Einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen

von

J. Sobotka in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. April 1896.)

1. Es ist bekannt, dass eine Ringfläche von irgend einer doppeltberührenden Ebene nach zwei gleichen Kreisen geschnitten wird.

Dieser einfache Satz wird wohl in den meisten Werken über darstellende Geometrie bewiesen.[1] Obzwar der Beweis meistens elementar ist und sich aus der Construction des Schnittes ergibt, so befriedigt er insoferne nicht, als er erst durch mit der Construction nicht in Verbindung stehende Geraden vermittelt werden muss und nur für den Fall gilt, dass die doppelt berührende Ebene reell ist. Desshalb soll hier ein anderer Beweis für die erwähnte Eigenschaft erbracht werden.

Zu dem Behufe denken wir uns die Ringfläche R als Umhüllungsfläche von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem Kreise m liegen und deren Halbmesser alle dieselbe Länge r besitzen. Der Mittelpunkt M dieses Kreises ist zugleich Mittelpunkt der Ringfläche.

Alle Kugeln haben in Bezug auf M dieselbe Potenz; sie besitzen in Folge dessen eine gemeinschaftliche Orthogonalkugel M, welche in M ihren Mittelpunkt hat und die Berührungspunkte aller doppeltberührenden Ebenen enthält. Betrachten wir unter diesen unsere Schnittebene E. Diese schneidet die

[1] Cf. Dr. G. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie, IV. Bd., S. 330; Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom., II. Bd., S. 165 u. A. m.

Kugel M in einem grössten Kreise e und die erwähnten, von der Ringfläche umhüllten Kugeln in einer Reihe von Kreisen, welche e orthogonal schneiden, weil der Punkt M für sie dieselbe Potenz besitzt wie für die umhüllten Kugeln. Die so erhaltene Kreisreihe gehört somit dem durch e bestimmten Kreisnetze an. Der Mittelpunkt für irgend einen Kreis dieser Reihe ist die Orthogonalprojection des auf m liegenden Mittelpunktes derjenigen von R umhüllten Kugel, als deren Schnitt mit E sich dieser Kreis ergibt. Es liegen demgemäss die Mittelpunkte aller Kreise der betrachteten Kreisreihe auf der Orthogonalprojection m_ε des Kreises m in die Ebene E. Diese Projection ist eine Ellipse, welche in M ihren Mittelpunkt und in den Berührungspunkten von E mit R die Scheitel der kleinen Axe hat; die Schnittpunkte von E mit m sind die Scheitel der grossen Axe.

Unsere Kreisreihe wird somit von sämmtlichen Kreisen gebildet, welche den Kreis e orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte auf dem diesen Kreis doppeltberührenden Kegelschnitte m_ε liegen; sie ist in Folge dessen eine konische Kreisreihe, deren alle Kreise bekanntlich zwei feste Kreise u, v berühren, so dass diese die Umhüllungscurve von jenen bilden.

Die Umhüllungscurve der Schnittkreise der von R umhüllten Kugeln mit einer Ebene ist nun die Schnittcurve der Ebene mit R selbst.

Wir erkennen hiernach, dass u, v die Schnittkreise von E mit R sind. Aus den bekannten Eigenschaften einer conischen Kreisreihe folgt ferner, dass die Mittelpunkte von u und v die Brennpunkte von m_ε sind und dass, da die Berührungspunkte der Ebene E mit R Nullkreise in der conischen Kreisreihe repräsentiren, diese Kreise durch die erwähnten Berührungspunkte gehen und somit gleich sind.

Trägt man demnach von M aus auf den in E gelegenen Durchmesser von m die Länge des Halbmessers für die von R umhüllten Kugeln auf beide Seiten auf, so erhält man in den Endpunkten der so übertragenen Strecken die Mittelpunkte der Schnittkreise u, v; dieselben sind überdies dem Kreise m gleich also dadurch völlig bestimmt.

Wir wollen noch wegen des Zusammenhanges mit dem Folgenden die durch W Fiedler begründete cyklometrische Deutung unserer in E vorgenommenen Constructionen anführen. Wir nehmen da e als Kehlkreis eines gleichseitigen Rotationshyperboloides H, welches dadurch vollkommen bestimmt ist; dasselbe ist einschalig, wenn e reell, zweischalig, wenn e imaginär ist. Jedem Punkte von H entspricht ein Kreis in E, dessen Mittelpunkt in seiner Orthogonalprojection in die Ebene E und dessen Halbmesser gleich seinem Normalabstande von E ist. Den Punkten von H entsprechen in dieser Weise die Kreise des durch e als Orthogonalkreis festgelegten Kreisnetzes. Die conische Kreisreihe entspricht dann den Punkten des Schnittes von H mit einer durch den in E enthaltenen Durchmesser von m gehenden Ebene, und unsere Schnittkreise sind die Spuren in E der gleichseitigen Rotationskegel, welche durch den erwähnten Schnitt gelegt werden können.[1]

2. Wir wollen jetzt den Schnitt einer Ringfläche R mit einer die Rotationsaxe a derselben im Endlichen schneidenden Ebene E näher beachten.

