Über die Bestimmung der Dielektricitätsconstante eines anisotropen Stoffes nach einer beliebigen Richtung aus den Dielektricitätsconstanten nach den Hauptrichtungen

Dr. **Anton Lampa.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1895.)

I.

In meiner Abhandlung »Zur Theorie der Dielektrica«[1] habe ich gezeigt, wie aus der Annahme einer speciellen Gestalt der leitenden Partikel, aus welchen man sich das Dielektricum constituirt denken kann, die Werthe der Dielektricitätsconstanten eines anisotropen Stoffes abgeleitet werden können. Es ergaben sich Formeln für die Dielektricitätsconstanten nach den Richtungen, welche durch die Axen der ellipsoidförmig vorausgesetzten Partikeln bestimmt sind; ich will diese Dielektricitätsconstanten kurz die Hauptdielektricitätsconstanten nennen. In der vorliegenden Abhandlung untersuche ich die Beziehung zwischen der Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung und den Hauptdielektricitätsconstanten. Es wird sich als nothwendig herausstellen, sich des Öfteren auf Gleichungen jener ersten Abhandlung zu beziehen; der Kürze wegen wird dies einfach durch Anführung ihrer Zahl unter Hinzufügung von (I) geschehen.

Die verhältnissmässige Einfachheit der Rechnung wurde in jener ersten Abhandlung durch passende Wahl des Coordinatensystems erzielt. Dieser Vortheil wird für die vorliegende Untersuchung ebenfalls zu wahren sein; zu diesem Zwecke

[1] Diese Sitzungsberichte, CIV, II. a, Juni 1895.

dürfen aber nicht wie dort die Axen des Ellipsoids als Coordinatensystem gewählt werden. Theilweise wird es jedoch erspriesslich sein, die Ellipsoidaxen als Coordinatensystem zu benützen; dieses System möge durch die Buchstaben A, B, C bezeichnet und kurz Axensystem genannt werden. Die Axen des Axensystems sollen mit den Axen des Coordinatensystems gleichen Ursprung haben und Winkel einschliessen, welche aus der folgenden tabellarischen Zusammenstellung ersichtlich sind:

	X	Y	Z
A	α_1	α_2	α_3
B	β_1	β_2	β_3
C	γ_1	γ_2	γ_3

1)

Die Kraft habe eine beliebige Richtung; sie wird daher bezüglich des Axensystems Componenten haben, welche ich mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezeichnen will. Sind nun ξ_A, η_B, ζ_C die Coordinaten eines Oberflächenpunktes des Ellipsoids von seinem Mittelpunkt im Axensystem genommen, so ist das Potential des Ellipsoids in einem äusseren Punkte p', welcher von dem Mittelpunkte des Ellipsoids um die Strecke r absteht, in dem Axensystem gemäss Gleichung 4 (I) gegeben durch

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} \int \xi_A h dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} \int \eta_B h dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} \int \xi_C h dw. \qquad 2)$$

Die Integrale repräsentiren die elektrischen Momente des Ellipsoids. Sie lassen sich leicht bestimmen, wie die auf Gleichung 4 (I) unmittelbar folgende Berechnung zeigt. Man erhält, da die den Axen des Ellipsoids parallelen Kräfte jetzt $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sind:

$$\int \xi_A h dw = \frac{a^3}{3J} \; \mathfrak{a}, \quad \int \eta_B h dw = \frac{b^3}{3J} \; \mathfrak{b}, \quad \int \zeta_C h dw = \frac{c^3}{3J} \; \mathfrak{c} \qquad 3)$$

(h ist, wie in I, die Flächendichte des betrachteten Oberflächenpunktes, a, b, c die Ellipsoidaxen, J das in I gebrauchte bestimmte Integral).

Durch die Werthe 3) nimmt u' die Gestalt an:

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} \frac{a^3}{3J} \mathfrak{a} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} \cdot \frac{b^3}{3J} \mathfrak{b} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} \frac{c^3}{3J} \cdot \mathfrak{c}. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck muss nun für das gewählte Coordinatensystem transformirt werden. Vor Allem schreibe ich die Beziehungen für die Coordinaten beider Systeme an:

$$\begin{aligned} A &= x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 \\ B &= x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2 + z \cos \beta_3 \\ C &= x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x &= A \cos \alpha_1 + B \cos \beta_1 + C \cos \gamma_1 \\ y &= A \cos \alpha_2 + B \cos \beta_2 + C \cos \gamma_2 \\ z &= A \cos \alpha_3 + B \cos \beta_3 + C \cos \gamma_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Nach den bekannten Regeln für die Transformation der Variabeln erhält man sofort folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial A} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial A} \\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial B} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial B} \\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C}. \end{aligned} \tag{7}$$

Aus den Gleichungen 6) findet man:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial A} = \cos \alpha_1 \quad &&\frac{\partial y}{\partial A} = \cos \alpha_2 \quad &&\frac{\partial z}{\partial A} = \cos \alpha_3 \\ &\frac{\partial x}{\partial B} = \cos \beta_1 \quad &&\frac{\partial y}{\partial B} = \cos \beta_2 \quad &&\frac{\partial z}{\partial B} = \cos \beta_3 \\ &\frac{\partial x}{\partial C} = \cos \gamma_1 \quad &&\frac{\partial y}{\partial C} = \cos \gamma_2 \quad &&\frac{\partial z}{\partial C} = \cos \gamma_3, \end{aligned} \tag{8}$$

Dadurch gehen die Gleichungen 7) über in:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} &= \cos\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos\alpha_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos\alpha_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \\
\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} &= \cos\beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos\beta_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos\beta_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \qquad 9) \\
\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} &= \cos\gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos\gamma_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos\gamma_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}
\end{aligned}
$$

In 4) eingesetzt folgt:

$$
\begin{aligned}
u' = {} & \frac{1}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_1 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_1 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \\
& \frac{1}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_2 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_2 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_2)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \qquad 10) \\
& \frac{1}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_3 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_3 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_3)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},
\end{aligned}
$$

und wieder kann das Potential des Dielektricums [vergl. 6 (I)] geschrieben werden:

$$
U' = \int \left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau. \qquad 11)
$$

Die Werthe von α, β, γ sind aber jetzt:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{N}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_1 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_1 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_1) \\
\beta &= \frac{N}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_2 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_2 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_2) \qquad 12) \\
\gamma &= \frac{N}{3J}(a^3\mathfrak{a}\cos\alpha_3 + b^3\mathfrak{b}\cos\beta_3 + c^3\mathfrak{c}\cos\gamma_3).
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung dieser α, β, γ schlage ich folgenden Weg ein. Im Axensystem wäre das Potential des Dielektricums [siehe Gleichung 6 (I) und 7 (I)]:

$$U' = \int \left[\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial A} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial B} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial C} \right] d\tau \tag{13}$$

und

$$\lambda = \frac{a^3 N}{3J} \mathfrak{a}$$
$$\mu = \frac{b^3 N}{3J} \mathfrak{b} \tag{14}$$
$$\nu = \frac{c^3 N}{3J} \mathfrak{c}.$$

Gemäss 17 (I) gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{a} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial A} + 4\pi J \frac{bc}{a^2} \lambda$$
$$\mathfrak{b} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial B} + 4\pi J \frac{ac}{b^2} \mu \tag{15}$$
$$\mathfrak{c} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial C} + 4\pi J \frac{ab}{c^2} \nu$$

