Über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss

E. Oekinghaus,

Lehrer an der königl. Baugewerkschule in Königsberg.

(Mit 1 Textfigur.)

Unter den seitens der Gussstahlfabrik Fr. Krupp in Essen herausgegebenen zahlreichen Schiessversuchsberichten ist eine den Physiker besonders interessirende Tabelle über die »Ermittelung von Schallgeschwindigkeiten« von Wichtigkeit, da dieselbe den Einfluss grosser Geschossanfangsgeschwindigkeiten auf die Schallgeschwindigkeit zahlenmässig zum Ausdruck bringt.

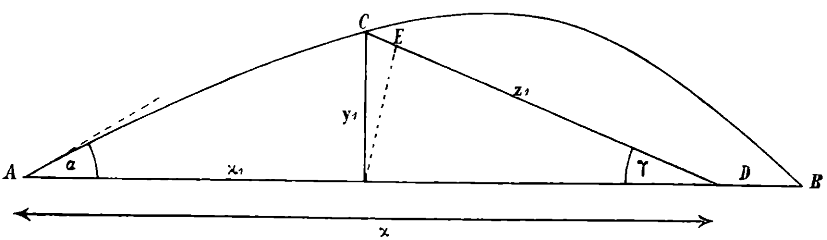
Bei den Versuchen kam es darauf an, festzustellen, ob die Schallgeschwindigkeit beim Schuss grösser als die Schallgeschwindigkeit für unbewegte Luft ist. Der Beobachter, in ungefährer Entfernung der Wurfweite, markirte mittelst Telephon den Mündungsknall des Geschützes und mit freiem Ohr die vorbeipassirende Schallwelle, indem er eine Hundertstelsecunden zeigende Uhr beim ersten Moment in Gang setzte, beim zweiten arretirte. Hiedurch gelangte man zur Kenntniss der zwischen beiden Momenten verflossenen Zeit, und es war dann nur noch Sache des Calcüls, auf Grundlage einer Hypothese über das Verhalten der begleitenden Kopfwelle die Bewegungsverhältnisse mathematisch zu bestimmen.

Herr Professor E. Mach, dem wir in akustisch-optischer Beziehung schon so manche Aufschlüsse über das Verhalten der Luft zu den sie durchschneidenden Geschossen verdanken, hat auch zuerst die Ansicht ausgesprochen, dass die knallende Kopfwelle des Projectils mit der Projectilgeschwindigkeit fortschreitet, so lange letztere grösser ist, als die normale Schallgeschwindigkeit, und hat in seinem Aufsatze (siehe diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1889, S. 1257) »Über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss etc.« eine Untersuchung darüber angestellt, inwieweit die von ihm ausgesprochene und durch photographische Versuche dargestellte Ansicht durch die Theorie bestätigt wird.

Angeregt durch die Mach'schen Untersuchungen haben wir uns ebenfalls mit dieser Materie beschäftigt, und zwar in der Absicht, erstlich, festzustellen, ob die von uns im »Archiv für die Artillerie- und Ingenieurofficiere des deutschen Reichsheeres« (1893—1896) aufgestellte neue ballistische Hypothese über die Flugbahn der Geschosse auch an diesem Problem die Probe bestehen und damit auch auf akustischem Wege den Beweis zu liefern im Stande sei, dass die Flugbahn (nahezu) eine Hyperbel ist; und zweitens, in Consequenz dieser Theorie zu untersuchen, ob die kleinen Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung, die sich bei Mach noch finden, auf Grundlage einer anderen Methode vielleicht zum Verschwinden gebracht werden könnten.

Inwieweit dies gelungen, mögen die nachfolgenden Entwickelungen zeigen. Da wir am Schluss noch eine Methode zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit durch die Schallzeit bringen, so zweifeln wir nicht, dass sich auch die Artilleristen unter den Physikern für dieselbe und vielleicht auch für die oben genannte Theorie interessiren werden.

