Über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle

Viktor v. Lang,
w. M. k. Akad.

(Mit 6 Textfiguren.)

1. Benützt man die Anschauungen, nach denen ich in meinem Lehrbuche der Krystallographie (Wien 1866) die damals bekannten Symmetriearten der Krystalle behandelte, zur Aufsuchung aller nach diesen Principien möglichen Symmetriearten, so kommt man auf 32 Abtheilungen, welche Zahl schon vorher von Hessel und später von Anderen gefunden wurde. Ob aber die durch geometrische oder rein mathematische Betrachtungen gewonnenen Fälle verschiedener Krystallformen wirklich physikalisch verschieden sind, konnte erst durch die Erfahrung gelehrt werden. Die intensive Untersuchung der Krystalle in neuerer Zeit hat es nun höchst wahrscheinlich gemacht, dass wirklich diese 32 verschiedene Fälle verschiedenen physikalischen Verhältnissen entsprechen, wenigstens fehlt nur mehr für zwei oder drei derselben die Bestätigung.

Da ich nun glaube, dass die Ableitung der 32 Abtheilungen aus den erwähnten Anschauungen gewisse Vortheile bietet und vielleicht Manchem willkommen ist, so will ich sie hier ausdrücklich vornehmen, obwohl die Sache eigentlich schon erledigt ist. Als einen Vortheil betrachte ich es, dass die folgende Ableitung nur schon längst in der Krystallographie eingebürgerte Begriffe benutzt und die in ganz beschränkter Zahl. Eine Ausnahme bildet höchstens der Begriff der Hemisymmetrie, auf dessen Wichtigkeit ich freilich schon vor 30 Jahren aufmerksam machte.

Ferner ist jeder Schritt der Ableitung innig mit der Frage nach Zahl und Anordnung der gleichwerthigen Richtungen eines Krystalles verknüpft; die gegenseitige Lage dieser Richtungen, welche die physikalischen Eigenschaften bestimmen, ist es ja vor Allem, die dem Gedächtnisse eingeprägt werden soll.

Auf dem eingeschlagenen Wege ergibt sich auch eine einfache consequente Nomenclatur für die einzelnen Abtheilungen und eine symbolische Bezeichnung für dieselben, welche leicht im Kopfe zu behalten ist, im Gegensatze zu der bei jedem Autor verschiedenen Numerirung.

Da ich schon früher bemerkte, dass die vorliegenden Zeilen nichts wesentlich Neues enthalten, brauche ich die wegen der Vollständigkeit unvermeidlichen Wiederholungen aus dem oben angegebenen Werke nicht weiter zu entschuldigen.

2. Wir beginnen mit der Untersuchung nach der Zahl und Anordnung der an Krystallen möglichen Symmetrieebenen. Es ist von vornherein klar, dass, wenn ein Krystall symmetrisch sein soll nach mehreren Ebenen, diese Ebenen auch symmetrisch unter sich angeordnet sein müssen. Man kann z. B. keine ebene Figur zeichnen symmetrisch nach zwei Linien, wenn diese zwei Linien nicht symmetrisch gegeneinander liegen, in diesem Falle also senkrecht auf einander stehen.

Nun lässt sich allerdings eine beliebige Anzahl (n) von Ebenen symmetrisch unter sich anordnen, und zwar auf zweierlei Weise:

Erstens. Man lässt alle n Ebenen unter gleichen Winkeln durch dieselbe Linie hindurchgehen.

Zweitens. Man lässt nur $n-1$ Ebenen so wie im vorhergehenden Falle unter gleichen Winkeln durch dieselbe Linie gehen und legt die n^{te} Ebene senkrecht zu dieser Linie.

Für die Fälle, dass n gleich 6 oder 9 ist, haben wir noch eine dritte Anordnung, bei der der ganze Flächencomplex symmetrisch mit Bezug auf jede einzelne seiner Flächen ist. Die sechs Halbirungsebenen der Winkel, welche drei zu einander senkrechte Ebenen bilden, sind nämlich ebenfalls allein oder in Verbindung mit diesen drei, wechselweise senkrechten, Ebenen symmetrisch unter sich angeordnet.