Aus 14) und 15) erhalten wir, da $\frac{4\pi abc}{3} N = g$ (Raumerfüllung) ist:

$$\mathfrak{a} = -\frac{\partial (V+U)}{\partial A} + g\mathfrak{a},$$

also

$$\mathfrak{a} = -\frac{1}{1-g} \frac{\partial (V+U)}{\partial A}$$

und entsprechend

$$\mathfrak{b} = -\frac{1}{1-g} \frac{\partial (V+U)}{\partial B} \tag{16}$$
$$\mathfrak{c} = -\frac{1}{1-g} \frac{\partial (V+U)}{\partial C}$$

Dies in die Gleichung 12) eingetragen gibt

$$\alpha = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[a^3 \cos\alpha_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial A} + b^3\cos\beta_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial B} + c^3\cos\gamma_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial C}\Big]$$

$$\beta = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[a^3 \cos\alpha_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial A} + b^3\cos\beta_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial B} + c^3\cos\gamma_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial C}\Big] \qquad 17)$$

$$\gamma = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[a^3 \cos\alpha_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial A} + b^3\cos\beta_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial B} + c^3\cos\gamma_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial C}\Big].$$

Nun hat man

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial A} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial A} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial A}$$

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial B} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial B} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial B}$$

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial C} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial C},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gleichung 8:

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial A} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\cos\alpha_2 + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\cos\alpha_3$$

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial B} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\cos\beta_1 + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\cos\beta_2 + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\cos\beta_3 \qquad 18)$$

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial C} = \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\cos\gamma_1 + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\cos\gamma_2 + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\cos\gamma_3.$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichung 17) einzusetzen. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
\alpha = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[&(a^3\cos^2\alpha_1 + b^3\cos^2\beta_1 + c^3\cos^2\gamma_1)\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + \\
&(a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_2 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_2)\frac{\partial(V+U)}{\partial y} + \\
&(a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\Big]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[&(a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_2 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + \\
&(a^3\cos^2\alpha_2 + b_3\cos^2\beta_2 + c^3\cos^2\gamma_2)\frac{\partial(V+U)}{\partial y} + \\
&(a^3\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_2\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_2\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\Big]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma = -\frac{N}{3J(1-g)}\Big[&(a^3\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_1\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + \\
&(a^3\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + b^3\cos\beta_2\cos\beta_3 + c^3\cos\gamma_2\cos\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial y} + \\
&(a^3\cos^2\alpha_3 + b^3\cos^2\beta_3 + c^3\cos^2\gamma_3)\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\Big],
\end{aligned}
\tag{21}
$$

was ich kürzer schreiben will:

$$\alpha = -D\frac{\partial(V+U)}{\partial x} - E\frac{\partial(V+U)}{\partial y} - F\frac{\partial(V+U)}{\partial z} \tag{22}$$

$$\beta = -E\frac{\partial(V+U)}{\partial x} - G\frac{\partial(V+U)}{\partial y} - H\frac{\partial(V+U)}{\partial z} \tag{23}$$

$$\gamma = -F\frac{\partial(V+U)}{\partial x} - H\frac{\partial(V+U)}{\partial y} - K\frac{\partial(V+U)}{\partial z}. \tag{24}$$

Es wird daher U' (Gleichung 11) jetzt dargestellt sein durch folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} U' = & -\int D\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau - \int E\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau \\ & \qquad - \int F\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau \\ & -\int E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau - \int G\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau \\ & \qquad - \int H\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau \\ & -\int F\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau - \int H\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau \\ & \qquad - \int K\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Da alle Ellipsoide, aus welchen das Dielektricum constituirt gedacht wird, als gleich gross und überdies im ganzen Dielektricum gleich gerichtet und gleichmässig vertheilt vorausgesetzt wurden, haben die Coëfficienten $D, E,.$ im ganzen Dielektricum unveränderliche Werthe, können somit vor die

Integralzeichen geschrieben werden, wodurch 25) die Gestalt erhält:

$$U' = -D\int \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau - G\int\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau$$

$$-K\int\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau$$

$$-E\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau$$

$$-F\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau$$

$$-H\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau. \qquad 26)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung, welche das Potential des Dielektricums bestimmt, soll nun im folgenden Abschnitt der Fall eines Plattencondensators behandelt werden, um zu der gesuchten Beziehung zwischen der Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung und den Hauptdielektricitätsconstanten zu gelangen.

II.

Ich forme nun die Gleichung 26) um; man hat zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]=\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+(V+U)\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

also

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]-(V+U)\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}$$

somit

$$D\int\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau=$$

$$=D\int\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau-D\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\,d\tau \qquad 27)$$

und analog

$$G\int\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau=$$

$$=G\int\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau-G\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}\,d\tau \qquad 28)$$

$$K\int\frac{\partial(U+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau=$$

$$=K\int\frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau-K\int(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\,d\tau \qquad 29)$$

Die übrigen Integrale der Gleichung 26, deren Coëfficienten E, F, H sind, transformire ich auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]=\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]=\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y},$$

also

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]-2(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}.$$

Man kann daher setzen:

$$E\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau=$$

$$=E\int\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau+$$

$$+E\int\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau-2E\int(V+U)\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\,d\tau \qquad 30)$$

und analog

$$F\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau=$$

$$=F\int\frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau+$$

$$+F\int\frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau-2F\int(V+U)\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\,d\tau, \qquad 31)$$

$$H\int\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau=$$

$$=H\int\frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau+$$

$$+H\int\frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau-2H\int(V+U)\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\,d\tau. \qquad 32)$$

Auf Grund der Gleichungen 27) bis 32) kann ich daher schreiben:

$$U' = -D\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau + D\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, d\tau$$

$$-G\int \frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau + G\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\, d\tau$$

$$-K\int \frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau + K\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\, d\tau$$

$$-E\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau - E\int \frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau +$$

$$+2E\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\, d\tau$$

$$-F\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau - F\int \frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] d\tau +$$

$$+2F\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\, d\tau$$

$$-H\int \frac{\partial}{\partial y}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau - H\int \frac{\partial}{\partial z}\left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] d\tau +$$

$$+2H\int (V+U)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\, d\tau. \qquad 33)$$

Ein Theil dieser Integrale lässt sich gemäss Gleichung 23 (I) in Oberflächenintegrale überführen, so dass U' jetzt folgende Gestalt erhält:

$$U' = D\int \left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\, dw +$$

$$+G\int \left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\, dw + K\int \left[(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]\frac{\partial z}{\partial n}\, \partial w$$

$$+E\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\,dw+$$

$$+E\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\,dw+F\int\left((V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\,dw$$

$$+F\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial n}\,dw+$$

$$+H\int\left[(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\,dw+H\int\left((V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\,dw$$

$$+D\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz+$$

$$+G\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dz+K\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$+2E\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy\,dz+$$

$$+2F\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dy\,dz+2H\iiint(V+U)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\,dx\,dy\,dz, \qquad 34)$$

was ich auch schreiben kann:

$$U'=\int(V+U)\left(D\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\,dw+$$

$$\int(V+U)\left(E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+G\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+H\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial n}\,dw+$$

$$\int(V+U)\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+H\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+K\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\,dw+$$

$$\iiint (V+U)\left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz+$$

$$2\iiint (V+U)\left(E\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}+F\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}+H\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \qquad 35)$$

Dies ist nun die Form für U', welche zur Untersuchung eines Plattencondensators unmittelbar geeignet ist. Die ersten drei Integrale sind über die ganze Oberfläche, die beiden letzten über das ganze Volum des Dielektricums zu erstrecken.