In nachstehender Figur bedeutet A die Mündung der Kanone, AB die Wurfweite W im Mündungshorizonte, welcher



die Wurfzeit T entspricht. C ist der Punkt $x_1 y_1$ der Bahn, wo die Fluggeschwindigkeit v gleich ist der Schallgeschwindigkeit s.

Die entsprechende Zeit von A bis C sei t_1. Der Beobachter in D sei x Meter von A entfernt. Die Strecke $CD = z_1$ werde vom Schall in t_2 Secunden zurückgelegt, so dass also $t = t_1 + t_2$ die volle Schallzeit bezeichnet, die durch die Beobachtung gegeben ist. Es ist zu beweisen, dass die berechnete mit ihr wenigstens annähernd übereinstimmt.

Aus unserer Hyperbeltheorie entnehmen wir zu diesem Zwecke die nachfolgenden Formeln und bemerken vorab, dass v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, α die Erhöhung, U_0 die Luftwiderstandsconstante an der Mündung, τ den Tangentenwinkel in C bedeutet.

Durch die Beobachtung sind gegeben: v_0, W, T. Aus diesen einzigen Daten nebst den meteorologischen Elementen und der Schallgeschwindigkeit kann nun die Schallzeit wie folgt berechnet werden:

Vermittelst der Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gT^2}{32W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8W}{v_0 \cos \alpha T}}\right)^2 \qquad 1)$$

wird zuerst die Erhöhung α ermittelt, was wenig Mühe macht, da α im Allgemeinen klein und demnach $\cos \alpha$ zunächst $= 1$ gesetzt werden kann.

Alsdann ergibt sich aus

$$U_0 = \frac{3(v_0^2 \sin 2\alpha - gW)}{4W \sin \alpha} \qquad 2)$$

die zeitliche Widerstandsconstante der Luft. Die Horizontalcomponente der Geschwindigkeit in der Bahn ist

$$v_x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\left(1 + \frac{U_0}{3v_0} t\right)^3} \qquad 3)$$

woraus noch

$$\Delta x = -\left(\frac{v_0}{U_0} + \frac{1}{3} t\right) \Delta v_x, \qquad \Delta y = \Delta x . \operatorname{tg} \tau$$

folgt.

Da der Punkt C, wo $v = s$, immer dem Scheitel der Flugbahn nahe ist, so ist τ oder der Winkel zwischen Tangente und Horizont immer klein. Die Flugzeit von A bis C kann dann aus

$$t_1 = \frac{3\,v_0}{U_0}\left(\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{v \cos\tau}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right),\ k = \frac{4}{3}\,\frac{U_0}{g} \tag{4}$$

in der Weise berechnet werden, dass man zuerst $\tau = 0$, $v = s$ setzt und dann vermittelst

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{\left(1 + \frac{U_0}{3\,v_0}t_1\right)^4 - 1}{k \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{v \cos\tau}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}{k \cos\alpha} \tag{5}$$

den genauen Werth von τ und t_1 ermittelt.

Die Coordinaten von C sind dann gegeben durch

$$x_1 = \frac{3\,v_0^2 \cos\alpha}{2\,U_0}\left(1 - \left(\frac{v \cos\tau}{v_0 \cos\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\right), \qquad v = s,$$

$$y_1 = \frac{x_1}{k \cos\alpha}\left(1 + k \sin\alpha - \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{v \cos\tau}\right)^{\frac{2}{3}}\right), \tag{6}$$

oder

$$y_1 = x_1\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{2\,v_0 \cos\alpha}\left(1 + \frac{U_0 t_1}{6\,v_0}\right)\right)$$

Die Strecke z_1 ist demnach ebenfalls bekannt

$$z_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} \tag{7}$$

und mit ihr die Schallzeit

$$t_2 = \frac{z_1}{s}, \qquad t = t_1 + t_2, \tag{8}$$

womit alle Rechnungsgrössen bestimmt sind.

Um eine Anwendung dieser Formeln zu geben, wählen wir folgenden Versuch.