3. Die eben gefundenen Anordnungen von Symmetrieebenen können aber nur zum kleinsten Theile an Krystallen vorkommen, da diese Ebenen mögliche Flächen der Krystalle sein müssen. Ist nämlich ein Krystall symmetrisch mit Bezug auf eine Fläche U, und sind P, Q beliebige Flächen desselben, so erfordert die Symmetrie zwei weitere Flächen P', Q', so zwar, dass U in der Zone $[PP']$ und in der Zone $[QQ']$ liegt, also selbst eine mögliche Fläche des Krystalles sein muss. Nun sind aber, wie schon Hessel zeigte, zufolge des Gesetzes der Rationalität der Indices nur 2, 3, 4 oder 6 Flächen möglich, die sich in einer Linie unter gleichen Winkeln schneiden. Es bleiben also nur folgende Anordnungen übrig:

I1,	I2,	I3,	I4,	I6,
II2,	II3,	II4,	II5,	II7,
III6,	III9.			

4. Nun tritt aber noch eine weitere Reduction durch den Umstand ein, dass, wenn ein Krystall zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen U, V hat, derselbe auch schon symmetrisch nach der dazu senkrechten Ebene W ist. Man sieht nämlich sehr leicht ein, dass die vier Richtungen 1, 2, 3, 4, welche in der Gruppirung 1, 2 und 3, 4 der Symmetrie nach U, in der Gruppirung 1, 3 und 2, 4 der Symmetrie nach V genügen, in der letzten Gruppirung 1, 4 und 2, 3 der Symmetrie nach der Ebene W Genüge leisten.

5. Durch diesen Satz reduciren sich die an Krystallen möglichen Anordnungen von Symmetrieebenen auf die Fälle

00, I1, I3, II3, II5, II6, III9, *A*)

wenn wir den Fall, wo gar keine Symmetrieebene vorhanden ist, mit 00 bezeichnen. Lassen wir die Symmetrieebenen alle durch den Mittelpunkt einer Kugel gehen, so geben die sechs letzten Fälle auf derselben die in Fig. 1—6 dargestellten Durchschnitte.

In diesen Figuren sind diejenigen Symmetrieebenen, die zufolge ihrer symmetrischen Lage gegen andere Symmetrieebenen gleichwerthig, d. h. dieselben physikalischen Eigenschaften haben, mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Man findet aus den Figuren auch gleich die Anzahl und Anordnung der gleichwerthigen Richtungen, die durch diese Symmetrieebenen bedingt sind. Man braucht hiezu nur die Dreiecke abzuzählen, in welche die Halbkugel durch die Symmetrieebenen getheilt wird. Es ist auch leicht zu irgend einem Punkte in einem der Dreiecke die symmetrisch gelegenen in den anderen Dreiecken einzuzeichnen. So z. B. hat man für die Anordnung II 7 zwölf gleichwerthige Richtungen, die sich natürlich in speciellen

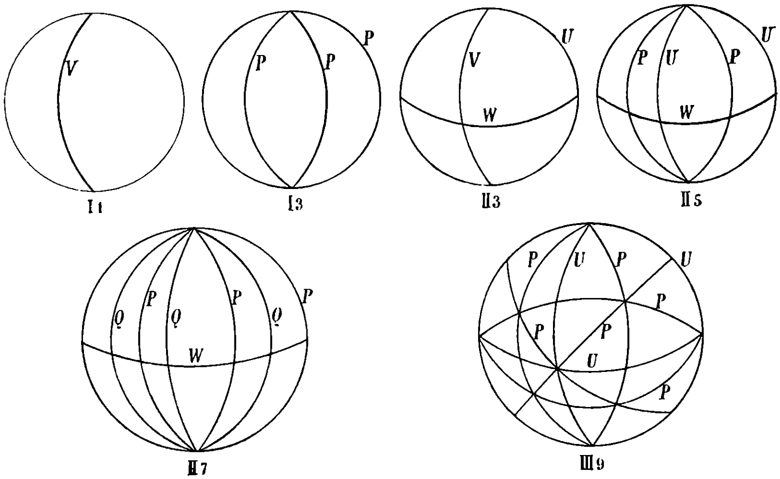

Fig. 1—6.