Ich denke mir nun das Coordinatensystem in einer fixen Lage bezüglich der Ellipsoidaxen und aus dem Dielektricum drei gleich grosse kreisförmige Platten von der Dicke d derart herausgeschnitten, dass die Kreisflächen der ersten parallel zur YZ-Ebene, die der zweiten parallel zur XZ-Ebene, die der dritten parallel zur XY-Ebene liegen. Wird die erste Platte in den Condensator, dessen Platten denselben Radius ρ wie die dielektrischen Platten und die Distanz d haben sollen, eingeschoben, so werden die Kraftlinien parallel zur X-Axe sein; analog bei der zweiten parallel zur Y-Axe, bei der dritten parallel zur Z-Axe. Ich will daher die für diese drei Platten giltigen Gleichungen durch die Indices x, y, z charakterisiren.

Berücksichtigt man nun den Vorgang der Transformation, wie er in der ersten Abhandlung im Texte zwischen Gleichung 22 (I) und 23 (I) dargelegt ist, so sieht man, dass für die erste Platte $\frac{\partial x}{\partial n}=1$, $\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=0$, für die zweite $\frac{\partial y}{\partial n}=1$, $\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=0$ und für die dritte $\frac{\partial z}{\partial n}=1$, $\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial y}{\partial n}=0$ ist.

Man erhält daher aus Gleichung 35) für die erste Platte:

$$U'_x=\int (V+U)_x\left(D\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dw+$$

$$\iiint_x (V+U)_x\left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz+$$

$$2\iiint_x (V+U)_x \left(E\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\,dy\,dz. \qquad 36)$$

für die zweite Platte:

$$U'_y = \int (V+U)_y \left(E\frac{\partial \frac{1}{r}}{dx} + G\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$

$$\iiint_y (V+U)^y \left(D\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz +$$

$$2\iiint_y (V+U)_y \left(E\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\,dy\,dz \qquad 37)$$

für die dritte Platte:

$$U'_z = \int (V+U)_z \left(F\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(D\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz +$$

$$2\iiint_z (V+U)_z \left(E\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, dz} + H\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\,dy\,dz. \qquad 38)$$

Die einfachen Integrale sind über die ganze Oberfläche des Dielektricums zu nehmen; die dreifachen haben folgende Grenzen, da wir den Ursprung des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der linken Condensatorplatte verlegen:

Index x:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & \text{bis } x = d \\ y = -\rho & y = +\rho \\ z = -\rho & z = +\rho \end{array}$$

Index y:

$$\begin{array}{ll} x = -\rho & \text{bis } x = +\rho \\ y = 0 & y = d \\ z = -\rho & z = +\rho \end{array}$$

Index z:

$$\begin{aligned} x &= -\rho \text{ bis } x = +\rho \\ y &= -\rho \quad\quad y = +\rho \\ z &= \;\; 0 \quad\quad\; z = d. \end{aligned}$$

Die Potentiale $(V+U)_x$, $(V+U)_y$, $(V+U)_z$ rühren nur von den auf den Condensatorplatten befindlichen Ladungen her. Wir haben daher, wenn wir die Potentiale der linken Platte durch ungestrichelte, die der rechten durch gestrichelte Buchstaben bezeichnen:

$$(V+U)_x = P_x + \frac{P'_x - P_x}{d}x, \quad (V+U)_y = P_y + \frac{P'_y - P_y}{d}y,$$

$$(V+U)_z = P_z + \frac{P'_z - P_z}{d}z \tag{39)}$$

Ich betrachte nun zunächst die dreifachen Integrale. Da

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2},$$

haben wir

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} = \frac{3xz}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{r^5}.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf 39):

$$\iiint (V+U)_x \left(E\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\,dy\,dz =$$

$$3P \left[E\iiint_x \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F\iiint_x \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{r^5} + H\iiint_x \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5} \right] +$$

$$3\frac{P'_x - P_x}{d} \left[E\iiint_x \frac{x^2y\,dx\,dy\,dz}{r^5} + F\iiint_x \frac{x^2z\,dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + H\iiint_x \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5} \right] \tag{40)}$$

$$\iiint_y (V+U)_y \left(E \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$3 P_y \left[E \iiint_y \frac{xy\, dx\, dy\, dz}{r^5} + F \iiint_y \frac{xz\, dx\, dy\, dz}{r^5} + H \iiint_y \frac{yz\, dx\, dy\, dz}{r^5} \right] +$$

$$3 \frac{P'_y - P_y}{d} \left[E \iiint_y \frac{xy^2\, dx\, dy\, dz}{r^5} + F \iiint_y \frac{xyz\, dx\, dy\, dz}{r^3} + \right.$$

$$\left. + H \iiint_y \frac{y^2 z\, dx\, dy\, dz}{r^5} \right] \qquad 41)$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(E \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + H \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$3 P_z \left[E \iiint_z \frac{xy\, dx\, dy\, dz}{r^5} + F \iiint_z \frac{xz\, dx\, dy\, dz}{r^5} + H \iiint_z \frac{yz\, dx\, dy\, dz}{r^5} \right] +$$

$$3 \frac{P'_z - P_z}{d} \left[E \iiint_z \frac{xyz\, dx\, dy\, dz}{r^5} + F \iiint_z \frac{xz^2\, dx\, dy\, dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + H \iiint_z \frac{yz^2\, dx\, dy\, dz}{r^5} \right]. \qquad 42)$$

Da $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, hat man bei den gegebenen Grenzen folgende Beziehungen:

$$\iiint_x \frac{xy\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_x \frac{xz\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_y \frac{yx\, dx\, dy\, dz}{r^5}$$

$$= \iiint_y \frac{yz\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_z \frac{zx\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_z \frac{zy\, dx\, dy\, dz}{r^5};$$

$$\iiint_x \frac{yz\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_y \frac{xz\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_z \frac{xy\, dx\, dy\, dz}{r^5};$$

$$\iiint_x \frac{x^2 y\, dx\, dy\, dz}{r^4} = \iiint_x \frac{x^2 z\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_y \frac{y^2 x\, dx\, dy\, dz}{r^5} =$$

$$\iiint_y \frac{y^2 z\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_z \frac{z^2 x\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_z \frac{z^2 y\, dx\, dy\, dz}{r^5};$$

$$\iiint_x \frac{xyz\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_y \frac{xyz\, dx\, dy\, dz}{r^5} = \iiint_z \frac{xyz\, dx\, dy\, dz}{r^5}.$$