15 *cm* Kanone $L/30$ von Krupp. G. G. 51 *kg*.

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 501\,m$; Wurfweite $W = 6431\,m$; Wurfzeit 18·99 Secunden; $x = 6500\,m$; $s = 334\,m$; $g = 10\,m$.

Die Berechnung gibt:

Abgangswinkel $\alpha = 12°\,30'$; $U_0 = 22\cdot28\,m$; $\tau = 0°\,20'$; $t_1 = 9{\cdot}09^s$; $x_1 = 3673\,m$; $y_1 = 450\,m$; $z_1 = 2862\,m$; $t_2 = 8\cdot57^s$, also

die ganze Schallzeit.	$t = 17\cdot66^s$
die beobachtete war. .	18·15
Differenz .	$-0\cdot49^s$

Wir fassen die Rechnungsergebnisse wie folgt zusammen:

Das aus der 15 *cm* Kanone $L/30$ unter 12° 30′ und mit 501 *m* A.-G. abgefeuerte Geschoss von 51 *kg* erreicht nach 9·094 Secunden Flugzeit in 3673 *m* Horizontalweite die Höhe von 450 *m* und hat an dieser Stelle die Schallgeschwindigkeit von 334 *m*. Die bisher mitgeführte knallende Kopfwelle löst sich hier vom Geschoss, eilt diesem voraus und erreicht den 2862 *m* entfernten Beobachter nach 8·57 Secunden. Die ganze Schallzeit beträgt 17·66 Secunden, die beobachtete 18·15 Secunden, wonach die berechnete um 0·49 Secunden kleiner ist, als die beobachtete.

Wir würden nun nicht anstehen, diese allerdings kleine Differenz auf Rechnung der Theorie zu setzen, wenn wir die Überzeugung gewinnen könnten, dass die Beobachtungsdaten absolut genau sind. Die Krupp'schen Schiessversuche zeichnen sich aber bekanntlich durch ausserordentliche Genauigkeit und Zuverlässigkeit aus, wesshalb wir die obige Fehlergrösse als in der Unvollkommenheit der Theorie begründet hinnehmen müssen, wenn sich keine andere Erklärung für die Existenz derselben findet. Da aber der obige Fall nur ein einzelner ist, der nichts entscheidet, so wird es nützlich sein, weitere Versuche durchzurechnen und sie mit der Erfahrung zu vergleichen unter Berücksichtigung derjenigen physikalischen Factoren und Verhältnisse, die den Vorgang störend beeinflussen.

Im obigen Beispiele war die Schallgeschwindigkeit zu 334 *m* angenommen. Nach der Schallformel

$$s = 330 \cdot 7 \left(1 + 0 \cdot 00183\, t + 0 \cdot 189 . \frac{e}{b}\right) \tag{9}$$

ist dieselbe von der Temperatur, dem Dunstdruck und damit auch vom Barometerstand abhängig. Da indessen die Temperatur im Allgemeinen mit der Höhe abnimmt, so scheint es zweckmässig zu sein, darauf Rücksicht zu nehmen, wenigstens bei bedeutenderen Flughöhen. Angenommen, dass bei je 100 *m* Höhenzunahme die Temperatur um $\Delta t = 0^\circ 8$ sinkt, so würde z. B. die Abnahme bei 833 *m* Höhe $6^2/_3{}^\circ$ und demnach die dort geltende Schallgeschwindigkeit etwa $0 \cdot 6 . 6^2/_3 = 4\, m$ weniger betragen als unten. Bei 760 *mm* Luftdruck, $+20^\circ$ C. und 85% relative Feuchtigkeit erhalten wir mit Mach aus der obigen Formel unter Benützung von $e = 0 \cdot 85 . 17 \cdot 4$ die untere Schallgeschwindigkeit $s = 344\, m$, die obere würde hiernach 340 *m* und mit Windgeschwindigkeit $340 + 8 = 348\, m$ anstatt 352 *m* sein. Hiernach müsste dann auch die entsprechende Fluggeschwindigkeit auf 348 *m* reducirt werden, wodurch der Punkt C in der Flugbahn, in welchem Geschoss- und Schallgeschwindigkeit zusammenfallen, etwas weiter nach vorn rückt. Ferner ist zu beachten, dass letztere von dem oberen Punkte bis zum Beobachter wieder stetig zunimmt, und man erkennt, dass eine genauere Berechnung dieser Verhältnisse, die vollständige Kenntniss der Temperatur, des Dunstdruckes, der Windgeschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn zur Voraussetzung haben müsste. Eine einfachere Betrachtung führt zu folgendem Resultate.

