

Notiz betreffend die Säcularacceleration des Mondes

Dr. **E.** Freiherrn **v. Haerdtl,**

a. ö. Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

Durch die schönen Untersuchungen Adam's und Delauney's erscheint es ausser Zweifel gestellt, dass der Coëfficient jenes Theiles der Säcularacceleration des Mondes, welcher aus der Berücksichtigung der Variabilität der Erdbahnexcentricität resultirt, zu $6\rlap{.}''18$ angenommen werden muss. Newcomb und Tisserand haben weiter gezeigt, dass man auch mit diesem aus der Theorie gewonnenen Werthe zu einer befriedigenden Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen des Mondes und der Theorie gelangt, so lange man erstlich sich darauf beschränkt, nur die neueren und genaueren Mondbeobachtungen darzustellen, ferner ein periodisches Correctionsglied, dessen Periode mit rund 300 Jahren angenommen werden müsste, zu Hilfe nimmt. Wie ferner aus den letztgenannten Untersuchungen resultirt, lassen sich auch die Finsternisse des Ptolemäus und der Araber mit dem aus der Theorie resultirenden Werthe der Säcularacceleration befriedigend darstellen, doch bedarf es noch einer eingehenderen Untersuchung, um die von Hansen gemachte Bemerkung, dass die chronologischen Finsternisse nur mit einem viel grösseren Werthe des Coëfficienten der Säcularacceleration dargestellt werden könnten, als widerlegt betrachten zu können.

Ich habe mich vielfach, doch vergeblich bemüht, die Quelle jenes langperiodischen Störungsgliedes aufzufinden, das der Vergleich der Mondbeobachtungen des letzten Jahrhunderts mit der Theorie in so auffälliger Weise hervortreten lässt, dass ein Zweifel an der wirklichen Existenz eines solchen Gliedes kaum möglich erscheint. Anlässlich dieser Untersuchungen bin ich aber zu einer Quelle gelangt, aus welcher ein weiterer Beitrag zum Coëfficienten der Säcularacceleration des Mondes fliesst, der diesen Coëfficienten um ungefähr $^1/_{30}$ vergrössert.

Jener Theil der Störungsfunction, den man heranzuziehen hat, sofern man den Einfluss der Erdabplattung auf die Mondbewegung in Rechnung ziehen will, lässt sich bekanntlich so schreiben:

$$R = \frac{fM}{r}\left(\frac{a_1}{r}\right)^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\chi\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2 D\right),$$

wo M die Erdmasse, a_1 den Äquatorialradius des Erdkörpers, α dessen Abplattung, χ das Verhältniss der Centrifugalkraft am Äquator zur zugehörigen Schwere, D die Declination des Mondes, endlich r dessen Distanz vom Erdcentrum bedeuten. Mit Rücksicht auf die bekannten Relationen:

$$\begin{aligned}
\sin D &= \sin \varepsilon[\cos(\nu-\Theta)\sin\Theta + \sin(\nu-\Theta)\cos\Theta\cos\varphi] + \\
&\qquad + \cos\varepsilon\sin(\nu-\Theta)\sin\varphi \\
r &= a[1 - e\cos(l-\bar{\omega})] \\
\nu &= l + 2e\sin(l-\bar{\omega}),
\end{aligned}$$

wo ε für die Schiefe der Ekliptik, φ für die Neigung der Mondbahn, Θ für die Länge des Mondknotens geschrieben erscheint, liefert aber die Entwicklung von R sofort für den nichtperiodischen Theil:

$$R = \left(\alpha - \frac{1}{2}\chi\right) fM \left(\frac{a_1^2}{a^3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon\right).$$

Da uns hier nur jenes Glied in R interessirt, das die Schiefe der Ekliptik enthält, können wir das erste Glied in der Klammer sofort weglassen. Schreiben wir weiter der Kürze halber: $\left(\alpha - \frac{1}{2}\chi\right) = \varkappa$, ersetzen ferner fM durch n^2a^3, so liefert die bekannte Relation:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{2}{4a}\frac{\partial R}{\partial a}$$

sofort

$$\frac{dL}{dt} = -3\varkappa\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 n \sin^2 \varepsilon. \tag{I}$$

Die jährliche säculare Variation der Schiefe der Ekliptik lässt sich in der Form schreiben:

$$\delta\varepsilon = \omega t = -0''47594\, t.$$

Lässt man nun in dem früheren Ausdruck (I) die Schiefe der Ekliptik um $\delta\varepsilon$ variiren, so liefert die durchgeführte Integration sogleich:

$$\delta L = -\frac{3}{2}\varkappa\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 \sin 2\varepsilon \,.\, \omega \,.\, n \,.\, t^2.$$