Nun ist

$$\iiint_x \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \int_0^d x\,dx \int_{-\rho}^{+\rho} dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\iiint_x \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \int_0^d dx \int_{-\rho}^{+\rho} z\,dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\iiint_x \frac{x^2y\,dx\,dy\,dz}{r^5} \int_0^d x^2dx \int_{-\rho}^{+\rho} dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}};$$

$$\iiint_x \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{r^5} \int_0^d x\,dx \int_{-\rho}^{+\rho} z\,dz \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Da $\displaystyle\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{1}{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\Bigg|_{-\rho}^{+\rho} = 0$, ist der Werth obiger vier, somit auch sämmtlicher in 40) bis 42) vorkommender Integrale Null. Dadurch reduciren sich die Gleichungen 36) bis 38), so dass wir behalten:

$$U'_x = \int (V+U)_x \left(D\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw +$$
$$\iiint_x (V+U)_x \left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz \qquad (43)$$

$$U'_y = \int (V+U)_y \left(E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + G\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + H\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw +$$
$$\iiint_y (V+U)_y \left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz \qquad 44)$$

$$U'_z = \int (V+U)_z \left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + H\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + K\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw +$$
$$\iiint_z (V+U)_z \left(D\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + K\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz. \qquad 45)$$

Die noch vorkommenden dreifachen Integrale können nun noch ganz analog den Gleichungen 32 (I) bis 34 (I) geschrieben werden, wobei die Bedeutung der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ die daselbst gebrauchte ist:

$$\iiint_x (V+U)_x \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$
$$P_x[-(D+G+K)\mathfrak{A}+3D\mathfrak{B}+3(G+K)\mathfrak{C}]+$$
$$+\frac{P'_x-P_x}{d}[-(D+G+K)\mathfrak{M}+3D\mathfrak{N}+3(G+K)\mathfrak{P}] \tag{46}$$

$$\iiint_y (V+U)_y \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$
$$P_y[-(D+G+K)\mathfrak{A}+3G\mathfrak{B}+3(D+K)\mathfrak{C}]+$$
$$+\frac{P'_y-P_y}{d}[-(D+G+K)\mathfrak{M}+3G\mathfrak{N}+3(D+K)\mathfrak{P}] \tag{47}$$

$$\iiint_z (V+U)_z \left(D \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$
$$P_z[-(D+G+K)\mathfrak{A}+3K\mathfrak{B}+3(D+G)\mathfrak{C}]+$$
$$+\frac{P'_z-P_z}{d}[-(D+G+K)\mathfrak{M}+3K\mathfrak{N}+3(D+G)\mathfrak{P}]. \tag{48}$$

Der Kürze wegen schreibe ich die rechten Seiten dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} &P_x \,.\, M_x + \frac{P'_x-P_x}{d} N_x \\ &P_y \,.\, M_y + \frac{P'_y-P_y}{d} N_y \\ &P_z \; M_z + \frac{P'_z-P_z}{d} N_z \end{aligned} \tag{49}$$

und damit gehen die Gleichungen 43)—45) über in:

$$U'_x = \int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw +$$
$$+P_x \,.\, M_y + \frac{P'_x-P_x}{d} N_x \tag{50}$$

$$U'_y = \int (V+U)_y \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + G \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw + \\ + P_y \, . \, M_y + \frac{P'_y - P_y}{d} N_y \qquad 51)$$

$$U'_z = \int (V+U)_z \left(F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw + \\ + P_z \, . \, M_z + \frac{P'_z - P_z}{d} N_z . \qquad 52)$$

Es sind nun die einfachen Integrale auszurechnen. Zunächst ist

$$\int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw = \\ D \int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw + E \int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw + \\ + F \int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dw . \qquad 53)$$

Jedes dieser Integrale zerfällt in drei Theile; einen, welcher sich auf die linke Kreisfläche der dielektrischen Platte bezieht, was durch den Index 1 bezeichnet werden soll; einen zweiten, welcher sich auf die rechte Kreisfläche bezieht; diesen Theil versehe ich mit dem Index 2; endlich einen dritten, welcher sich auf die die beiden Kreisflächen verbindende Cylinderfläche bezieht; dieser Theil soll durch den Index 3 gekennzeichnet werden.

Da, von der Randwirkung abgesehen, auf die es bei diesen Betrachtungen auch gar nicht ankommt, alle Punkte je einer Condensatorplatte gleiches Potential haben, ist es gestattet, die Werthe der U' für die Mittelpunkte der beiden Condensatorplatten (kurz gesagt für: Mittelpunkte der Innenflächen der Condensatorplatten) zu bestimmen, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun. Ich berechne daher vorerst den Werth der Integrale in 53) für den Mittelpunkt der linken Condensatorplatte. Auf der linken Kreisfläche der dielektrischen Platten hat das Potential die constanten Werthe P_x, respective P_y und P_z. Der erste Theil des Integrals

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw$$

ist also

$$P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_1.$$

Ich denke mir nun vorläufig den Mittelpunkt der linken Condensatorplatte nicht in unmittelbarer Nähe der dielektrischen Platte, sondern nehme an, dass er in der im Mittelpunkt derselben nach Aussen errichteten Normalen um die beliebige Strecke λ entfernt liege. Irgend ein Punkt der dielektrischen Platte habe nun von der linken Kreisfläche den Abstand x (der Abstand ist ja bei der ersten Platte der X-Axe parallel), während seine Entfernung von der X-Axe l sein soll. Dann ist sein Abstand von dem definirten äusseren Punkte gegeben durch

$$r^2 = l^2 + (\lambda + x)^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\lambda + x}{[l^2 + (\lambda + x)^2]^{3/2}}.$$

Da wir aber den Werth des Differentialcoëfficienten $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ für die Kreisfläche selbst suchen, ist $x = 0$ zu setzen, woraus folgt:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\lambda}{(l^2 + \lambda^2)^{3/2}}.$$

Da ferner $dw_1 = 2\pi l dl$, ergibt sich also

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_1 = -2\pi P_x \int_0^\rho \frac{\lambda l dl}{(l^2+\lambda^2)^{3/2}} =$$

$$= -2\pi P_x \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}\right).$$

Nun ist aber der äussere Punkt der Mittelpunkt der linken Condensatorplatte, sein Abstand λ von der dielektrischen Platte also $= 0$, woraus endlich

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_1 = -2\pi P_x. \tag{54}$$

Um $\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2$ zu berechnen, ist vor Allem zu bedenken, dass das Potential $(V+U)_x$ auf der rechten Kreisfläche den constanten Werth P'_x hat. Es ist daher zunächst

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2 = P'_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2.$$

Die Entfernung eines von der rechten Kreisfläche um die Strecke x von der X-Axe um die Distanz l abstehenden Punktes vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist nun

$$r^2 = l^2 + (d-x)^2,$$

daher

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{d-x}{[l^2+(d-x^2)]^{3/2}}.$$

Dieser Differentialcoëfficient hat für die rechte Kreisfläche den Werth $\frac{d}{(l^2+d^2)^{3/2}}$; man erhält daher

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2 = 2\pi P'_x \int_0^\rho \frac{l.d\ dl}{(l^2+d^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi P'_x \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}}\right)$$

Da, wie in der ersten Abhandlung, $\frac{d}{\rho}$ vernachlässigt wird, verschwindet $\frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}}$, und es resultirt

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_2 = 2\pi P'_x. \tag{55}$$

Für irgend einen Punkt der Cylinderfläche, welcher von der linken Kreisfläche um die Distanz x absteht, hat $(V+U)_x$ den Werth $P_x + \frac{P'_x - P_x}{d} x$; es ist daher

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 + \frac{P'_x - P_x}{d} \int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3.$$

Das Oberflächenelement in diesem Integral ist gegeben durch $2\rho\pi . dx$. Die Entfernung eines von der linken Kreisfläche um die Strecke x abstehenden Punktes der Cylinderfläche vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte wird bestimmt durch die Gleichung

$$r^2 = \rho^2 + x^2,$$

aus welcher sich $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x}{(\rho^2+x^2)^{3/2}}$ ergibt.