Es sei O der Schnittpunkt von a mit E und n der Schnittkreis der Kugel M mit der Ebene von m. Zunächst ist klar, dass alle von der Ringfläche umhüllten Kugeln K,. nicht nur von der Kugel M, sondern von jeder Kugel, welche durch n geht,

---

Würde man sich damit begnügen, den obigen Satz indirect zu beweisen, so könnte man sich darauf beschränken, einzig die Eigenschaft der Ellipse herbeizuziehen, dass die Summe der Leitstrahlen für alle Punkte derselben unveränderlich ist. Nimmt man nämlich zwei Kreise u, v, welche die Mittelpunkte F_1, F_2 haben und sich in den Punkten U, V schneiden, so ist der geometrische Ort von Mittelpunkten solcher Kreise, welche u und v berühren, im Falle dass U, V reell sind, eine Ellipse, welche F_1, F_2 zu Brennpunkten und U, V zu Scheiteln der Nebenaxe hat. Die Potenz für den Mittelpunkt M dieser Ellipse in Bezug auf die beiden Kreise ist gleich $-\overline{CU}^2$; also ist die Potenz von M in Bezug auf jeden der u und v berührenden Kreise gleich $+\overline{CU}^2$. Demzufolge schneiden alle diese berührenden Kreise den über UV als Durchmesser errichteten Kreis orthogonal. Umgekehrt, wenn man Kreise construirt, die auf einer Ellipse m_2 ihre Mittelpunkte haben und den über der kleinen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreis e orthogonal schneiden, so werden diese Kreise von zwei anderen Kreisen umhüllt, welche in den Brennpunkten der Ellipse ihre Mittelpunkte und die Länge der grossen Halbaxe zu Radien haben. Hieraus erhellt die Richtigkeit unseres Satzes ohneweiters.

orthogonal geschnitten werden. Die Axe a ist die Centrale des so erhaltenen Orthogonalkugelnbüschels. Es sei O diejenige Kugel in demselben, welche in O ihren Mittelpunkt hat. Der Punkt O hat dieselbe Potenz in Bezug auf alle Kugeln K,.. also auch in Bezug auf deren Schnittkreise k,.. mit E. Diese Schnittkreise sind demgemäss orthogonal zu dem Schnittkreise o der Ebene E mit der Kugel O.

Die Schnittcurve [k] von R mit E ist hier also Umhüllungscurve von sämmtlichen Kreisen k,. welche auf m_ε ihre Mittelpunkte haben und den Kreis o orthogonal schneiden. Hiebei ist m_ε wieder die Orthogonalprojection von m in E. Unsere Schnittcurve ist eine sogenannte anallagmatische Curve. Sie ist in Bezug auf die durch a zu E normalgestellte Ebene symmetrisch und von der vierten Ordnung, da sich o und m_ε nicht berühren.

Da das Netz der Orthogonalkreise von o cyklometrisch durch ein gleichseitiges Rotationshyperboloid H, welches o zum Kehlkreis hat, dargestellt wird, so ist [k] auch die Umhüllungscurve der Bildkreise für sämmtliche Punkte der Durchdringungscurve von H mit der Cylinderfläche, welche m in die Ebene E orthogonal projicirt.[1]

Wir wollen nun auf die Construction dieser Curven im Folgenden näher eingehen.

3. Es sei (m) der geometrische Ort von Mittelpunkten M,. solcher Kreise k,. welche einen Kreis o orthogonal schneiden. Diese Kreise umhüllen also eine anallagmatische Curve [k].

Zwei derartige, aber unmittelbar benachbarte Kreise k, k_1 mit den Mittelpunkten M, M_1 mögen sich in den Punkten A und B schneiden. Da sowohl k als auch k_1 sich selbst invers

---

[1] Das durch H repräsentirte Kreisnetz wird auch von den Schnittkreisen sämmtlicher Kugeln gebildet, die gleiche Durchmesser mit K,... haben und deren Mittelpunkte auf der mit O concentrischen, durch m gehenden Kugel liegen.

Betrachtet man überhaupt die Kreise einer Ebene einmal als Distanzkreise von Punkten im Raume, das anderemal als Schnittkreise mit Kugeln von constantem Radius, so befinden sich die Mittelpunkte der Kugeln mit den ersterwähnten Punkten in einer äusserst einfachen quadratischen Verwandtschaft, die involutorisch ist.

entsprechen in Bezug auf o als Grundkreis der Inversion, so werden auch ihre Schnittpunkte A, B invers liegen, und $[k]$ ist mithin in dieser Inversion sich selbst entsprechend. Überdies sind die Punkte A, B in Bezug auf (MM_1) symmetrisch.

Es schneidet hiernach die durch den Mittelpunkt O von o zur Tangente der Curve (m) in M gelegte Normale den Kreis k in seinen Berührungspunkten A, B mit $[k]$. (MA) und (MB) sind demgemäss die Normalen von $[k]$ in zwei einander invers entsprechenden Punkten. Die Curve (m) ist also auch der Ort für die Schnittpunkte von Normalen in je zwei sich entsprechenden Punkten von $[k]$.

Die Potenzlinie m' der Kreise k und o ist die Polare von M in Bezug auf o, und der Schnittpunkt T' der Geraden (AB) mit m' ist der Pol der Tangente t von (m) in M gleichfalls in Bezug auf o. Daraus folgt, dass der Schnittpunkt S der Tangenten an $[k]$ in A und B als Pol der durch T' gehenden Geraden (AB) auf t liegt; derselbe ergibt sich demnach als Schnitt von t mit der Polare m'.

Construction von Krümmungskreisen. Denken wir uns jetzt die Krümmungskreise a und b von $[k]$ in den entsprechenden Punkten A, B. Da die Curve $[k]$ invers sich selbst entspricht, so sind a und b ebenfalls zwei in Bezug auf o inverse Kreise. Als solche haben sie den Mittelpunkt O zu einem Ähnlichkeitspunkte und gehören mit o einem Kreisbüschel an. Da weiter die Tangenten in A und B an k nicht parallel sind, so ist ihr Schnittpunkt S ein Punkt auf der Potenzlinie i der Kreise a und b. Schneiden sich nun die Tangenten in den zu A und B unmittelbar benachbarten Punkten A_1, respective B_1 im Punkte S_1, so ist $(SS_1) \equiv i$, und die Senkrechte s zu dieser Geraden durch O ist die Centrallinie der Kreise a, b; dieselbe schneidet somit die Normalen (AM) und (BM) in den Mittelpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Krümmungskreise a, respective b.

Es kommt also bei unserer Construction lediglich darauf an, die Gerade i zu ermitteln, deren Schnittpunkte mit o, nebenbei bemerkt, auch den gesuchten Kreisen a, b gemeinschaftlich sind.