Substituirt man für die hier auftretenden Constanten die entsprechenden Werthe ($\log \varkappa = 7.2100$, $\log\left(\frac{a_1}{a}\right) = 8.2199$) und führt als Zeiteinheit gleich das Jahrhundert ein, so resultirt schliesslich:

$$\delta L = +0\;\;196\left(\frac{t}{100}\right)^2$$

Wie schon erwähnt, ergibt die Theorie für denjenigen Theil der Säcularacceleration des Mondes, der aus der Berücksichtigung der Variation der Erdbahnexcentricität resultirt, den Betrag: $+6\;\;18$. Addirt man zu diesem Werth das oben erhaltene Increment, so ergibt sich der theoretische Werth der Säcularacceleration demnach zu:

$$\delta L = (+6''18 + 0''20)\left(\frac{t}{100}\right)^2 = +6''38\left(\frac{t}{100}\right)^2$$

Im Anschluss an die eben gemachte Bemerkung sei hier noch erwähnt, dass es eine weitere Quelle gibt, aus der sehr bemerkbare Incremente zum Coëfficienten der Säcularacceleration des Mondes resultiren. Diese einzelnen Incremente, welche Beträge von mehreren Secunden erreichen, heben sich aber zusammengefasst vollkommen auf. Sofern ich mich nicht täusche, ist dieser Quelle noch keine Erwähnung geschehen, und so scheint es vielleicht nicht überflüssig, trotz des negativen Charakters des Resultates doch einigen Bemerkungen zu diesem Gegenstande hier Raum zu geben.

Bezeichnet man mit $e\,e'e''$ die Excentricitäten beziehungsweise des Mondes, der Erde und eines beliebigen Planeten, mit $L\,L'L''$ die entsprechenden mittleren Längen, mit $\varpi\,\varpi'\varpi''$ die Perihellängen, mit M beziehungsweise den Quotienten $\left(\frac{m''}{m'}\right)$ oder $\left(\frac{m''}{m'}\right)\alpha^3$, je nachdem der störende Planet ein innerer oder äusserer sei, so liefert uns die Entwicklung der Störungsfunction, welche uns die directe Einwirkung des Planeten auf den Mond darstellt, bei Beschränkung auf die Glieder niedrigster Ordnung folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
R = Ma^2n'^2\{ & C_1\,e'e''\cos(2L-2L'-\varpi'+\varpi'') \\
& +C_2\,e'e''\cos(2L-2L'+\varpi'-\varpi'') \\
& -3\,C_1\,ee'e''\cos(L+\varpi-2L'-\varpi'+\varpi'') \\
& -3\,C_2\,ee'e''\cos(L+\varpi-2L'+\varpi'-\varpi'') \\
& +C_1\,ee'e''\cos(3L-\varpi-2L'-\varpi'+\varpi'') \\
& +C_2\,ee'e''\cos(3L-\varpi-2L'+\varpi'-\varpi'') \\
& +C_3\,e''\cos(2L-L'-\varpi'') \\
& +C_4\,e''\cos(2L-3L'+\varpi'') \\
& -3\,C_3\,ee''\cos(L+\varpi-L'-\varpi'') \\
& -3\,C_4\,ee''\cos(L+\varpi-3L'+\varpi'') \\
& +C_3\,ee''\cos(3L-\varpi-L'-\varpi'') \\
& +C_4\,ee''\cos(3L-\varpi-3L'+\varpi'') \\
& +C_5\,ee'e''\cos(L-\varpi-\varpi'+\varpi'') \\
& +C_5\,ee'e''\cos(L-\varpi+\varpi'-\varpi'') \\
& +C_6\,ee''\cos(L-\varpi-L'+\varpi'') \\
& +C_6\,ee''\cos(L-\varpi+L'-\varpi'')\}
\end{aligned}$$

in welchem Ausdruck die C_i leicht zu ermittelnde Constante vorstellen, welche aber selbstverständlich für jeden Planeten einen anderen numerischen Werth haben. Mit Hilfe dieses Ausdruckes ist es nun ein Leichtes, jene Differentialgleichung aufzustellen, deren Integration uns die Störungen erster Ordnung der Mondelemente durch den störenden Planeten liefern wird.

