

Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten

Konrad Zindler in Wien.

Im 111. Bande des »Journal f. r. u. a. Math.« habe ich im Anschluss an die Wiederholung des Verfahrens Reye's der Bildung linearer Mannigfaltigkeiten aus projectiven Punktreihen gewisse Configurationen erhalten. Die Methode, nach der dies geschah, lässt sich verallgemeinern (I) und ist, wie der Theil II dieser Note zeigt, auch nicht darauf beschränkt, dass der Process zur Gewinnung linearer Mannigfaltigkeiten gerade von projectiven Punktreihen seinen Ausgangspunkt nimmt.

I.

Die Träger eines linearen zweistufigen Systems projectiver Punktreihen bilden eine Strahlencongruenz $\mathfrak{C}$ von der 3. Ordnung und 1. Classe. Denn (cf. a. a. O. §. 2) $\mathfrak{C}$ entsteht auch, indem man die Congruenz $\mathfrak{G}_5$, die durch zwei collineare Felder in R_5 erzeugt wird, in den R_3 projecirt.¹ Die Träger eines linearen dreistufigen Systems projectiver Punktreihen bilden einen tetraedralen Complex (cf. Reye a. a. O. §. 3 oder Sturm, Liniengeom. I. Bd., Art. 271).

Es sei C eine Configuration, die aus p Punkten, e Ebenen und g Geraden bestehe; durch jeden ihrer Punkte mögen ε_p ihrer Ebenen und γ_p ihrer Geraden gehen, in jeder ihrer Ebenen

¹ Cf. auch Reye's Abhandlung im Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 104, §. 2, wo gezeigt ist, dass die duale Congruenz identisch ist mit dem Sehnensystem einer cubischen Raumcurve.

π_e Punkte und γ_e Gerade liegen, mit jeder ihrer Geraden π_g Punkte und ε_g Ebenen incident sein.¹ Denken wir uns nun als Elemente der Configuration C anstatt der Punkte, Geraden und Ebenen, beziehungsweise die Individuen, Regelschaaren und Congruenzen projectiver Punktreihen eines linearen Systems solcher Reihen, so erhalten wir zunächst eine Configuration zwischen einzelnen Punktreihen, Regelschaaren $\mathfrak{R}$ und Congruenzen $\mathfrak{C}$ solcher Reihen, deren Träger alle in einem tetraedralen Complex enthalten sind und worin jede Reihe in γ_p Regelschaaren und ε_p Congruenzen enthalten ist, jede Regelschaar in ε_g Congruenzen u. s. w. Fassen wir auf einer Reihe irgend einen Punkt auf, so liegen alle entsprechenden Punkte von Reihen derselben Regelschaar $\mathfrak{R}$ auf einem Strahl der Leitschaar, alle entsprechenden Punkte von Reihen derselben Congruenz auf einer Ebene des Ebenenbüschels 3. Ordnung, auf das sich die Congruenz »stützt«. Der Punkt und seine entsprechenden bestimmen also die ursprüngliche Configuration C ; n Punkte einer Reihe sammt den entsprechenden aller übrigen Reihen bestimmen also eine Configuration C' von np Punkten, $ng+p$ Geraden und ne Ebenen. Durch jeden Punkt von C' gehen γ_p+1 Gerade und ε_p Ebenen. Die Geraden von C' theilen sich in zwei Gruppen: Auf jedem der p Träger der projectiven Punktreihen liegen n Configurationspunkte, auf jeder anderen Configurationsgerade π_g .

Wählen wir z. B. als C die durch die Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln gebildete Configuration ($e = p = 12$, $g = 16$, $\varepsilon_p = \pi_e = 6$, $\gamma_p = \gamma_e = 4$, $\pi_g = \varepsilon_g = 3$; cf. Reye, Acta Math. Bd. I) und $n = 3$, so kann man, um C' zu bestimmen, durch jeden der vier Kugelmittelpunkte M_i eine Gerade G_i und darauf ein Punktepaar A_i, B_i willkürlich wählen. Durch die vier projectiven Reihen (M_i, A_i, B_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) ist ein tetraedraler Complex projectiver Reihen festgelegt, und alles übrige kann

¹ Zwischen diesen neun Zahlen bestehen die Relationen

$$= p\varepsilon_p, \quad e\gamma_e = g\varepsilon_g, \quad p\gamma_p = g\pi_g,$$

woraus auch folgt

$$\pi_e \varepsilon_g \gamma_p = \varepsilon_p \pi_g \gamma_e.$$

linear construirt werden. Ist z. B. J_{12} der auf M_1M_2 liegende innere Ähnlichkeitspunkt, so erhält man die durch J_{12} gehende neue Configurationsgerade, indem man durch J_{12} jenen Strahl legt, der A_1A_2 und B_1B_2 schneidet. Die beiden Quadrupel A und B bilden zwei dem Tetraeder der Kugelmittelpunkte analoge Tetraeder, gehören aber nicht selbst zu C' , ebensowenig wie die Geraden G_i und die Tetraederkanten. Bei jeder weiteren Vermehrung von n um Eins kann man nur mehr einen neuen Punkt auf einer der Geraden G willkürlich annehmen.¹

II.