Würde (m) ein den Kreis o doppeltberührender Kegelschnitt sein, dann wäre i seine Berührungssehne mit o, und s

wäre eine Axe desselben. Unsere Aufgabe ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construiren, der die gegebene Curve (m) in einem Punkte M osculirt und den gegebenen Kreis o doppelt berührt. Da es sich hier nur um die Krümmungskreise a, b handelt, so können wir die Curve (m) durch irgend einen sie in M osculirenden Kegelschnitt m ersetzen.

Der Punkt S lässt sich nun als Schnittpunkt der beiden Polaren des Punktes M einmal in Bezug auf m, das anderemal in Bezug auf o auffassen; er ist demgemäss der zu M doppeltconjugirte Punkt in Bezug auf die durch m und o gegebenen Polarsysteme. Der Punkt S_1 ist alsdann in gleicher Weise zu M_1 doppeltconjugirt. Der Tangente t, welche die Punkte M, M_1 verbindet, ist ein Kegelschnitt (S) doppeltconjugirt, welcher S und S_1 ebenfalls als benachbarte Punkte enthält, sodass die Tangente in S an den Kegelschnitt (S) mit der Geraden i identisch ist.

Der Kegelschnitt (S) geht durch M, T', S, und es erübrigt nur noch, die doppeltconjugirten Punkte von zwei beliebig auf t gelegenen Punkten zu suchen, worauf man aus den fünf so erhaltenen Punkten des Kegelschnittes (S) nach dem Satze von Pascal die Tangente i desselben in S ohneweiters erhält. Hiemit ist unsere Aufgabe gelöst, selbstverständlich auch für den Fall, dass o imaginär ist, oder, mit anderen Worten, dass die Potenz von O bezüglich der umhüllten Kreise negativ, gleich $-\Pi$, ist. Im letzteren Falle wird der Kreis o durch einen concentrischen Kreis vom Radius $\sqrt{\Pi}$ repräsentirt, und die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf o ist centrisch symmetrisch für O als Centrum zu der Polare desselben bezüglich des repräsentirenden Kreises.

Die früher angegebene cyklometrische Deutung gibt uns ebenso einfach und übersichtlich unsere Construction wieder.

Die Curve $[k]$ ist die Umhüllungscurve für die Bildkreise von sämmtlichen Punkten auf der Durchdringungscurve des Netzhyperboloides H, welches o zum Kehlkreis hat mit der durch m zu unserer Ebene orthogonal gelegten Cylinderfläche. Es sei t^+ die Tangente dieser Durchdringungscurve im Punkte M^+, welche ihre Orthogonalprojection in unsere

Ebene in t, respective M haben. Die Schmiegungsebene T dieser Durchdringungscurve in M^+ schneidet H nach einem Kegelschnitte l^+, dessen cyklometrische Projection eine conische Kreisreihe ist, deren Kreise das verlangte Kreispaar a, b umhüllen.

Die Spur von T ist die Berührungssehne des Kegelschnittes l, in den sich l^+ orthogonal projicirt und der den Kreis o in seinen Schnittpunkten mit dieser Sehne berührt. Die Spur von T ist also die Gerade i selbst. Die Ebene T ist als Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades im Punkte M^+ die Tangentialebene längs t^+ desjenigen Kegels, welcher der Tangente t^+ in Bezug auf beide Flächen zweiten Grades zugleich conjugirt ist. Dies liefert für unsere Ebene, in der sich unsere Constructionen vollziehen, genau den vorigen Vorgang.[1]

Für den Schnitt einer Ringfläche R mit einer Ebene, die zur Axe o nicht parallel ist, braucht da nichts weiter hinzugefügt zu werden.

4. Ist $[k]$ symmetrisch, wie es beispielsweise für den ebenen Schnitt einer Ringfläche der Fall ist, so hat jeder der Krümmungskreise a, b in je zwei sich invers entsprechenden Scheitelpunkten A, B mit $[k]$ vier consecutive Punkte gemein. Der soeben erwähnte doppeltconjugirte Kegel degenerirt in ein Ebenenpaar und der früher besprochene doppeltconjugirte Kegelschnitt besteht aus der gemeinschaftlichen Normale an $[k]$ in A und B (Symmetrieaxe) und aus einer zu ihr senkrechten Geraden g, die äusserst einfach gefunden wird, da man bloss einen Punkt von ihr in früher angegebener Weise zu ermitteln braucht.

Der Mittelpunkt E von AB ist hier ein Scheitelpunkt von m, und es ist $\dfrac{\overline{AE}^2}{d}$ die Entfernung der Geraden g von E, wofern d den Abstand zwischen O und dem Krümmungsmittelpunkte von m im Scheitel E bedeutet.

So ist der m in E osculirende und o doppeltberührende Kegelschnitt hinreichend bestimmt.

---

[1] Cf. A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris, 1894, S. 77—80.

Schneidet g den Kreis o reell, dann lassen sich die Kreise a, b durch diese Schnittpunkte und durch A, respective B, ohneweiters legen. Ist dies nicht der Fall, so suche man den Pol G von g in Bezug auf o. Alsdann gehört der von E durch G und g harmonisch getrennte Punkt E_1 gleichfalls dem gesuchten doppeltberührenden Kegelschnitte an. Man kann jetzt etwa den Orthogonalkreis von o, der in E_1 seinen Mittelpunkt hat, legen, wodurch die Kreise a, b vollkommen bestimmt sind. Denn dieselben gehen durch A, respective B und berühren den zuletzt erhaltenen Orthogonalkreis auf (EE_1) in verschiedenen Punkten. Die Wahl dieser Punkte lässt keinen Zweifel auftreten, wenn man beachtet, dass die Kreise a und b sich auch nicht reell schneiden dürfen.

Von anderen besonderen Fällen wollen wir hier noch des Erwähnung thun, wenn der Kreis o die Curve (m) berührt.