Es ist daher zu berechnen:

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = -2\rho\pi \int_0^d \frac{xdx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}}$$

und

$$\int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = -2\rho\pi \int_0^d \frac{x^2dx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}}.$$

Man hat

$$\int_0^d \frac{xdx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+x^2}}\Bigg|_0^d = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+d^2}} + \frac{1}{\rho} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Ferner ist

$$\int_0^d \frac{x^2 dx}{\sqrt{\rho^2+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+x^2}}\Bigg|_0^d + \lg\left(x+\sqrt{\rho^2+x^2}\right)\Bigg|_0^d =$$

$$= \lg\left(\frac{d+\sqrt{\rho^2+d^2}}{\rho}\right).$$

Nun ist $\lg\left(\frac{d}{\rho}+\frac{\sqrt{\rho^2+d^2}}{\rho}\right)$ bei der gemachten Vernachlässigung von $\frac{d}{\rho} = \lg(1) = 0$, daher auch

$$\int_0^d \frac{x^2 dx}{(\rho^2+x^2)^{3/2}} = 0.$$

Es ergibt sich somit

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw_3 = 0. \qquad 56)$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen 54) bis 56) erhält man:

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dw = 2\pi(P'_x - P_x).* \qquad 57)$$

In gleicher Weise sind die übrigen Integrale zu berechnen. Man hat:

---

* Ich benütze die Gelegenheit, um eine Incorrectheit in der Abhandlung: »Zur Theorie der Dielektrica« zur Sprache zu bringen. Das daselbst vorkommende Integral $\int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw$ (und die entsprechenden beiden andern) ist irrthümlicherweise mit dem von Clausius (Die mechanische Wärmetheorie, 2. Aufl., 2. Bd., S. 80, Gl. 29) behandelten identificirt worden, so dass $2\pi(P'_a - P_a)\left(1-\frac{1}{2}\frac{d}{\rho}\right)$ als sein Werth angegeben wurde, während sein wirklicher Werth, wie die obige Berechnung zeigt, $2\pi(P'_a - P_a)$ ist. Da die Grösse $\frac{d}{\rho}$ vernachlässigt wird, gelangte ich allerdings zu demselben Werthe, so dass die Resultate jener Arbeit durch dieses Versehen nicht alterirt werden.

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_1 = P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_1.$$

Würde man aber hier abermals $dw_1 = 2\pi l dl$ als Oberflächenelement einführen, so käme man auf das Integral $\int_0^\rho \frac{dl}{l}$, welches keinen bestimmten Werth hat. Ich verfahre daher folgendermassen: Irgend ein Punkt der linken Kreisfläche habe die Coordinaten y und z. Sein Abstand vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist dann gegeben durch

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

daher

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

und

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_1 = -\int_{-\rho}^{+\rho} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\, dy\, dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

Nun ist $-\int \frac{y dy}{(y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2+z^2}$. Setzt man die Grenzen ein, so folgt unmittelbar $\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y dy}{(y^2+z^2)^{3/2}} = 0$, also auch

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_1 = 0. \qquad 58)$$

Ferner ist

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2 = P_x' \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2.$$

Ein Punkt der rechten Kreisfläche mit den Coordinaten y und z hat von dem Mittelpunkt der linken Condensatorplatte einen Abstand, welcher bestimmt ist durch

$$r^2 = y^2 + z^2 + d^2,$$

daher

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y}{(y^2+z^2+d^2)^{3/2}}$$

Man sieht also, dass auch

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2 = -\int_{-\rho}^{+\rho}\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{y\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0,$$

daher

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dw_2 = 0. \tag{59}$$

Um den für die Cylinderfläche geltenden Theil des Integrals zu berechnen, nehme ich auf der Cylinderfläche im Abstand x von der linken Kreisfläche einen Punkt, dessen andere Coordinaten y und z sind. Sein Abstand vom Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist dann gegeben durch

$$r^2 = x^2+y^2+z^2,$$

wobei

$$y^2+z^2 = \rho^2$$

sein muss.

Es ist sonach

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{y}{(x^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Führe ich für y und z Polarcoordinaten ein, so dass

$$y = \rho \cos \varphi$$

$$z = \rho \sin \varphi,$$

so ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{\rho \cos \varphi}{(x^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Das Oberflächenelement ist dann $dw_3 = \rho\, d\varphi\, dx$ und

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dw_3 = P_x \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dw_3 + \frac{P'_x - P_x}{d} \int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dw_3$$

$$= -\rho^2 P_x \int_0^d \frac{dx}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$-\rho^2 \frac{P'_x - P_x}{d} \int_0^d \frac{x\, dx}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi.$$

Da nun $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$, folgt also

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dw_3 = 0. \tag{60}$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen 58) bis 60) ergibt sich endlich

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dw = 0. \tag{61}$$

Da sich bei der ersten Platte nichts ändert, wenn y mit z vertauscht wird, muss daher auch die Gleichung bestehen:

$$\int (V+U)_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dw = 0. \tag{62}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 57), 61) und 62) resultirt daher

$$\int (V+U)_x \left(D \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw = 2\pi D (P'_x - P_x). \tag{63}$$

Ebenso wird man finden:

$$\int (V+U)_y \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + G \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dw =$$

$$= 2\pi G (P'_y - P_y). \tag{64}$$

$$\int (V+U)_z \left(F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + H \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dw = 2\pi K (P'_z - P_z). \quad (65)$$

Die Gleichungen 50) bis 52) nehmen in Folge dessen eine bedeutend einfachere Gestalt an. Da der Punkt, für welchen wir die U' bestimmt haben, der Mittelpunkt der linken Condensatorplatte ist, deren Potentiale durch ungestrichelte Buchstaben gekennzeichnet werden sollen, werden wir U anstatt U' zu schreiben haben, und erhalten:

$$\begin{aligned} U_x &= 2\pi D (P'_x - P_x) + M_x P_x + \frac{P'_x - P_x}{d} N_x \\ U_y &= 2\pi G (P'_y - P_y) + M_y P_y + \frac{P'_y - P_y}{d} N_y \qquad 66) \\ U_z &= 2\pi K (P'_z - P_z) + M_z P_z + \frac{P'_z - P_z}{d} N_z. \end{aligned}$$

An diese Gleichungen sind nun dieselben Überlegungen zu knüpfen wie an die Gleichung 42 (I). Bezeichne ich die Dielektricitätsconstanten der drei Platten mit D_x, D_y, D_z, so werden daher gemäss 47 (I) und 48 (I) die Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} D_x &= 1 + 4\pi D - \left(M_x - \frac{2N_x}{d} \right) \\ D_y &= 1 + 4\pi G - \left(M_y - \frac{2N_y}{d} \right) \qquad 67) \\ D_z &= 1 + 4\pi K - \left(M_z - \frac{2N_z}{d} \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gehen aus den Gleichungen 47 (I) und 48 (I) unmittelbar hervor, wenn man die Constanten E_1, E_2, E_3 welche in ihnen auftreten, bezüglich durch die Constanten D, G, K ersetzt. Man wird daher gemäss Gleichung 50 (I) mit Beibehaltung der daselbst gebrauchten Bezeichnungen weiter schreiben können:

$$\begin{aligned} 4\pi D + D(\alpha - 3\beta) + G(\alpha - 3\gamma) + K(\alpha - 3\gamma) &= D_x - 1 \\ 4\pi G + D(\alpha - 3\gamma) + G(\alpha - 3\beta) + K(\alpha - 3\gamma) &= D_y - 1 \qquad 68) \\ 4\pi K + D(\alpha - 3\gamma) + G(\alpha - 3\gamma) + K(\alpha - 3\beta) &= D_z - 1 \end{aligned}$$