Während die nach der bisherigen Methode abgeleitete Configuration C' noch eine gewisse Ähnlichkeit mit C hatte (C trat darin n -mal auf, wobei analoge Punkte durch Strahlen eines tetraedralen Complexes verbunden waren), wird dies nicht mehr der Fall sein, sobald man das analoge Verfahren in einer anderen Mannigfaltigkeit geometrischer Gebilde anwendet. Fassen wir z. B. in der fünfdimensionalen linearen Mannigfaltigkeit R_5 der Strahlengewinde unseres Raumes eine Configuration C auf, so wird es sich wieder darum handeln, nachzusehen, welche Incidenzrelationen durch Interpretation von C im ursprünglichen Punktraum entstehen, wodurch wir zu einer neuen Configuration C' gelangen werden.

Wir bezeichnen ein einzelnes Gewinde mit R_0 , ein Büschel solcher Gewinde mit R_1 , ein Bündel (oder Netz) mit R_2 , ein Gebüsch mit R_3 , nennen »Träger« eines R_1 das Leitgeradenpaar des mit R_1 verbundenen Strahlennetzes, Träger eines R_2 die allen Gewinden von R_2 gemeinsame Regelschaar, Träger eines R_3 das allen Gewinden von R_3 gemeinsame Strahlenpaar. Besteht eine volle Incidenz zwischen einem R_2 und einem R_3 (d. h. liegt R_2 ganz in R_3), so gehört der Träger von R_3 zur

¹ Um die in Crelle's Journ., Bd. 111, abgeleiteten Configurationen unter die hier entwickelte Regel zu bringen, muss man als Configuration C das System von n_1 Geraden der einen und n_2 Geraden der anderen Schaar eines Hyperboloids annehmen, während die dritte dort auftretende Zahl $n_3 = n$ zu setzen ist. Die dort mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ bezeichneten Congruenzen sind, worauf mich Herr Reye aufmerksam machte, mit von ihm in Crelle's Journ., Bd. 93, untersuchten Congruenzen 2. Cl., 6. Ord. identisch.

Regelschaar, die der Träger von R_2 ist. Incidiren jedoch R_1 und R_2 , so gehört der Träger von R_1 zur Leitschaar jener Regelschaar. Liegt ein R_1 in einem R_2 , dieses in einem R_3 , so gibt dies also zu einem Vierseit auf einem Hyperboloid Veranlassung. Die etwa in C vorkommenden Incidenzen zwischen R_0 und R_1 ergeben durch Rückgang auf den Punktraum nichts wesentlich Neues. Ihnen entspricht nämlich der Umstand, dass der Träger von R_1 ein Paar Polaren in Bezug auf R_0 bildet, also keine Incidenz. Gehen ferner zwei R_1 durch dasselbe R_0 , so haben ihre Träger hyperbolische Lage, was schon in Obigem enthalten ist, da sie dann ein R_2 bestimmen, in dem beide R_1 liegen. Rechnen wir also zu C nur die darin vorkommenden R_1 , R_2 und R_3 und ersetzen jedes dieser Elemente durch seinen Träger, so bekommen wir eine Configuration C' im Punktraum zwischen Geradenpaaren und Hyperboloiden mit den oben angegebenen Incidenzen in derselben Anzahl wie bei C . Die Geradenpaare sind theils Träger von Büscheln (Paare erster Art; sie könnten durch lineare Congruenzen ersetzt werden), theils Träger von Gebüschten (Paare zweiter Art). Die Configuration C kann auch trivial sein, ohne dass es C' wird.

Nehmen wir z. B. n beliebige Gewinde an, so bestimmen sie im fünfdimensionalen Complexraum $\binom{n}{2}$ Büschel R_1 , $\binom{n}{3}$ Bündel R_2 und $\binom{n}{4}$ Gebüschte R_3 , die wir zu C rechnen. Durch jeden R_1 gehen $n-2$ der R_2 und $\binom{n-2}{2}$ der R_3 , durch jeden R_2 gehen $n-3$ der R_3 ; in jedem R_3 liegen $4R_2$ und $6R_1$, in jedem R_2 liegen $3R_1$. Durch Übergang vom Complexraum zum Punktraum erhalten wir für jedes n eine Configuration C' . Wir heben nur den Fall $n = 6$ heraus, in dem C' in sich dual wird: Wir erhalten eine Configuration von 20 Hyperboloiden und 30 Strahlenpaaren (je 15 erster und zweiter Art). Durch jedes der Strahlenpaare gehen 4 Hyperboloide und auf jedem Hyperboloid liegen 6 Strahlenpaare, und zwar je drei in jeder seiner Regelschaaren. Je 2 Hyperboloide durch dasselbe Strahlenpaar haben ein Vierseit gemein. Jedes Strahlenpaar $\mathfrak{P}$ wird von 6 anderen geschnitten, nämlich von den 6 Paaren, in denen sich die vier Hyperboloide, die durch $\mathfrak{P}$

gehen, noch zu zweien schneiden. Fassen wir von C' nur die Geraden auf, so erhalten wir eine Configuration 60_{12} von 60 Geraden, von denen jede von 12 anderen geschnitten wird.