Geschieht dies im Punkte D, so ist dieser ein Doppelpunkt von $[k]$. Die im Vorigen entwickelten Constructionen gestatten uns zunächst, die Normalen in diesem Doppelpunkte an $[k]$ zu errichten.

Wir brauchen nämlich nur die Curve (m) durch einen sie in D osculirenden und o noch anderwärts berührenden Kegelschnitt l ersetzt zu denken. Solcher Kegelschnitte gibt es unzählig viele; eine Axe eines solchen Kegelschnittes geht jedesmal durch O. Die Tangenten in D sind aber nur dann reell, wenn die durch O gehende Axe des doppeltberührenden Kegelschnittes l die Hauptaxe ist; denn nur dann lassen sich durch den Kegelschnitt l^+ auf dem Netzhyperboloid H zwei reelle gleichseitige Rotationskegel legen. In Folge dessen liegt auch der Krümmungsmittelpunkt P von (m) in D in derselben Richtung von D aus wie der Punkt O.

Die Leitstrahlen des Punktes D für irgend einen doppeltberührenden Kegelschnitt l müssen nun dem Früheren zufolge die verlangten Normalen in D an $[k]$ sein. Der Winkel φ, den jeder dieser Leitstrahlen mit der Geraden (DO) einschliesst, folgt aus der bekannten Formel $DP = \frac{DO}{\cos^2\varphi}$, nach welcher der Krümmungshalbmesser von l in D construirt werden kann

Man hat somit nur den Kreis zu legen, welcher den Krümmungshalbmesser DP zum Durchmesser hat und in O die zu DP normale Sehne zu errichten. Die Geraden, welche die Endpunkte dieser Sehne mit D verbinden, sind bereits die gewünschten Normalen. Auf denselben liegen die Brennpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche (m) in D osculiren und anderwärts noch berühren.

Hätte man die Krümmungskreise von $[k]$ im Doppelpunkte D zu ermitteln, so würde man zunächst (m) durch einen Kegelschnitt m ersetzen, welcher mit (m) in D vier consecutive Punkte gemein hat, und es wäre dann unsere Sorge, diesen durch einen anderen Kegelschnitt $\mathfrak{m}$ zu ersetzen, welcher ihn in D gleichfalls hyperosculirt und überdies noch o an einer anderen Stelle berührt.

Verbinden wir zu dem Behufe D mit dem Mittelpunkte von m, so ist die Verbindungsgerade ein gemeinschaftlicher Durchmesser aller die Curve (m) in D hyperosculirenden Kegelschnitte. Construiren wir weiter in Bezug auf die soeben gefundenen Normalen, welche zugleich die Leitstrahlen auch von $\mathfrak{m}$ für den Punkt D sind, den zu dem soeben erwähnten gemeinschaftlichen Durchmesser conjugirten Strahl, so gibt dieser alsdann die Richtung der Hauptaxe von $\mathfrak{m}$ an. Zieht man mithin durch O die Parallele zu diesem Strahl, so trifft dieselbe die beiden Normalen in den Mittelpunkten der fraglichen Krümmungskreise.

5. Von den letzten Constructionen soll hier eine Anwendung auf die Ringfläche R folgen. Beim Schnitte $[k]$ einer Ringfläche R mit einer Tangentialebene E derselben werden in der Regel auch die Tangenten in dem Berührungspunkte D an die Schnittcurve auf verschiedene, interessante Arten construirt. Unsere Erwägungen liefern nicht nur die Construction von Normalen, sondern auch die Construction der beiden Krümmungskreise d_1, d_2 für den Doppelpunkt D der Schnittcurve $[k]$ in sehr einfacher Weise.

Der Einfachheit der Darstellung halber projiciren wir die Ringfläche orthogonal in die Meridianfläche, welche durch die Rotationsaxe a zur Schnittebene normal errichtet wird.[1]

Es sei — Fig. 1 — Q der Mittelpunkt der die Ebene E in D berührenden, von R umhüllten Kugel, q ihr grösster Kreis, welcher als ein Meridiankreis in unserer Projectionsebene der Ringfläche angehört. Die wahre Gestalt der Schnittcurve $[k]$, welche hier eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten

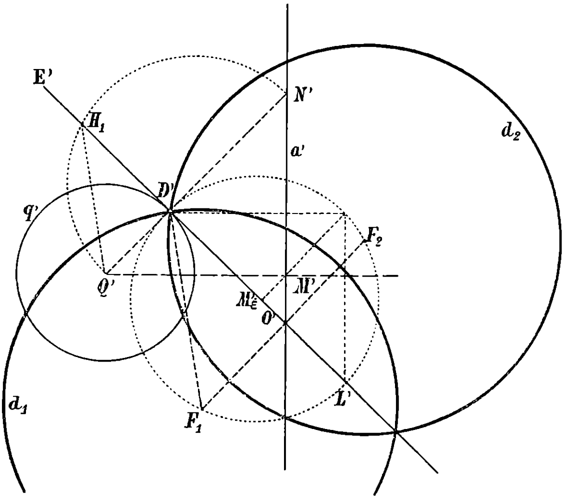

Fig. 1.

ist, stellen wir in der um (DO) in die Projectionsebene gedrehten Lage dar.

Hier ist OD der Halbmesser des Kreises o. Auch der früher mit m_ξ bezeichnete Kegelschnitt ist leicht zu construiren. Wir errichten von der Projection M' des Mittelpunktes M von R auf die Gerade $(D'O')$ die Senkrechte, welche dieselbe im Mittelpunkte M_ξ von m_ξ schneidet. DM_ξ ist eine Halbaxe von m_ξ der Lage und Grösse nach; die andere ist dem Halbmesser MQ von m gleich. Der Krümmungskreis m in D von m_ξ hat mit diesem Kegelschnitte vier consecutive Punkte gemeinschaftlich und wir können desshalb zwecks Construction von

[1] Hiebei wollen wir die Projection eines Gebildes A mit A' bezeichnen; es schliesst hier jeden Irrthum aus, wenn wir mit dem letzteren Symbol auch das Bild des Gebildes bezeichnen.

d_1 und d_2 den Kegelschnitt m_ε durch diesen Krümmungskreis ersetzen. Es sei L der Mittelpunkt dieses Kreises. Wir fällen von D' die Senkrechte auf a' bis sie $(M_\varepsilon M')$ schneidet; die Parallele durch den so erhaltenen Schnittpunkt zu a' schneidet (DO) bereits im Punkte L.

