat man gewonnenes Spiel und die strenge Form der Schattengleichung wird verhältnissmässig einfach und eventuell sogar praktisch verwerthbar werden. Ist das aber nicht der Fall, d. h. werden wenig Glieder in den genannten Tabellen Null, verschwinden also auch nur sehr wenig Determinanten des ganzen grossen Complexes, so werden die Q vielgliedrige Summen darstellen, und man wird dann sehr viele Tausende von Gliedern, wie früher gezeigt, bei der Multiplication der Q aufstellen und ordnen müssen, wobei die letztere Arbeit natürlich die weit complicirtere ist, wie man sich durch Nachrechnung des von uns behandelten Saturnringschattenbeispiels überzeugt. In diesem Falle, d. h. wenn Vereinfachungen wie in unserem behandelten Falle oder besser noch grössere durch die Natur der Aufgabe unmöglich gemacht sind, wird es sich im Allgemeinen überhaupt gar nicht mehr der Mühe verlohnen, die strenge Schattengleichung aufzusuchen. Immerhin aber sind in der Physik und Mathematik noch Fälle denkbar, wo man die Anwendung des Salmon'schen Verfahrens in der hier angedeuteten Weise eventuell würde versuchen können. Mit der Laplace'schen Theorie in ungünstigen Fällen Näherungslösungen aufzufinden zu versuchen, bleibt ja dabei immer noch überlassen. Dass dieselben indess nicht leicht zu finden sind, davon überzeugt man sich am besten durch Nachrechnung der Ableitung der nach der Laplace'schen Methode gewonnenen citirten astronomischen Näherungs-Schattengleichungen. Zum Schluss wollen wir auch noch darauf hinweisen, dass die Salmon'sche Methode die allgemeine Behandlung eines Schattenproblems in der hier angedeuteten Weise nur solange gestattet, als die Gleichungen der beiden zu behandelnden Figuren den zweiten Grad nicht übersteigen.

Mit diesen Bemerkungen soll jedoch natürlich nicht gesagt werden, dass es unmöglich sei, vielleicht doch noch einen praktischeren Weg als den Laplace'schen und den von George Salmon stammenden zur Lösung von Schattenaufgaben zu finden, und die eben gegebenen allgemeinen Vorschriften sollen also keineswegs Grenzen ziehen, die als solche nur eine Begrenzung wissenschaftlichen Forschens bedeuten würden. Aber der Versuch, das Bereich der Schattenaufgaben noch von einem dritten, ganz neuen und anderen Gesichtspunkte aus, als den beiden hier charakterisirten zu betrachten, dürfte, zum mindesten gesagt, ein nicht allzuviel Aussicht auf Erfolg versprechendes Unternehmen sein.

Jena, im Mai 1895.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Buchholz Hugo

Artikel/Article: Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem. 863-908