Unten sei die Temperatur t_0, auf je 100 *m* Höhendifferenz nehme sie um Δt ab, in der Höhe y ist sie also $t = t_0 - \frac{y \Delta t}{100}$

Der von oben herabkommende Schall durchläuft nun die Strecke z_1, die mit der Horizontalen den Winkel γ bilden möge, mit steigender Geschwindigkeit. Der Theilstrecke z entspricht die Höhe $y = y_1 - z \sin \gamma$, und letzterer die Temperatur $t = t_0 - \frac{\Delta t}{100} (y_1 - z \sin \gamma)$.

Wir nehmen den Werth $i = 1 + 0 \cdot 189 \frac{e}{b}$ als constant an und erhalten als Geschwindigkeitsausdruck des Schalles in der

Strecke z_1

$$s = \frac{dz}{dt} = 330\cdot 7\left(i + 0\cdot 00183\left(t_0 - \frac{\Delta t}{100}(y_1 - z \sin\gamma)\right)\right),$$

und integrirt und nach t aufgelöst

$$t_2 = -\frac{100 . z_1}{330\cdot 7 . 0\cdot 00183\,\Delta t . y_1}\, ln\left(1 - \frac{0\cdot 00183\,\Delta t . y_1}{100(i + 0\cdot 000183\, t_0)}\right),$$

oder einfacher

$$t_2 = \frac{z_1}{330\cdot 7\,(i + 0\cdot 00183\, t_0)}\left(1 + \frac{0\cdot 00183\,\Delta t y_1}{200\,(i + 0\cdot 00183\, t_0)}\right).$$

Letzteren Ausdruck kann man übrigens auch aus dem Mittel zwischen den extremen Werthen

unten $\qquad s_0 = 330\cdot 7(i + 0\cdot 00183\, t_0),$

oben. $\qquad s_1 = 330\cdot 7\left(i + 0\cdot 00183\, t_0 - \frac{0\cdot 00183\,\Delta t . y_1}{100}\right)$

erhalten, indem man $s_m = \frac{1}{2}(s_0 + s_1)$ bildet, und man erhält so für die mittlere Schallzeit von C nach D

$$t_2 = \frac{z_1}{330\cdot 7\,(i + 0\cdot 00183\, t_0)\left(1 - \frac{0\cdot 00183\,\Delta t . y_1}{200\,(i + 0\cdot 00183\, t)}\right)},$$

was mit dem vorhergehenden Ausdruck bis auf Grössen zweiter Ordnung übereinstimmt.

Für $z_1 = 4353\, m$, $t_0 = +20°$ C., e wie oben, ist demnach die mittlere Schallgeschwindigkeit $\frac{1}{2}(348 + 352) = 350\, m$ und also die Schallzeit $t_2 = 4353 : 350 = 12\cdot 44$ Secunden.

Nach diesen Bestimmungen ist das zweite Beispiel der Tabelle berechnet worden. Es ist indessen hierzu zu bemerken, dass die obige Temperaturabnahme von 0°8 hypothetisch ist, indem unter Umständen anstatt einer Abnahme sogar eine

Temperaturzunahme mit der Höhe eintreten kann. Nehmen wir indessen für einen zweiten Fall Δt zu $-0^\circ 6$ für 100 *m* Höhenunterschied an, so macht das in 850 *m* Höhe circa 5°, mithin eine Abnahme von etwa $5 . 0 \cdot 6 = 3\,m$ an der Schallgeschwindigkeit daselbst. Ist dieselbe unten 349 *m*, so ist sie also oben 346 *m* und bei 1 *m* Windgeschwindigkeit 347 *m*, während die mittlere $347 \cdot 5 + 1 = 348 \cdot 5\,m$ beträgt. Nach diesen modificirten Bestimmungen wurde das sechste Beispiel ausgerechnet.