Fällen durch Zusammenfallen von je zwei oder vier auf weniger reduciren.

6. Durch das Vorhergehende sind aber nicht alle Fälle von Anordnungen gleichwerthiger Richtungen erschöpft. Wir erhalten die noch fehlenden durch die Untersuchung, ob die entwickelten gleichwerthigen Richtungen sich nicht vielleicht im Einklange mit den Symmetrieebenen der betreffenden Abtheilung in Gruppen von Richtungen zerlegen lassen, die sich, obwohl geometrisch noch immer gleichwerthig, doch physikalisch unterscheiden. Solche Gruppen müssen natürlich gleichviel Glieder haben, da sonst die Krystalle verschiedenen Symmetriegesetzen gehorchen müssten. Aus demselben Grunde muss die Anordnung der einzelnen Richtungen in diesen Gruppen

eine ähnliche sein, so dass aus einer Gruppe die anderen abgeleitet und alle Gruppen zur Deckung gebracht werden können.

Demzufolge muss also die Theilung der gleichwerthigen Richtungen in Gruppen so geschehen, dass die Symmetrie nach gleichwerthigen Symmetrieebenen auf gleiche Weise gestört oder aber erhalten bleibt. Endlich darf die Gruppirung nicht auf eine niedere Symmetrieart der Reihe *A* führen, da ja dies nichts Neues geben würde.

Die Ableitung der einzelnen Fälle gelingt leicht durch die Betrachtung der vorstehenden Figuren.

So können wir die vier gleichwerthigen Richtungen der Abtheilung II3 in vier Gruppen zu je einer Richtung zerlegen, was aber nur der durch 00 repräsentirte Fall ist. Ebenso führt jede Zerlegung in zwei Gruppen von je zwei Richtungen auf die Abtheilung I1.

Die Abtheilung II5 gibt eine neue Symmetrieart, bei der ihre acht gleichwerthigen Richtungen in zwei Gruppen zu vier Richtungen zerfallen; wir bezeichnen diese neue Abtheilung mit πII5; es ist die zur holosymmetrischen Abtheilung II5 zugehörige hemisymmetrische Abtheilung.

Ebenso erhält man zur Abtheilung I3 eine hemisymmetrische Abtheilung πI3, bei welcher die sechs gleichwerthigen Richtungen der Abtheilung I3 in zwei Gruppen von je drei gleichwerthigen Richtungen zerfallen.

Die dem Symbol II7 entsprechenden zwölf gleichwerthigen Richtungen lassen sich auf zwei verschiedene Arten in zwei Gruppen zu sechs Richtungen und ausserdem in vier Gruppen zu drei Richtungen abtheilen. Letztere Gruppirung entspricht aber dem Symbol πI3, so wie eine der beiden Gruppirungen zu sechs Richtungen auf das Symbol I3 führt, so dass wir aus II7 nur eine neue Symmetrieart erhalten, die wir mit πII3 bezeichnen.

Die Abtheilung III9 gibt ebenfalls eine hemisymmetrische Abtheilung πIII9. Im Ganzen bekommen wir also folgende Classe hemisymmetrischer Abtheilungen:

$$\pi\text{I}3, \qquad \pi\text{II}5, \qquad \pi\text{II}7, \qquad \pi\text{III}9. \qquad\qquad B)$$

7. Da wir bisher vorausgesetzt haben, dass jede Gerade eines Krystalles nach ihren beiden Richtungen dieselben Eigenschaften, also axialen Charakter hat, so werden bei regelmässiger Ausbildung die Krystallflächen immer zu zweien vorkommen, die parallel sind und an den entgegengesetzten Seiten des Krystalles auftreten; auch werden solche Flächen immer dieselben physikalischen Eigenschaften haben. Krystalle, für welche das eben Gesagte gilt, nennen wir holoëdrische; sie sind, wenn regelmässig ausgebildet, von parallelen Flächen begrenzt. Nach den unter *A* und *B* gegebenen Symbolen sind 11 verschiedene Arten holoëdrischer Krystalle möglich, und zwar gibt Reihe *A* die holoëdrisch holosymmetrischen Abtheilungen, Reihe *B* die holoëdrisch hemisymmetrischen Abtheilungen.