Es wurde ferner in jener Abhandlung gezeigt, dass $\alpha - 3\beta = \alpha - 3\gamma = 0$, so dass die Gleichungen 68) die einfache Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} D_x &= 1+4\pi D \\ D_y &= 1+4\pi G \\ D_z &= 1+4\pi K. \end{aligned} \tag{69}$$

Es ist nun Zeit, sich an die Bedeutung der Constanten D, G, K zu erinnern. Aus den Gleichungen 19) bis 24) ersieht man, dass

$$\begin{aligned} D &= \frac{N}{3J(1-g)}(a^3 \cos^2 \alpha_1 + b^3 \cos^2 \beta_1 + c^3 \cos^2 \gamma_1) \\ G &= \frac{N}{3J(1-g)}(a^3 \cos^2 \alpha_2 + b^3 \cos^2 \beta_2 + c^3 \cos^2 \gamma_2) \\ K &= \frac{N}{3J(1-g)}(a^3 \cos^2 \alpha_3 + b^3 \cos^2 \beta_3 + c^3 \cos^2 \gamma_3); \end{aligned} \tag{70}$$

nun geben aber die Gleichungen 18 (I) die Beziehungen

$$\frac{a^3 N}{3\,J(1-g)} = E_1, \quad \frac{b^3 N}{3\,J(1-g)} = E_2, \quad \frac{c^3 N}{3\,J(1-g)} = E_3,$$

so dass die Gleichungen 70) auch geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} D &= E_1 \cos^2 \alpha_1 + E_2 \cos^2 \beta_1 + E_3 \cos^2 \gamma_1 \\ G &= E_1 \cos^2 \alpha_2 + E_2 \cos^2 \beta_2 + E_3 \cos^2 \gamma_2 \\ K &= E_1 \cos^2 \alpha_3 + E_2 \cos^2 \beta_3 + E_3 \cos^2 \gamma_3. \end{aligned}$$

In Gleichung 69) eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned} D_x &= 1+4\pi E_1 \cos^2 \alpha_1 + 4\pi E_2 \cos^2 \beta_1 + 4\pi E_3 \cos^2 \gamma_1 \\ D_y &= 1+4\pi E_1 \cos^2 \alpha_2 + 4\pi E_2 \cos^2 \beta_2 + 4\pi E_3 \cos^2 \gamma_2 \\ D_z &= 1+4\pi E_1 \cos^2 \alpha_3 + 4\pi E_2 \cos^2 \beta_3 + 4\pi E_3 \cos^2 \gamma_3. \end{aligned}$$

Da allgemein $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, können wir diese Gleichungen auch schreiben

$$\begin{aligned} D_x &= (1+4\pi E_1) \cos^2 \alpha_1 + (1+4\pi E_2) \cos^2 \beta_1 + (1+4\pi E_3) \cos^2 \gamma_1 \\ D_y &= (1+4\pi E_1) \cos^2 \alpha_2 + (1+4\pi E_2) \cos^2 \beta_2 + (1+4\pi E_3) \cos^2 \gamma_2 \\ D_z &= (1+4\pi E_1) \cos^2 \alpha_3 + (1+4\pi E_2) \cos^2 \beta_3 + (1+4\pi E_3) \cos^2 \gamma_3 \end{aligned}$$

Die Klammergrössen sind nun, wie die Gleichungen 53 (I) zeigen, nichts Anderes als die Hauptdielektricitätsconstanten D_a, D_b, D_c, so dass wir weiter schreiben können:

$$
\begin{aligned}
D_x &= D_a \cos^2 \alpha_1 + D_b \cos^2 \beta_1 + D_c \cos^2 \gamma_1 \\
D_y &= D_a \cos^2 \alpha_2 + D_b \cos^2 \beta_2 + D_c \cos^2 \gamma_2 \\
D_c &= D_a \cos^2 \alpha_3 + D_b \cos^2 \beta_3 + D_c \cos^2 \gamma_3 .
\end{aligned}
\tag{71}
$$

D_x war die Dielektricitätsconstante der Substanz für den Fall, dass die Kraft parallel der X-Axe war; dann sind aber $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel, welche die Kraft, somit auch die Richtung, nach welcher die Dielektricitätsconstante bestimmt wurde, mit den Axen des Ellipsoids, also auch mit den Richtungen der Hauptdielektricitätsconstanten einschliesst. Dieselbe Bemerkung gilt bezüglich D_y und D_z. Die drei Gleichungen in 71) sagen also alle dasselbe aus, wie es auch sein muss. Sie geben die gesuchte Beziehung zwischen der Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung und den Hauptdielektricitätsconstanten. Bezeichnen wir die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung r mit D_r, die Hauptdielektricitätsconstanten mit D_a, D_b, D_c, ihre Richtungen (die Ellipsoidaxen) mit a, b, c, so ist die gesuchte Beziehung niedergelegt in der Gleichung:

$$
D_r = D_a \cos^2 (a, r) + D_b \cos^2 (b, r) + D_c \cos^2 (c, r). \tag{72}
$$

Aus den Gleichungen 71) lässt sich noch ein weiterer Satz ableiten: Wenn man sie nämlich addirt, so erhält man die Gleichung:

$$
D_x + D_y + D_z = D_a + D_b + D_c . \tag{73}
$$

D_x, D_y, D_z sind die Dielektricitätsconstanten nach drei auf einander senkrechten Richtungen. In der Gleichung 73) kommen aber die Winkel, welche die Lage dieser Richtungen gegenüber den Richtungen der Hauptdielektricitätsconstanten angeben, nicht mehr vor; die Gleichung gibt also den Satz:

Die Summe der Dielektricitätsconstanten nach beliebigen drei auf einander senkrechten Richtungen ist stets gleich der Summe der Hauptdielektricitätsconstanten; oder in anderen Worten:

Die Summe der Dielektricitätsconstanten nach beliebigen drei aufeinander senkrechten Richtungen ist für jedes anisotrope (optisch zweiaxige) Medium eine constante Grösse.

Für ein Medium, welches nur zwei Hauptdielektricitätsconstanten besitzt (also ein optisch einaxiges), werden in Gleichung 72) zwei Glieder zusammenzuziehen sein. In der Klammer steht dann die Summe zweier Cosinusquadrate, welche gleich ist dem Quadrat des Cosinus jenes Winkels, welchen die Richtung r mit der Ebene einschliesst, für welche die Dielektricitätsconstante constant ist; dieser Winkel ist daher auch der Winkel der Richtung mit dieser betreffenden Hauptdielektricitätsconstante. Bezeichnet man daher die grössere Hauptdielektricitätsconstante mit D_g, die kleinere mit D_k, ihre Richtungen entsprechend mit g und k, so folgt:

$$D_r = D_g \cos^2(g, r) + D_k \cos^2(k, r). \tag{74}$$

Gleichung 73) geht entsprechend für diesen Fall über in

$$D_x + D_y = D_g + D_k. \tag{75}$$

III.