Wir wollen diese Operationen hier nicht durchführen, sondern nur in allgemeiner Weise annehmen, dass dieselben ergeben hätten:

$$\frac{\delta a}{a} = A \cos D \quad e\delta\varpi = P \sin D \quad \delta e = E \cos D \quad \delta l = L \sin D,$$

wo für D der Reihe nach obige Argumente zu substituiren wären.

Gehen wir aber jetzt auf jene Störungsfunction R_0 über, welche uns den störenden Einfluss der Sonne auf den Mond darstellt:

$$\begin{aligned} R_0 = a^2 n'^2 \Big\{ & + \frac{3}{4} \cos(2L-2L') \\ & - \frac{3}{8} e' \cos(2L-L'-\varpi') \\ & + \frac{21}{8} e' \cos(2L-3L'+\varpi') \\ & - \frac{9}{4} e \cos(L+\varpi-2L') \\ & + \frac{3}{4} e \cos(3L-\varpi-2L') \\ & + \frac{9}{8} ee' \cos(L+\varpi-L'-\varpi') \\ & - \frac{63}{8} ee' \cos(L+\varpi-3L'+\varpi') \\ & - \frac{3}{8} ee' \cos(3L-\varpi-L'-\varpi') \\ & + \frac{21}{8} ee' \cos(3L-\varpi-3L'+\varpi') \\ & - \frac{1}{2} e \cos(L-\varpi) \\ & - \frac{3}{4} ee' \cos(L-\varpi-L'+\varpi') \Big\} \end{aligned}$$

und bilden hier in bekannter Weise wieder jene Differentialgleichung, welche integrirt uns die Störungen der grossen Axe und der Excentricität liefern. Das Argument eines beliebigen

Gliedes dieser Function wollen wir mit B bezeichnen. Lässt man nun in den so erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{da}{dt} = \psi_1 \sin D \qquad \frac{de}{dt} = \psi_2 \sin D$$

die Mondelemente um die oben erhaltenen Incremente: $\frac{\delta a}{a}$, $e\delta\varpi$, δe, δl variiren, so lässt sich jedes der obigen D-Argumente mit einem B-Argument so combiniren, dass die Combination $B \pm D$ keine Länge mehr enthält, sondern nur die Differenz $\varpi' - \varpi''$. Die nun durchzuführende Integration liefert demnach in $\frac{\delta_2 a}{a}$ und $\delta_2 e$ säculare Glieder von der Form

$$M.C.e'e''\left(\frac{n'}{n}\right)^4 \sin(\varpi' - \varpi'')nt, \tag{II)}$$

welcher Umstand demnach in der Länge das Auftreten eines Gliedes mit t^2 zur Folge hat.

Wie schon bemerkt, erreichen die so leicht zu ermittelnden Incremente zum Coëfficienten der Säcularacceleration Beträge, die mehrere Secunden erreichen. Aus der Action der Venus würde z. B. resultiren: $\delta L = +3''8\left(\frac{t}{100}\right)^2$

Alle auf diese Weise erhaltenen Incremente werden aber genau compensirt durch jene Reihe weiterer Incremente, die man auf folgende Weise erhält.

Von der Störungsfunction der Sonne auf den Mond R_0 ausgehend, denken wir uns erstlich die nöthigen Störungen der Mondelemente ermittelt. Man erhielte so:

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right) = (A)\cos B \quad (e\delta\varpi) = (P)\sin B \quad (\delta e) = (E)\cos B$$
$$(\delta l) = (L)\sin B \tag{II)}$$

Legen wir nun weiter die Störungsfunction zu Grunde, welche der Action eines Planeten auf den Mond (R) entspricht, bilden mit Hilfe derselben wieder:

$$\frac{da}{dt} = \chi_1 \sin D \qquad \frac{de}{dt} = \chi_2 \sin D,$$

lassen ferner in diesen Gleichungen die Mondelemente um die obigen Grössen (II) variiren, so führt uns die Integration wieder auf säculare Glieder in der grossen Axe und der Excentricität, welche im Allgemeinen wieder die Form haben:

$$M.C.e'e''\left(\frac{n'}{n}\right)^4 nt\sin(\varpi'-\varpi''). \qquad \text{III)}$$

Die so erhaltenen Incremente sind nun, wie man sich leicht durch analytische Entwicklung überzeugt, genau gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt wie die unter II) angeführten Incremente. Alle Incremente unter II) und III) zusammengefasst compensiren sich demnach vollständig.