8. Es ist aber der Fall denkbar, und derselbe ist schon im Beginne des Krystallstudiums beobachtet worden, dass senkrecht zu jeder der betrachteten gleichwerthigen Richtungen nur eine Fläche auftritt. Hiedurch entstehen hemiëdrische Formen, die geneigtflächig sind. Jede holoëdrische Form kann im Allgemeinen in zwei hemiëdrische Formen zerfallen, welche ebensoviel gleichwerthige Richtungen haben wie die holoëdrische Form, und wenn weiter nichts stattfinden würde, wäre es nicht gerechtfertigt, die hemiëdrischen Formen als neue Symmetriegruppe aufzufassen.

Nur wenn die entsprechenden Flächen der beiden zusammengehörigen Hemiëder verschiedene Eigenschaften zeigen, ist eine neue physikalische Symmetrieart vorhanden, welche offenbar damit zusammenhängt, dass in gewissen Krystallen die Richtungen polaren Charakter haben und die physikalischen Eigenschaften dieser Richtungen verschieden sind in dem einen und dem anderen Sinne.

So haben wir in der holoëdrischen Abtheilung II3 vier gleichwerthige axiale Richtungen, die in der entsprechenden hemiëdrischen Abtheilung $\varkappa$II3 in zwei Systeme von je vier gleichwerthigen polaren Richtungen übergehen.

Um nun zu finden, welches die zusammengehörigen polaren Richtungen der ursprünglichen axialen Linien sind, ist es am besten, wenn man die betreffende holoëdrische Form in zwei geneigtflächige Hemiëder zerlegt, so zwar, dass die Symmetrie nach gleichwerthigen Symmetrieebenen auf gleiche Weise gestört wird, wobei wir den Fall, dass alle gleichwerthigen Flächen nur zu einer Seite einer Ebene liegen, später separat betrachten wollen. Dieser Process kann für die Classe A gleich an den früheren Figuren ausgeführt werden; in den Figuren 4, 5, 6 ist dies sogar auf zweierlei Art möglich, die wir als gyroëdrische (γ) und tetraëdrische ($\varkappa$) Hemiëdrie unterscheiden. Da auch die Abtheilungen 00, I1, I3 eine hemiëdrische Symmetrieart geben, so erhalten wir in der neuen hemiëdrisch holosymmetrischen Classe folgende Abtheilungen:

$$\begin{array}{lllllll} \varkappa 00, & \varkappa I1, & \varkappa I3, & \varkappa II3, & \gamma II5, & \gamma II7, & \gamma III9, \\ & & & & \tau II5, & \tau II7, & \tau III9. \end{array} \qquad C)$$

9. Das eben Gesagte gilt aber genau so für die Abtheilungen der Classe B. Hier sind aber nur drei neue Anordnungen möglich, so dass die hemiëdrisch hemisymmetrische Classe bloss folgende Symbole enthält:

$$\varkappa\pi II5, \qquad \varkappa\pi II7, \qquad \varkappa\pi III9. \qquad D)$$

10. Wie wir schon angedeutet, kann die Zerlegung der Holoëder in zwei Hemiëder auch so vorgenommen werden, dass man nur die Flächen nimmt, die auf einer Seite einer Ebene E liegen und ebenso die auf der anderen Seite. Dieses Verfahren muss sich aber natürlich auch den ursprünglichen Symmetrieverhältnissen anschliessen. Die Ebene E muss also entweder eine Symmetrieebene selbst sein oder symmetrisch zu den vorhandenen Symmetrieebenen liegen. Im ersteren Falle darf die Symmetrieebene E keine gleichwerthigen haben, da ja sonst die Theilung auch nach diesen stattfinden müsste, was nicht möglich ist.