Weiter handelt es sich darum, den Kegelschnitt l zu ermitteln, welcher mit m in D vier consecutive Punkte gemein hat und o noch anderwärts berührt. Für diesen Kegelschnitt l ist O der Mittelpunkt, also DO eine Halbachse der Lage und Grösse nach. Da L Krümmungsmittelpunkt von l in D ist, so enthält der über DL als Durchmesser in unserer Ebene E beschriebene Kreis bekanntlich auch die reellen Brennpunkte F_1, F_2 von l. Diese Brennpunkte erhalten wir also, wenn wir die Senkrechte durch O zu DO mit dem erwähnten Kreise zum Schnitte bringen.

Diese Brennpunkte F_1, F_2 sind nun bereits die Mittelpunkte der Kreise d_1, d_2.

Eine Modification dieser Construction und ihrer Ableitung möge hier noch erläutert werden.

Wir wissen, dass die Tangenten an unsere Schnittcurve in D die Erzeugenden irgend eines Hyperboloids sind, welches sich in D unserer Ringfläche anschmiegt. Wir wählen hier in der üblichen Weise den Schnittpunkt N der Normale $(\underset{\sim}{Q}D)$ mit a als Mittelpunkt und die durch ihn zur Tangente in D an den Meridian q parallel gelegte Gerade als Axe eines derartigen einschaligen Rotationshyperboloids. Für die Meridianhyperbel desselben gibt DN die Länge der reellen Halbaxe und die mittlere geometrische Proportionale zwischen DN und $\underset{\sim}{Q}D$ die Länge der ideellen Halbaxe. Dreht man also die Gerade $(\underset{\sim}{Q}N)$ um (DO), bis sie in die Ebene E hineinfällt nach $\underset{\sim}{Q}_\varepsilon N_\varepsilon$ und errichtet nun in E über der Strecke $\underset{\sim}{Q}_\varepsilon N_\varepsilon$ als Durchmesser einen Kreis, so wird derselbe von der Geraden (DO) in zwei Punkten H_1, H_2 geschnitten. Die Geraden $(H_1 N_\varepsilon)$ und $(H_2 N_\varepsilon)$ geben die Richtungen der Tangenten, die Geraden $(H_1 \underset{\sim}{Q}_\varepsilon)$, $(H_2 \underset{\sim}{Q}_\varepsilon)$ die Richtungen der Normalen unserer Schnittcurve $[k]$ im Doppelpunkte D an.[1]

---

1 Chr. Wiener a. a. O., S. 164, De la Gournerie Traité de géometrie descriptive u. A.

Die Kreise d_1, d_2 gehören mit o einem Büschel an, und da sie in Bezug auf (DO) symmetrisch sind, so muss ihr zweiter Schnittpunkt der dem Punkte D auf o diametral gegenüberliegende Punkt sein, und die Senkrechte von O auf (DO) ist ihre Centrallinie, welche die Normalen in D an $[k]$ in den Mittelpunkten von d_1, respective d_2 trifft.

Wie aus den Mittelpunkten von d_1 und d_2 die Krümmungsmittelpunkte irgend einer Projection der Schnittcurve in dem entsprechenden Doppelpunkt ermittelt werden, ist hinreichend bekannt.

6. Denken wir uns weiter irgend einen Kegelschnitt w und in seiner Ebene eine Gerade a. Durch Rotation dieses Kegelschnittes um die Gerade a entsteht eine Rotationsfläche W, die ebenfalls vierter Anordnung ist, da sie, wie gleich gezeigt werden soll, durch centrische Collineation in eine Kreisringfläche transformirt werden kann.

Durch den Kegelschnitt w ist eine Schaar von zu ihm confocalen Kegelschnitten bestimmt. Ferner liegt irgend ein Kreis in der Ebene von w auf verschiedene Arten mit w in centrisch collinearer Lage. Verbindet man ein Collineationscentrum derselben mit dem Mittelpunkte des Kreises, so gibt es einen Kegelschnitt in unserer Schaar, welcher diese Verbindungsgerade gerade in dem Collineationscentrum berührt und einer anderen Eigenschaft zufolge den Kegelschnitt w in Punkten schneidet, in denen die Tangenten an w die zwei möglichen Richtungen der Collineationsaxen für das angenommene Centrum liefert.

Construirt man also die zu a senkrechten Tangenten von w und legt durch ihre Berührungspunkte den einzigen möglichen zu w confocalen Kegelschnitt x, so schneidet dieser a in zwei Punkten X_1, X_2, von denen jeder als Collineationscentrum betrachtet werden kann zwischen dem Kegelschnitt w und den Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Tangente an x im Collineationscentrum liegen und welche die von diesem an w gelegten Tangenten berühren. Wählen wir einen solchen Kreis w_1, beispielsweise für X_1 als Collineationscentrum, so ist noch die Collineation zwischen w und w_1 in zweierlei Art möglich; bei der einen ist die Collineationsaxe $\mathfrak{x}_1$ senkrecht zur Geraden a.

Beachten wir die letztere, so ergibt sich aus ihr, dass die Fläche W mit der Ringfläche W_1, welche durch Rotation des Kreises w_1 um a erzeugt wird, centrisch collinear für X_1 als Collineationscentrum und die durch $\mathfrak{x}_1$ zu a normal gelegte Ebene als Collineationsebene ist.

Dasselbe würde für X_2 als Collineationscentrum gelten.

Ist insbesondere a parallel zu einer Axe von w, so geht die centrische Collineation in eine Affinität über.