In der nebenstehenden Tabelle haben wir auf Grundlage der genannten Theorie und der Krupp'schen Versuchsergebnisse vorläufig in sieben Beispielen die Rechnungsresultate zum Ausdruck gebracht und dürfte es sich empfehlen, die a. a. O. von Herrn Professor Mach berechneten damit zu vergleichen.

Von Werth ist auch die Kenntnissnahme der von der königl. preuss. Artillerie-Prüfungscommission angestellten »Versuche zur Ermittelung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Geschützknalles und des Werthes von Schalluhren als Entfernungsmesser« (Archiv, 98. Band, 1891).

In der vorliegenden Tabelle sind die Zahlen in den letzten Verticalcolonnen die wichtigsten.

Der Unterschied zwischen der berechneten und beobachteten Schallzeit beträgt bis auf einen Fall noch keine Secunde, im Durchschnitt etwa $^1/_2$ Secunde. Bis auf diese nicht wohl weiter zu vermindernde Differenz ist die Übereinstimmung der Theorie mit den Versuchsresultaten ziemlich befriedigend und dürfte damit die durch die photographische Aufnahme fliegender Geschosse durch Mach und Salcher gestützte Ansicht des ersten, dass die in den Photogrammen erkennbaren Luftverdichtungswellen vor der Geschossspitze als Schallwellen anzusehen sind, einen weiteren Beweis erhalten haben. Übertrifft also die Geschwindigkeit des Geschosses die Schallgeschwindigkeit, so ist die Einwirkung desselben auf letztere eine ganz bedeutende. Es ist nun von Interesse, zu prüfen, inwieweit unsere Berechnungen mit den von Mach ausgeführten übereinstimmen.

Zusammenstellung der Rechnungsergebnisse zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Geschütz	v_0	W	T		U_0			x_1	y_1	z_1	t_1	t_2	t ber.	t' beob.	Diff. $t'-t$
15 *cm* K. *L*/30 G.-G. 51 *kg* .	501	6431	18·99	12°30'	22 28	334	6500	3673	450	2862	9·09	8·57	17·66	18·15	0·49
15 *cm* K. *L*/30 G.-G. 51 *kg* .	490	8410	26·73	18 20	16·42	348	8000	3727	833	4353	9·27	12·44	21·71	22·39	0·68
15 *cm* K. *L*/22 G.-G. 34·5 *kg*	532	6703	22·78	15 18	32·67	351	6500	2854	558	3688	6·73	10·50	17·23	17·82	0·59
12·5 *cm* K. *L*/23 G.-G. 18·25 *kg*	468	4044	13·58	9 48	35·99	339	3951	1676	206	2284	4·24	6·73	10·97	11·19	0·22
10·5 *cm* K. *L*/35 G.-G. 18 *kg*.	512	5203	15·17	9 50	30·55	336	5466	3026	315	2460	7·34	7·32	14·66	15·98	1·32
12 *cm* K. *L*/35 G.-G. 26 *kg* .	545	8273	26·90	17 28	26·40	347	7033	3843	852	3302	9·05	9·47	18·52	19·15	0·63
24 *cm* K. *L*/35 G.-G. 215 *kg*.	548	10338	28·45	17 14	16·30	345	10000	6414	1000	3722	15·06	10·79	25·85	26·52	0·67

Die nachstehende Zusammenstellung beider Resultate hinsichtlich der verbleibenden Differenzen zeigt dies für die ausgewählten 7 Fälle hinlänglich deutlich (vergl. a. a. O. S. 1270 u. f.):