Die in der ersten und in der vorliegenden Abhandlung durchgeführte Hypothese ellipsoidischer Molekel, welche auch von Stefan [Zur Theorie der magnetischen Kräfte. Diese Sitzungsberichte 69 (2), 1874] zur Sprache gebracht worden ist, ist auch ansreichend, um die Erscheinungen der Doppelbrechung zu erklären. Dies soll noch gezeigt werden.

Die Gleichung 72) ermöglicht eine einfache Construction. Die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Irgend ein Radiusvector, welcher die Oberfläche in dem Punkte x, y, z schneidet, ist gegeben durch

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

die Winkel, welche er mit den Axen einschliesst, sind bestimmt durch

$$\cos(a,r) = \frac{x}{r}, \cos(b,r) = \frac{y}{r}. \cos(c,r) = \frac{z}{r}.$$

Es ist daher auch

$$x = r\cos(a,r), \quad y = r\cos(b,r), \quad z = r\cos(c,r).$$

Trägt man diese Werthe in die Gleichung des Ellipsoides ein, so folgt

$$\frac{\cos^2(a,r)}{a^2} + \frac{\cos^2(b,r)}{b^2} + \frac{\cos^2(c,r)}{c^2} = \frac{1}{r^2}. \tag{76}$$

Vergleicht man mit dieser Relation die Gleichung 72), so sieht man, dass D_r, die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung, gegeben ist durch den reciproken Werth des Quadrates des Radiusvectors, welcher in einem dreiaxigen Ellipsoid mit den Halbaxen $a = \frac{1}{\sqrt{D_a}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{D_b}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{D_c}}$ in derselben Richtung gezogen wird; es wird dann in der That $D_r = \frac{1}{r^2}$. Die Gleichung dieses Ellipsoids lautet somit

$$D_a x^2 + D_b y^2 + D_c z^2 = 1. \tag{77}$$

Nun ist nach der elektromagnetischen Lichttheorie

$$D_a = \alpha^2, \quad D_b = \beta^2, \quad D_c = \gamma^2,$$

wenn α, β, γ die Hauptbrechungsquotienten des anisotropen Mediums bedeuten. Bezeichnen wir ferner die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum mit v, die Lichtgeschwindigkeit nach den Hauptrichtungen mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ (wobei wegen $\alpha > \beta > \gamma$ $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$), so wird, da $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gleiche Richtung mit a, b, c haben, Gleichung 72) übergehen in

$$\frac{v^2}{\mathfrak{a}^2}\cos^2(\mathfrak{a},r) + \frac{v^2}{\mathfrak{b}^2}\cos^2(\mathfrak{b},r) + \frac{v^2}{\mathfrak{c}^2}\cos^2(\mathfrak{c},r) = D_r, \text{ d. i. weiter}$$

$$\frac{\cos^2(\mathfrak{a},r)}{\mathfrak{a}^2} + \frac{\cos^2(\mathfrak{b},r)}{\mathfrak{b}^2} + \frac{\cos^2(\mathfrak{c},r)}{\mathfrak{c}^2} = \frac{D_r}{v^2}. \tag{78}$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet nun gemäss 76) das reciproke Quadrat eines Radiusvectors in einem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{c}^2}=1, \qquad 79)$$

welcher mit den Axen die Winkel $(\mathfrak{a}, r)$, $(\mathfrak{b}, r)$, $(\mathfrak{c}, r)$ einschliesst. Bezeichne ich diesen Radiusvector mit $\mathfrak{s}$, so muss

$$\frac{\cos^2(\mathfrak{a}, r)}{\mathfrak{a}^2}+\frac{\cos^2(\mathfrak{b}, r)}{\mathfrak{b}^2}+\frac{\cos^2(\mathfrak{c}, r)}{\mathfrak{c}^2}=\frac{1}{\mathfrak{s}^2},$$

respective, wie der Vergleich mit Gleichung 74) lehrt:

$$\frac{D_r}{v^2}=\frac{1}{\mathfrak{s}^2},$$

also

$$D_r=\frac{v^2}{\mathfrak{s}^2} \qquad 80)$$

sein, d. h. da Gleichung 75) die Gleichung des Ergänzungsellipsoides, $\mathfrak{s}$ daher eine Strahlengeschwindigkeit ist: Die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung erscheint nicht durch eine Wellen-, sondern durch eine Strahlengeschwindigkeit bestimmt.

Ich kann jedoch diesen Satz nicht aussprechen, ohne daran zu erinnern, dass die Untersuchung, deren Endergebniss er ist, die Bestimmung der Dielektricitätsconstante mittelst statischer Ladungen vorausgesetzt hat. Das gewonnene Resultat lässt also noch immer die Möglichkeit offen, dass die Wellengeschwindigkeit auch in anderen als in den Hauptrichtungen, in welchen sie ja mit der Strahlengeschwindigkeit zusammenfällt, in einer Beziehung steht zu dem dielektrischen Verhalten der Substanz, falls dasselbe mit Hertz'schen Schwingungen von sehr kurzer Wellenlänge geprüft wird; mit anderen Worten: der obige Satz leitet zu der vorerst als Frage auszusprechenden Vermuthung, ob nicht die Bestimmung der Dielektricitätsconstante ausser den Hauptrichtungen mit relativ kurzen elektrischen Wellen einen anderen Werth ergibt als die Bestimmungen derselben mit statischen Ladungen, derart, dass die nach der ersten Methode bestimmte Dielektricitätsconstante der Wellen-, die nach der zweiten bestimmte der Strahlengeschwindigkeit zugeordnet wäre.

Ich beabsichtige, diese Vermuthung zunächst auf theoretischem Wege zu untersuchen, glaube jedoch, dass eine experimentells Prüfung nicht auf übermässige Schwierigkeiten stossen würde. Ein Unterschied der Werthe bei den zweierlei Bestimmungen darf erst erwartet werden, wenn die elektrischen Wellen gegenüber der Dicke der zu untersuchenden Platte klein sind; denn nur in diesem Falle werden in der Platte ununterbrochen entgegengesetzte Polarisationszustände gleichzeitig existiren. Mit Hilfe der Lebedew'schen Anordnung[1] können Wellen von 0·6 *cm* Länge erzeugt werden, während anderseits entsprechend dickere Platten aus Kalkspath mit der geeigneten Orientirung der Axen unschwer herzustellen sein dürften.