Um 60_{12} zu construiren, denken wir uns die 6 Gewinde, die C bestimmen, in zwei Gruppen zu dreien getheilt. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ die Gewinde der ersten Gruppe und $\mathfrak{H}$ das Trägerhyperboloid des zugehörigen R_2 ; dann wird jedes der drei Büschel, das durch zwei der drei Gewinde Γ bestimmt wird, durch ein Strahlenpaar auf $\mathfrak{H}$ repräsentirt sein, ein einzelnes Gewinde jedoch durch zwei dieser drei Paare, die eine Involution auf $\mathfrak{H}$ und hiemit das Gewinde bestimmen. Wir nehmen also zwei Regelschaaren R, R' beliebig an und in jeder drei Strahlenpaare (erster Art) $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_5, \mathfrak{P}_6$; diese Annahmen sind der Annahme von 6 willkürlichen Gewinden (repräsentirt durch Doppelpaare auf derselben Regelschaar) äquivalent. Zwei windschiefe Complexbüschel bestimmen einen R_3 , dessen Träger durch die gemeinsamen Transversalen der beiden Träger der Büschel gebildet wird, und umgekehrt: der Träger des Schnitt- R_1 zweier allgemeiner R_3 besteht aus den Transversalen der Träger der R_3 . Combinirt man also beliebig je zwei der obigen Paare $\mathfrak{P}$ aus verschiedenen Gruppen und construirt zu jeder Auswahl die schneidenden Transversalen, so erhält man neun von den Paaren zweiter Art. Die entsprechenden R_3 schneiden sich zu zweien in je einem R_1 ; unter diesen R_1 treten die den ursprünglichen Paaren $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_6$ entsprechenden Büschel je dreimal auf, je zweimal aber die noch fehlenden 9 von den 15 Büscheln, welche durch die 6 Gewinde zu zweien bestimmt sind $\left[6 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = \binom{9}{2} \right]$; z. B.

schneiden sich die beiden R_3 , die durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_5$ bestimmt sind, im selben Büschel, wie die durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4$ bestimmten. Alle noch fehlenden Paare erster Art erhält man also mehrfach durch Combination der 9 bisher construirten Paare zweiter Art zu zweien und Construction der schneidenden Transversalen. Von den Paaren zweiter Art fehlen jetzt noch diejenigen sechs, deren entsprechende R_3 durch je ein Gewinde der einen Gruppe und alle drei der anderen bestimmt sind. Ihre

Träger gehören also den Leitschaaren von $\Re$ oder $\Re'$ an und können gefunden werden, indem man eines der neu gewonnenen Paare erster Art mit einem der ursprünglichen passend combinirt.

Die Beispiele liessen sich beliebig vermehren; wir wollen noch ein besonders einfaches hersetzen: Nimmt man in einem R_5 drei sich nicht schneidende Ebenen an, so sind diese durch das System schneidender Geraden collinear auf einander bezogen (cf. meine Abh. a. a. O.), und jede Gerade der einen Ebene bestimmt in den beiden anderen je eine Gerade eindeutig, so dass alle drei Geraden im selben R_3 liegen. Aus dieser Figur lässt sich durch Rückgang auf die eigentliche Bedeutung der Elemente R_1, R_2, R_3 im Punktraum folgender Satz ablesen: Nimmt man drei Regelschaaren (entsprechend den drei Ebenen) beliebig an, so bestimmt jedes Strahlenpaar aus der Leitschaar der ersten in den beiden anderen Leitschaaren eindeutig je ein Strahlenpaar von der Eigenschaft, dass alle 6 Strahlen der drei Paare von denselben zwei Transversalen (entsprechend dem R_3) geschnitten werden. Da im Resultate die ursprünglichen Regelschaaren nicht mehr vorkommen, braucht man sie von den Leitschaaren nicht zu unterscheiden und hat den Satz: Die ∞^2 Strahlenpaare dreier allgemein liegender Regelschaaren lassen sich gegenseitig eindeutig so zuordnen, dass je sechs Strahlen entsprechender Paare zwei gemeinsame Transversalen besitzen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: [105_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Zindler Konrad

Artikel/Article: [Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten 311-316](#)