	II_6	II_5	IV	V	VI	XI	XII
Mach.	0·35	0·53	1·04	1 17	0·97	0·77	0·97
O. .	0·49	0·68	0·59	0·22	1·32	0·63	0·67

Man sieht, dass die beiden ersten Fälle wenig voneinander verschieden sind. Bei IV und V treten kleinere Differenzen auf, dagegen zeigt sich bei VI eine stärkere Abweichung unseres Resultates gegenüber einer geringeren bei Mach. Die beiden letzten liefern wieder günstigere Differenzen. Unter sieben Fällen also ein ungünstiger.

Wie es scheint, hat unsere Theorie die bisher bestehenden Differenzen um ein geringes vermindert. Aber zum Verschwinden sind sie nicht gebracht worden. Eigenthümlich ist es allerdings, dass sie sämmtlich negativ sind, was vielleicht auf einen bei allen Versuchen ständig wiederkehrenden constanten Sinnesfehler schliessen lässt. Herr Prof. Mach gibt in seiner Abhandlung verschiedene Gründe an, die die Ursachen jener vielleicht bedingen. Nach L. Exner beträgt bei Ausführung einer Bewegung nach einem Schall die Reactionszeit 0·136 Secunden, demnach würde dieser freilich wechselnde persönliche Fehler die obigen Differenzen ein wenig und speciell die unter V vermerkte um etwa die Hälfte vermindern. Im allgemeinen sind die Rechnungsergebnisse der Hyperbelhypothese nicht ungünstig.

Die Rechnungen setzen voraus, dass die knallende Kopfwelle noch bei den ermittelten Schallgeschwindigkeiten wahrnehmbar sei. Nach Mach existirt sie nur bei die Schallgeschwindigkeit übersteigenden Projectilgeschwindigkeiten und wird bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit schwächer; vielleicht dürfte die Wahrnehmbarkeit derselben schon bei 360—370 m/sec. stattfinden. Berechnungen, die wir hierüber angestellt, ändern die Resultate indessen nur wenig. Es wäre daher sehr wünschenswerth, wenn die Versuche über die Schallverhältnisse fliegender Geschosse wieder aufgenommen und die Quelle der ständig negativ auftretenden Differenzen vollständig und überzeugend nachgewiesen würde. Das Nächste und Natürlichste ist indessen, die Ursachen dieser Differenzen in der Theorie zu suchen, und demnach vor allem sich nach derjenigen Modification der letzteren umzusehen, durch welche jene möglichst ganz zum Verschwinden gebracht werden. Über diese von uns schon jetzt, wenn auch vorläufig eingeleiteten Untersuchungen werden wir, wenn günstig, seinerzeit kurz berichten.

Aus der Tabelle lassen sich noch leicht manche bemerkenswerthe Thatsachen feststellen, die von Interesse sind. Bei den beiden letzten Versuchen z. B. hat die eine Kanone das doppelte Kaliber der anderen, während Anfangsgeschwindigkeit und Abgangswinkel nahezu dieselben sind. Gleichwohl ist die horizontale Entfernung des Punktes C des Zusammenfallens der Flug- mit der Schallgeschwindigkeit von der Mündung im ersten Falle bei weitem grösser als im zweiten, was seinen Grund in der entsprechend grösseren Querschnittsbelastung und der damit verbundenen langsameren Geschwindigkeitsabnahme hat.