Aus unserer Betrachtung erkennt man, dass die projectiven Eigenschaften der Kreisringfläche sich auf die Fläche W übertragen lassen.

So erhalten wir z. B. folgenden Satz:

Die durch Rotation eines Kegelschnittes um eine in seiner Ebene liegende Gerade erzeugte Fläche wird von jeder sie doppelt berührenden Ebene nach zwei Kegelschnitten geschnitten.

Die Übertragung der Constructionen bezüglich der Kreisringfläche auf die Fläche W begegnet insoferne graphischen Schwierigkeiten, als die erläuterte Collineation zwischen beiden nicht immer reell ist, was schon daraus hervorgeht, dass die Endpunkte der durch a halbirten Sehne von w bei der Rotation einen Doppelkreis auf der Fläche W beschreiben, welcher ebenso gut reell wie imaginär sein kann, in allen Fällen aber dem absoluten Kreis auf der Ringfläche entsprechen muss.

7. In weiterer Anwendung unserer Betrachtungen wollen wir noch folgende Aufgabe lösen.

Eine Rotationsfläche Z wird von einer sie im Punkte D berührenden Ebene E geschnitten; es sind die Krümmungskreise d_1, d_2 der Schnittcurve im Punkte D zu ermitteln.

Wir setzen voraus, dass die Rotationsfläche durch ihre Meridiancurve z gegeben ist. Der Einfachheit der Darstellung halber projiciren wir in die durch D gehende Meridianebene, wie früher. Weiter sei — Fig. 2 — Q der zu D gehörige Krümmungsmittelpunkt von z und $\mathfrak{Q}$ der zu Q gehörige Krümmungsmittelpunkt der Evolute von z. Dadurch sind die vier in D consecutiven Punkte von z vollkommen zum Ausdruck gebracht.

Behufs unserer Aufgabe können wir die Meridiancurve z durch irgend einen Kegelschnitt ersetzen, welcher in D hyperosculirt. Macht man $QL = \frac{1}{3}\mathfrak{Q}Q$, so ist, wie bekannt, (DL) ein gemeinschaftlicher Durchmesser für alle derartigen Kegelschnitte. Jeder Kegelschnitt, welcher z in D osculirt und seinen Mittelpunkt auf (DL) hat, besitzt mit z dieselben vier

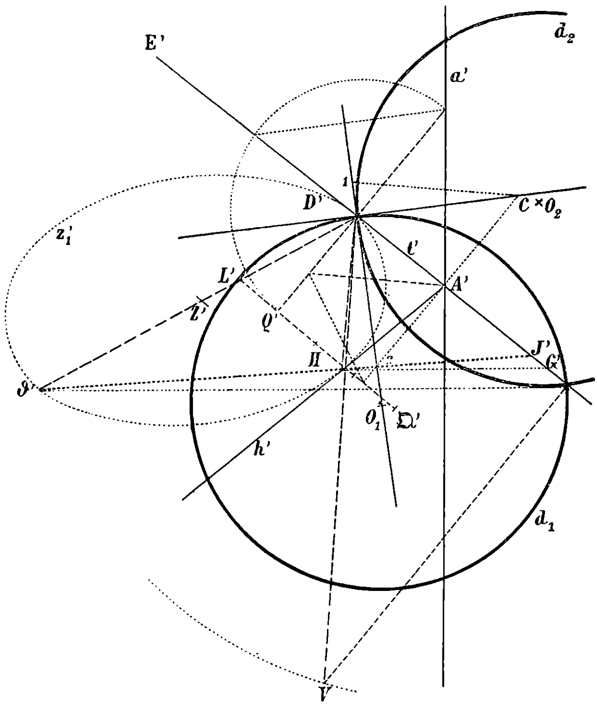

Fig. 2.

in D unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte. Unter diesen Kegelschnitten befindet sich ein einziger z_1, welcher die zur Tangente t in D an z in Bezug auf die Rotationsaxe a orthogonalsymmetrische Gerade h berührt. Diesen Kegelschnitt z_1 wollen wir für unsere Construction verwenden. Denn, wenn z_1 von h im Punkte H berührt wird, dann berührt unsere Ebene E, da sie zur Meridianebene von D normal ist, die durch Rotation von z_1 um a erzeugte Fläche Z_1 nicht nur im Punkte D, sondern auch in dem Gegenpunkte G von H in Bezug auf a; in Folge dessen schneidet $\mathbf{E}$ die Fläche $\mathbf{Z}_1$ nach zwei zu einander in Bezug auf (DG) symmetrischen Kegelschnitten v, w, welche die Schnittcurve von $\mathbf{E}$ mit $\mathbf{Z}$ in D osculiren.

Unsere Aufgabe geht also schliesslich darauf aus, den Krümmungskreis eines Kegelschnittes in einem Punkte desselben zu construiren.

Bei unserer Darstellung wird der Schnitt mit $\mathbf{E}$ in derjenigen Lage abgebildet, welche er annimmt, nachdem er um (DG) in die Ebene $[Da]$ gedreht worden ist.

Hat man irgend einen Kegelschnitt, welcher z in D hyperosculirt, so sind seine Axen, die Tangente t und die zugehörige Normale (DQ), Tangenten einer sogenannten Steiner'schen Parabel, welche die Normale (DQ) im Krümmungsmittelpunkte Q berührt. Diese Parabel ist nun durch ihre Leitgerade (DL), die Tangenten t, (DQ) und den Berührungspunkt Q der letzteren vollkommen bestimmt; sie ist also für alle die erwähnten Kegelschnitte dieselbe. Daraus folgt, dass die Axen aller z in D hyperosculirenden Kegelschnitte Tangenten an die betrachtete Parabel sind.

Auf Grund dieser Bemerkung lässt sich der Berührungspunkt H leicht ermitteln.