Der durch Gleichung 80) ausgesprochene Satz betrifft, wie gesagt, die auf statischem Wege bestimmte Dielektricitätsconstante für alle Fälle. Die durch ihn ausgesprochene Beziehung gilt naturgemäss auch für die Hauptrichtungen. Der Hauptdielektricitätsconstante D_a ist die Hauptgeschwindigkeit $\mathfrak{a}$ zugeordnet. Aus der Definition des Ergänzungsellipsoides folgt, dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ nur solchen Strahlen zukommen kann, welche in der $\mathfrak{bc}$-Ebene liegen. Dort kommt auch anderseits, wie die Definition des Polarisationsellipsoides ergibt, die Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ Wellen zu, deren Normalen in der $\mathfrak{bc}$-Ebene liegen. Man kann somit der Hauptdielektricitätsconstante D_a sowohl eine zu ihr senkrechte Ebene von Strahlen, als auch eine solche von Wellennormalen zuordnen. Dasselbe folgt auch für die beiden anderen Hauptdielektricitätsconstanten, doch gilt das nicht mehr für jede andere Richtung. Wenn wir die Dielektricitätsconstante mit statischen Ladungen (oder auch mit relativ langen Wellen) bestimmen, so steht sie in Beziehung zu einer Strahlengeschwindigkeit, welche in dem Ergänzungsellipsoid durch Construction des Radiusvector in der Richtung der fraglichen Dielektricitätsconstante zu finden ist. Diese

---

[1] P. Lebedew, Über die Doppelbrechung der Strahlen elektrischer Kraft. Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 56, S. 1, 1895.

Geschwindigkeit kann nur Strahlen zukommen, welche in einer zu dieser Richtung senkrechten Ebene liegen. Die Gleichung 80) kann daher auch ausgesprochen werden durch den Satz: Der auf statischem Wege bestimmten Dielektricitätsconstante ist eine zu der Richtung, in welcher sie bestimmt wird, senkrechte Ebene zugeordnet, welche der geometrische Ort aller Strahlen ist, deren eine im Ergänzungsellipsoid mit der Richtung der Dielektricitätsconstante gleich gelagerte Geschwindigkeit die Maxwell'sche Beziehung erfüllt.

Für die hypothetische, von der auf statischem Wege bestimmten verschiedenen Dielektricitätsconstante, welche zu ihrer Bestimmung die Anwendung relativ kurzer elektrischer Schwingungen voraussetzt, würde ein analoger Satz gelten, welcher aus dem soeben ausgesprochenen erhalten wird, wenn die Worte Strahl und Ergänzungsellipsoid durch die Worte Wellennormale, respective Polarisationsellipsoid ersetzt werden.

Beide Sätze behalten selbstverständlich auch für isotrope Medien Giltigkeit, in welchen Strahl und Wellennormale stets zusammenfallen, während das Ergänzungs- und das Polarisationsellipsoid in eine Kugel übergehen. Des Weiteren sieht man aber auch, dass in isotropen Medien in beliebigen, in anisotropen in den Hauptrichtungen die auf statischem Wege bestimmte Dielektricitätsconstante mit der mit relativ kurzen Schwingungen bestimmten, von ihr im Allgemeinen hypothetisch verschiedenen zusammenfallen.

Die Beziehung zwischen der auf statischem Weg bestimmten Dielektricitätsconstante und dem Quotienten, welcher aus der Strahlengeschwindigkeit im leeren Raum und der der Dielektricitätsconstante zugeordneten Strahlengeschwindigkeit gebildet wird, führt in ihrer Anwendung auf Gleichung 72), wie gezeigt wurde, unmittelbar zu dem Ergänzungsellipsoid, von welchem aus bekanntlich die Wellenfläche durch eine einfache Construction erhalten werden kann. Damit ist aber auch der Beweis erbracht, dass die Hypothese der ellipsoidförmigen Molekel ausreichend ist, um die Erscheinungen der Doppelbrechung von moleculartheoretischem Gesichtspunkt aus zu begreifen.

Wären uns ellipsoidische Molekel mit bestimmten Axenlängen gegeben, würde uns ferner die Zahl derselben pro Volumeinheit festgesetzt, so könnten wir zu Folge der Gleichung 54 (I) sofort die Hauptdielektricitätsconstanten eines aus ihnen aufzubauenden anisotropen Mediums angeben. Mit Hilfe der oben dargelegten Beziehungen liessen sich dann weiter alle für die Erscheinungen der Doppelbrechung massgebenden Grössen, Hauptbrechungsquotienten, Lage der optischen Axen und so fort ableiten, d. h. das dielektrische und optische Verhalten des Mediums wäre bis auf die Dispersion auf rein geometrische Bestimmungsstücke zurückgeführt.

Gleichung 72) führt, wie ihrer Beziehung zum Ergänzungsellipsoid entspricht, direct zu den secundären optischen Axen. Wir können fragen, ob nicht in jedem anisotropen Medium Ebenen angebbar sind, in welchen die Dielektricitätsconstante unveränderlich ist. Zur Beantwortung dieser Frage betrachte ich das Ellipsoid, welches zur constructiven Bestimmung der auf statischem Weg ermittelten Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung dient (Gleichung 77):

$$D_a x^2 + D_b y^2 + D_c z^2 = 1.$$

Die analytische Geometrie lehrt, dass im Allgemeinen zwei verschiedene Systeme paralleler Ebenen existiren, welche ein dreiaxiges Ellipsoid in Kreisen schneiden. Alle diese Ebenen stehen senkrecht auf der Ebene der grössten und kleinsten Axe, die Winkel θ_1 und θ_2, welche sie mit der grössten, in unserem Fall der c-Axe, einschliessen, sind gegeben durch $\sin\theta_{1,2} = \pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$. Die Winkel also, welche zwei durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehende Gerade, deren je eine zu je einem der genannten Ebenensysteme senkrecht ist, mit der c-Axe einschliessen, sind im Allgemeinen $\varphi = 90-\theta$, daher

$$\cos\varphi = \pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

In unserem Falle ist

$$a^2 = \frac{1}{D_a},\; b^2 = \frac{1}{D_b},\; c^2 = \frac{1}{D_c},$$

somit

$$\cos^2 \varphi = \frac{\frac{1}{D_a} \quad \frac{1}{D_b} - \frac{1}{D_c}}{\frac{1}{D_b} \quad \frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_c}} \tag{82}$$

Die auf statischem Wege bestimmte Dielektricitätsconstante in jeder beliebigen Richtung, welche zu den durch $\cos^2 \varphi$ bestimmten zwei Richtungen senkrecht ist, wird einen constanten, und zwar den Werth D_b haben, da zu Folge der analytischen Geometrie derjenige Schnittkreis des dreiaxigen Ellipsoids, dessen Mittelpunkt mit dem Ellipsoidmittelpunkt zusammenfällt, die mittlere Halbaxe des Ellipsoids zum Radius hat.

Für die auf statischem Weg bestimmte Dielektricitätsconstante D_φ in den durch $\cos \varphi$ angegebenen Richtungen finden wir daher gemäss 73)

$$D_\varphi + D_b = D_a + D_b + D_c$$
$$D_\varphi = D_a + D_c - D_b.$$

Mit Hilfe der Gleichungen

$$D_a = \frac{v^2}{\mathfrak{a}^2}, \; D_b = \frac{v^2}{\mathfrak{b}^2} \quad D_c = \frac{v^2}{\mathfrak{c}^2}$$

kann man noch $\cos^2 \varphi$ in die Form bringen:

$$\cos^2 \varphi = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} \quad \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2},$$

dies ist aber die Bestimmungsgleichung für die Winkel, welche die secundären optischen Axen mit der Richtung der grössten Hauptgeschwindigkeit ($\mathfrak{c}$) einschliessen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Lampa Anton

Artikel/Article: Über die Bestimmung der Dielektricitätsconstante eines anisotropen Stoffes nach einer beliebigen Richtung aus den Dielektrieitätsconstanten nach den Hauptrichtungen. 1179-1215