Die Berechnung der obigen Tabelle verlangte einen ziemlich grossen Formelapparat. Bei kleineren Erhöhungen lässt sich indessen eine verhältnissmässig einfache Formel in Anwendung bringen, wenn man statt der Strecke CD ihre Projection in der Horizontalen, also $x-x_1$ substituirt. Bildet man unter dieser Voraussetzung den Ausdruck $t_1+\frac{x-x_1}{s}$, indem man die entsprechenden Werthe aus den Hauptformeln darin einführt, so erhält man nach einigen Reductionen als Formel für die Schallzeit

$$t = \frac{x}{s} - \frac{3v_0}{2U_0}\left(2+\frac{v_0\cos\alpha}{s} - \frac{2+\cos\tau}{\cos\tau^{1/3}}\left(\frac{v_0\cos\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \quad 10)$$

Hierin hat der Ausdruck $\frac{2+\cos\tau}{\cos\tau^{1/3}}$, in welchem τ der Tangentenwinkel im Punkte C ist, die Eigenthümlichkeit, dass er selbst bei grösseren τ sich fast gar nicht ändert, und für die vorliegenden Fälle den constanten Werth 3 (nahezu) behauptet.

Demnach kann man setzen

$$t = \frac{x}{s} - \frac{3v_0}{2U_0}\left(2 + \frac{v_0 \cos\alpha}{s} - 3\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \qquad 11)$$

Die hiernach berechnete Schallzeit ist von der nach den strengen Formeln berechneten umsoweniger verschieden, je kleiner die Erhöhung und das Verhältniss $y_1 : z_1$ ist. Kennt man noch die Werthe von x_1, y_1, z_1, so ist die noch zu addirende Correction $\frac{CE}{s} = \frac{z_1 - (x - x_1)}{s}$, oder annähernd $\frac{y_1^2}{2(x-x_1)s}$.

Die hiernach corrigirte Formel ist demnach

$$t = \frac{x_1 + z_1}{s} - \frac{3v_0}{2U_0}\left(2 + \frac{v_0 \cos\alpha}{s} - 3\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \qquad 12)$$

Beispiel. 24 *cm* Kanone. $v_0 = 548$, $\alpha = 17°14'$, $U_0 = 16 \cdot 30$, $s = 345$, $x = 10000$, $x_1 = 6414$, $y_1 = 1000$, $z_1 = 3722$, $\tau = 2°16'$.

Man erhält nach der ersten oder zweiten Formel

$$t = 25 \cdot 85,$$

was mit der früheren Berechnung übereinstimmt.

Hätten wir, der grösseren Höhe $y_1 = 1000\,m$ entsprechend, eine kleinere Schallgeschwindigkeit als 345 *m* zu Grunde gelegt, so würde eine grössere Schallzeit hervorgegangen und eine bessere Übereinstimmung mit der beobachteten die Folge gewesen sein. Es dürfte sich empfehlen, diesen Umstand, sowie die Thatsache, dass der Wind nicht immer beständig, sondern oft nur stossweise weht und nach oben hin stetig seine Richtung ändert, auch bei cyklonischem Wetter oft genug eine verticale Componente hat, im Auge zu behalten. Einzelne Störungsfunctionen dürften sich zuweilen ausgleichen. Nehmen wir an, dass im obigen Beispiele die Schallgeschwindigkeit nur 342, anstatt 345 *m* sei, so zeigt die Rechnung, dass die nunmehrige Schallzeit $25 \cdot 97^s$, statt der früheren $25 \cdot 85^s$, beträgt, also um $0 \cdot 12^s$ zugenommen hat. Um den gleichen Betrag vermindert sich dann auch die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung. (Die Verminderung von s bewirkt ein Vorrücken von C um $\Delta x = 115 \cdot 8$, $\Delta y = 4 \cdot 6$, und eine Änderung von $x_1 + z_1 = 10136$ um $\Delta(x_1+z_1) = 6 \cdot 4\, m$, also in Zeit $\frac{6 \cdot 4}{345} = 0 \cdot 02^s$).

Weiteres Beispiel. (Vergl. Mach, a. a. O., S. 1264). Mit der $12 \cdot 5\, cm$ R-Kanone L/23 Nr. 45 wurde ein Geschoss von $18 \cdot 25\, kg$ mit $468\, m$ Anfangsgeschwindigkeit abgefeuert. Die Wurfweite betrug $2915\, m$, die Schusszeit $8 \cdot 74$ Secunden, die Schallgeschwindigkeit $340\, m$. Die beobachtete Schallzeit wurde zu $7 \cdot 96$ Secunden notirt.