Wir denken uns vorerst denjenigen in D hyperosculirenden Kegelschnitt z_2, dessen eine Axe durch den Schnittpunkt A der Tangente t mit der Rotationsaxe a geht. Diese Axe wird als Tangente der vorigen Parabel nach dem Satze von Brianchon gefunden. Man legt etwa durch A die Parallele zu (DQ) und von deren Schnittpunkte mit $(Q\mathfrak{Q})$ errichtet man die Senkrechte zu (DL); der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit (DQ) ist ein zweiter Punkt der fraglichen Axe. Nun ist z_1 mit z_2 centrisch collinear für D als Centrum und t als Axe der Collineation. Daraus folgt, dass die Senkrechte von D auf die ermittelte Axe von z_2 die Gerade h im gewünschten Punkte H schneidet.

Um einen der Kegelschnitte v, w, etwa den ersten, zu ermitteln, construiren wir zunächst seine Tangente in D_1, vortheilhaft auf die in Art. 5 angegebene Weise.

Die Verbindungsgerade von A mit dem Mittelpunkte der Strecke DH würde (DL) im Mittelpunkte Z des Kegelschnittes z_1

Behufs unserer Aufgabe können wir die Meridiancurve z durch irgend einen Kegelschnitt ersetzen, welcher in D hyperosculirt. Macht man $QL = \frac{1}{3}\mathfrak{Q}Q$, so ist, wie bekannt, (DL) ein gemeinschaftlicher Durchmesser für alle derartigen Kegelschnitte. Jeder Kegelschnitt, welcher z in D osculirt und seinen Mittelpunkt auf (DL) hat, besitzt mit z dieselben vier

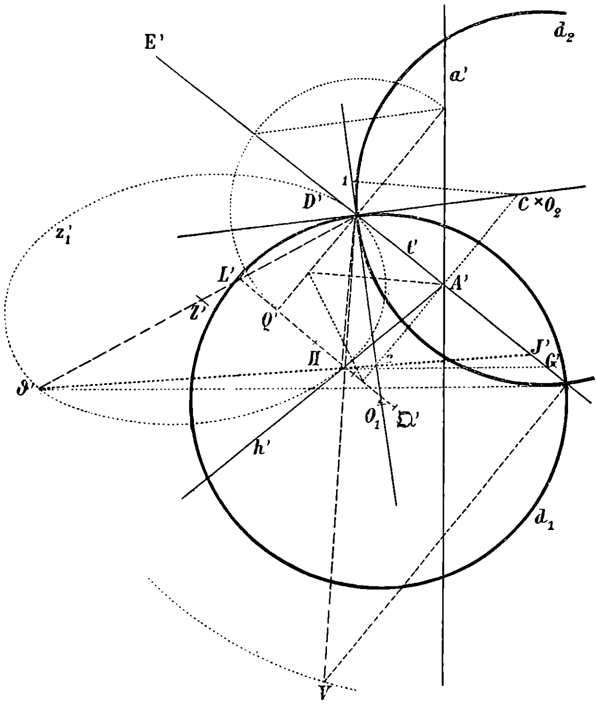

Fig. 2.

in D unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte. Unter diesen Kegelschnitten befindet sich ein einziger z_1, welcher die zur Tangente t in D an z in Bezug auf die Rotationsaxe a orthogonalsymmetrische Gerade h berührt. Diesen Kegelschnitt z_1 wollen wir für unsere Construction verwenden. Denn, wenn z_1 von h im Punkte H berührt wird, dann berührt unsere Ebene $\mathfrak{E}$, da sie zur Meridianebene von D normal ist, die durch Rotation von z_1 um a erzeugte Fläche Z_1 nicht nur im Punkte D, sondern auch in dem Gegenpunkte G von H in Bezug auf a; in Folge dessen schneidet E die Fläche Z_1 nach zwei zu einander in Bezug auf (DG) symmetrischen Kegelschnitten v, w, welche die Schnittcurve von E mit Z in D osculiren.

Unsere Aufgabe geht also schliesslich darauf aus, den Krümmungskreis eines Kegelschnittes in einem Punkte desselben zu construiren.

Bei unserer Darstellung wird der Schnitt mit E in derjenigen Lage abgebildet, welche er annimmt, nachdem er um (DG) in die Ebene $[Da]$ gedreht worden ist.

Hat man irgend einen Kegelschnitt, welcher z in D hyperosculirt, so sind seine Axen, die Tangente t und die zugehörige Normale (DQ), Tangenten einer sogenannten Steiner'schen Parabel, welche die Normale (DQ) im Krümmungsmittelpunkte Q berührt. Diese Parabel ist nun durch ihre Leitgerade (DL), die Tangenten t, (DQ) und den Berührungspunkt Q der letzteren vollkommen bestimmt; sie ist also für alle die erwähnten Kegelschnitte dieselbe. Daraus folgt, dass die Axen aller z in D hyperosculirenden Kegelschnitte Tangenten an die betrachtete Parabel sind.

Auf Grund dieser Bemerkung lässt sich der Berührungspunkt H leicht ermitteln.

Wir denken uns vorerst denjenigen in D hyperosculirenden Kegelschnitt z_2, dessen eine Axe durch den Schnittpunkt A der Tangente t mit der Rotationsaxe a geht. Diese Axe wird als Tangente der vorigen Parabel nach dem Satze von Brianchon gefunden. Man legt etwa durch A die Parallele zu (DQ) und von deren Schnittpunkte mit $(Q\mathfrak{Q})$ errichtet man die Senkrechte zu (DL); der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit (DQ) ist ein zweiter Punkt der fraglichen Axe. Nun ist z_1 mit z_2 centrisch collinear für D als Centrum und t als Axe der Collineation. Daraus folgt, dass die Senkrechte von D auf die ermittelte Axe von z_2 die Gerade h im gewünschten Punkte H schneidet.

Um einen der Kegelschnitte v, w, etwa den ersten, zu ermitteln, construiren wir zunächst seine Tangente in D_1, vortheilhaft auf die in Art. 5 angegebene Weise.