Wir nennen die eben beschriebene Art der Theilung Hemimorphie, für welche die Anordnung der gleichwerthigen (polaren) Richtungen ohneweiters erhalten wird. Die Classe A gibt so die hemimorphe holoëdrische Classe mit den Abtheilungen

$$\mu I1, \qquad \mu I3, \qquad \mu II3, \qquad \mu II5, \qquad \mu II7, \qquad E)$$

die Classe B aber die hemimorphe hemisymmetrische Classe, welche die Abtheilungen

$$\mu\pi\mathrm{I}3, \qquad \mu\pi\mathrm{II}5, \qquad \mu\pi\mathrm{II}7 \qquad\qquad F)$$

enthält.

11. Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so haben wir für die an Krystallen möglichen Symmetrieverhältnisse die Classen

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F$$

mit beziehungsweise

$$7, \quad 4, \quad 10, \quad 3, \quad 5, \quad 3$$

Abtheilungen, im Ganzen also 32 Abtheilungen. Wir ordnen noch dieselben nach den 7 Abtheilungen der Classe A, aus denen sie entstanden sind und erhalten folgende Übersicht der 7 Krystallsysteme mit ihren Unterabtheilungen. Beigesetzt sind die betreffenden Nummern aus Groth, Physikalische Krystallographie, 3. Aufl., 1895, und aus Wülfing, Tabellarische Übersicht der einfachen Formen der 32 krystallographischen Symmetriegruppen, 1895.

	Groth	Wülfing	
00	2	31	triklin.
$\varkappa 00$	1	32	hemiëdrisch triklin.
$\mathrm{I}1$	5	28	monoklin.
$\varkappa\mathrm{I}1$	4	30	hemiëdrisch monoklin.
$\mu\mathrm{I}1$	3	29	hemimorph monoklin.
$\mathrm{I}3$	21	18	rhomboëdrisch.
$\varkappa\mathrm{I}3$	18	24	hemiëdrisch rhomboëdrisch.
$\mu\mathrm{I}3$	17	19	hemimorph rhomboëdrisch.
$\pi\mathrm{I}3$	20	21	hemirhomboëdrisch.
$\mu\pi\mathrm{I}3$	16	23	hemimorph hemirhomboëdrisch.
$\mathrm{II}3$	8	25	rhombisch.
$\varkappa\mathrm{II}3$	6	27	hemiëdrisch rhombisch.
$\mu\mathrm{II}3$	7	26	hemimorph rhombisch.

	Groth	Wülfing	
II5	15	6	tetragonal.
γII5	12	10	gyroëdrisch tetragonal.
τII5	11	11	tetraëdrisch tetragonal.
μII5	14	7	hemimorph tetragonal.
πII5	13	8	hemitetragonal.
κπII5	9	12	hemiëdrisch hemitetragonal.
μπII5	10	9	hemimorph hemitetragonal.
II7	27	13	hexagonal.
γII7	24	17	gyroëdrisch hexagonal.
τII7	22	20	tetraëdrisch hexagonal.
μII7	26	14	hemimorph hexagonal.
πII7	25	15	hemihexagonal.
κπII7	19	22	hemiëdrisch hemihexagonal.
μπII7	23	16	hemimorph hemihexagonal.
III9	32	1	tesseral[1]
γIII9	29	3	gyroëdrisch tesseral.
τIII9	31	4	tetraëdrisch tesseral.
πIII9	30	2	hemitesseral.
κπIII9	28	5	hemiëdrisch hemitesseral.

[1] Die Bezeichnung »regulär« möchte ich nicht empfehlen wegen der Verwechslung des tesseralen Dodekaëder mit dem regulären Dodekaëder der Geometrie, welches ja ganz verschieden ist.