Es soll auf diesen Schuss die Formel 11) angewandt und die berechnete Schallzeit mit der beobachteten verglichen werden.

Vermittelst der Formel 1) erhalten wir zunächst den Abgangswinkel

$$\alpha = 6° \, 2' \, 26'',$$

und vermöge 2)

$$U_0 = 40 \cdot 809\, m$$

welches die (negative) Beschleunigung des Luftwiderstandes auf das Projectil beim Heraustreten aus der Mündung ist. Demzufolge geht 11) über in

$$t = \frac{2880}{340} - 17 \cdot 202\, (2 + 1 \cdot 3688 - 3 \cdot 3309),$$

woraus $t = 7 \cdot 818$, abgerundet $7 \cdot 82^s$ folgt.

Die Beobachtung ergab $7 \cdot 96^s$

Diff. $-0 \cdot 14^s$, Mach hat $1 \cdot 04^s$

Fügen wir noch

$$+0 \cdot 136^s$$

als persönlichen Fehler hinzu, so folgt

$$\text{Diff. } 0 \cdot 00^s$$

mithin vollständige Übereinstimmung der Theorie mit dem Versuch. Freilich mag hier der Zufall zu Gunsten der Theorie mitgespielt haben.

Die Anwendung der strengen Formeln auf den vorliegenden Fall würde an dem definitiven Resultat nichts ändern.

Methode zur Bestimmung der Geschossanfangsgeschwindigkeiten aus der Schallzeit.

Die vorhergehende Ermittlung der Schallzeit aus den Elementen der Bewegung liefert eine geeignete Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit, wenn die Erhöhung klein genug gewählt ist, um die Differenz CE vernachlässigen zu können.

Um von U_0 unabhängig zu sein, substituiren wir den Werth desselben

$$U_0 = 3\,\frac{(v_0^2 \sin 2\alpha - gW)}{W \sin\alpha}$$

in die genannte Formel, führen ein

$$Y = \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und erhalten durch Auflösen nach Y die höhere Gleichung

$$\frac{x-st}{W}\quad Y^6 - Y^3 + 3Y = 2 + \frac{g(x-st)}{2s^2 \operatorname{tg}\alpha}. \qquad 13)$$

Hat man hieraus Y berechnet, so erhält man die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit des Projectils aus

$$v_0 = \frac{s}{\cos\alpha}\,Y^3. \qquad 14)$$

Beispiel. Es soll die Anfangsgeschwindigkeit des 51 *kg* schweren Projectils der 15 *cm* Kanone $L/30$, Nr. 157, aus der bekannten Schallzeit berechnet werden.

Gegeben sind: Die Wurfweite $W = 6431\,m$, die Erhöhung $\alpha = 12^\circ 30'$, die Entfernung des Beobachters in der Schussebene von der Mündung $x = 6500\,m$, die Schallzeit $18\ 15^s$, die Schallgeschwindigkeit $s = 334\,m$, $g = 10\,m$.

Hiernach erhalten wir

$$0\cdot06809\,Y^6 - Y^3 + 3Y - 2\cdot08853 = o.$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann in der Weise geschehen, dass man zunächst einen muthmasslichen Werth von v_0 und den entsprechenden für Y einführt. Nach bekannten Methoden ergibt sich dann ein genauerer Werth, im vorliegenden Fall

$$Y = 1\cdot1356, \text{ also } Y^3 = \frac{v_0 \cos\alpha}{s} = 1\cdot46445,$$

demnach

$$v_0 = 1\cdot46445 \frac{s}{\cos\alpha} = 501\, m,$$

welcher Werth mit dem beobachteten genau übereinstimmt.

Diese Methode wird in allen den Fällen wenig gekrümmter Flugbahnen anwendbar sein, in welchen die Anfangsgeschwindigkeit grösser, die Endgeschwindigkeit kleiner ist, als die gesetzmässige Schallgeschwindigkeit.