Die Verbindungsgerade von A mit dem Mittelpunkte der Strecke DH würde (DL) im Mittelpunkte Z des Kegelschnittes z_1

treffen. Wir ziehen es aber vor, statt dessen den zweiten Endpunkt ϑ des Durchmessers (DL) von z_1 zu construiren. Diesen erhalten wir, wenn wir $AJ = DA$ auf E′ auftragen und den Punkt J mit H verbinden. Die Verbindungsgerade schneidet (DL) bereits im Punkte ϑ.

Wählt man auf z_1 einzelne Punkte, so entsprechen ihnen auf der Rotationsfläche Z_1 Parallelkreise, von denen jeder die Ebene E in zwei Punkten schneidet. Es ist leicht zu entscheiden, welcher von diesen zwei Punkten dem Kegelschnitt v angehört. Die Gerade (DH) theilt nämlich den Kegelschnitt z_1 in zwei Theile. Auf dem Kegelschnitte v liegen nun die Schnitte der Ebene E mit den Parallelkreisen, welche den Punkten auf dem einen Theil von z_1 zugehören, auf der einen Seite von t, die Schnittpunkte mit den Parallelkreisen, welche den Punkten auf dem anderen Theile von z_1 zugehören, auf der entgegengesetzten Seite von t. Für den zweiten Kegelschnitt w gilt es umgekehrt. Dieses Entsprechen der Theile auf z_1 den durch t gebildeten Theilen auf v geht aus der Lage der Tangente (DC) von v in D sofort in unzweideutiger Weise hervor.

Zunächst ist hier leicht einzusehen, dass die Normalebene zu a durch den Mittelpunkt Z die Ebene E in der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von v und w scheidet. Denken wir uns weiter irgend einen Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von z_1, so erkennen wir, dass die Parallelkreise welche den Endpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ desselben entsprechen, den Kegelschnitt v auch in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden; man erkennt dies sofort, wenn man die Lage der vier Punkte von z_1 in den zu a normalen Ebenen durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und die ihnen auf v entsprechenden vier Punkte näher ins Auge fasst.

Dies vorausgeschickt, wollen wir den auf v liegenden Schnittpunkt V des durch ϑ gehenden Parallelkreises ermitteln. Zu dem Behufe denken wir uns durch diesen Parallelkreis eine Kugel gelegt, welche ihren Mittelpunkt in A hat, und ermitteln auf derselben denjenigen Kreis, dessen Durchmesser gleich der Sehne ist, welche die Ebene E mit dem Parallelkreise von ϑ bestimmt; der Halbmesser dieses Kreises gibt die Entfernung des Punktes V von t an. Um diesen Punkt in der früher erwähnten gedrehten Länge von $[k]$ darzustellen, haben wir bloss von ϑ' auf a' die Senkrechte bis zum Schnitte mit E und von hier die Senkrechte zu E' zu errichten; diese wird von dem Kreise, der in A seinen Mittelpunkt hat und durch ϑ' geht, in dem gedrehten Punkte V getroffen.

Aus unserer Betrachtung folgt, dass DV der Grösse und Lage nach ein Durchmesser von v ist.

Dadurch ist der Kegelschnitt v durch seine linearen Bestimmungsstücke vollkommen gegeben, und wir können somit den Krümmungskreis d_1 desselben für den Punkt D leicht construiren.

Die Construction gestaltet sich besonders einfach, wenn wir den folgenden Zusammenhang berücksichtigen.

Der Schnittpunkt P der Geraden HD mit der Rotationsaxe a ist zum Punkte A harmonisch conjugirt in Bezug auf die durch D und H zur Axe a normal gelegten Ebenen. Die Normalebene von P, in welcher der Doppelkreis von Z_1 liegt, schneidet t im Punkte $\mathfrak{P}$, welcher alsdann zu A harmonisch conjugirt ist, in Bezug auf die Punkte D, G. Denken wir uns weiter die zwei Punkte von v, welche in der zur Projectionsebene $[Da]$ normalen Meridianebene, also auf der in E durch den Punkt A zur Tangente t gelegten Senkrechten (AC) liegen.

Die Tangentialebenen in diesen Punkten an Z_1 müssen durch die Gerade $(P\mathfrak{P})$ gehen und schneiden die Ebene E in den Tangenten von $\mathfrak{P}$ an v. Es ist somit die Gerade (AC) die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf v. Dies gilt zunächst für den Fall als (AC) den Kegelschnitt reell schneidet, lässt sich aber sogleich in bekannter Weise auch auf den Fall übertragen, wenn dies nicht geschieht.

Daraus folgt, dass sich die Tangenten von v für die Punkte D und G auf der Geraden (AC) schneiden. Der Schnittpunkt selbst wurde hier mit C bezeichnet.

Was nun die Ermittlung des Kreises d_1 als Krümmungskreises von v in D anbelangt, so geschieht dieselbe nach dem Satze, dass die zu den Strahlen des Büschels durch D normal conjugirten Geraden in Bezug auf v eine Parabel umhüllen, welche die Normale an v in D in dem Mittelpunkte O_1 des gesuchten Kreises d_1 berührt. Für diese Parabel sind die Tangente und die Normale in D an v, ferner die Gerade (CA)

Tangenten, und DV ist ihre Leitgerade; der Berührungspunkt O_1 der Normale (DO_1) mit der Parabel kann ohneweiters gefunden werden.

Dies liefert dann folgendes Resultat.

Wird die Normale an v in D von der Senkrechten durch C auf (DV) im Punkte 1, von der Geraden (AC) im Punkte 2 geschnitten, so ist die Strecke $\overline{1}, \overline{2}$ gleich dem Halbmesser DO_1 von d_1.[1]

Da der zweite Krümmungskreis von d_2 zu d_1 in Bezug auf t symmetrisch ist, so ist er dadurch auch schon ermittelt.

Man vergleiche diesbezüglich C. Pelz: Krümmungshalbmesserconstructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes in den Sitzber. der k. böhm. Ges. der Wiss. 1979, ferner diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a., S. 1233, u. f.