Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes

W. Wirtinger in Innsbruck,
M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1896.)

I.

Während die Theorie des Potentials unter Annahme des Newton'schen Gesetzes seit Langem das Interesse der Physiker und Mathematiker in Anspruch genommen hat, ist dies nicht in gleichem Grade mit demjenigen allgemeineren Gesetz der Fall gewesen, bei welchem die Potentialfunction eines wirksamen Punktes durch $kmr^{-1-\alpha}$ gegeben ist.

Neuerdings hat nun Herr C. Neumann in seinem Buche: »Über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen« (Leipzig 1896) überhaupt die mit der Annahme eines elektrostatischen Gleichgewichtes verträglichen Anziehungsgesetze näher untersucht und dabei die Aufmerksamkeit auf die besondere Stellung, welche das obige Gesetz einnimmt, gelenkt. Da bereits Green dieses Gesetz ausführlicher behandelt hat, so nennt er dasselbe Green'sches Gesetz, und in diesem Sinne soll der Name auch hier gebraucht werden.

Green selbst hat sich mit diesem Gesetz in zwei Arbeiten befasst, von denen die erste aus dem Jahre 1832 den Titel führt: »Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids analogous to the electric fluids, with other similiar researches« (Cambridge Transactions, 1833, wieder abgedruckt in Mathematical Papers of Green, p. 119). Diese Arbeit erwähnt auch Herr Neumann ausführlich.

Die zweite Abhandlung stammt aus dem Jahre 1833 und führt den Titel: »On the Determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities« (Cambridge Transactions, 1835; Mathematical Papers, p. 187). Hier wird nun eine viel allgemeinere Auffassung zu Grunde gelegt und insbesondere gezeigt, wie durch Einführung einer neuen, zunächst überzähligen Variablen für das neue Gesetz eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gewonnen werden kann und daher auch ähnliche Methoden der Integralumformung anwendbar sind wie in der Theorie des Newton'schen Potentials. Diese Abhandlung werde ich im Folgenden noch häufig zu erwähnen haben.

Wenn man nun diese von Green geschaffenen Hilfsmittel verbindet mit dem Weierstrass'schen Begriff der Fortsetzung einer analytischen Function, so gelangt man zum Beweise eines Satzes, welcher die eigenthümliche Sonderstellung des Newton'schen Gesetzes innerhalb des allgemeinen Green'schen kennzeichnet. Dieser Satz lautet:

Ist unter Zugrundelegung des Elementargesetzes $mr^{-1-\alpha}$ für das Potential das Potential einer räumlichen Masse in einem endlichen massenfreien, übrigens beliebig kleinen Raumtheil gegeben, so ist dadurch die Massenvertheilung selbst eindeutig bestimmt in allen Fällen, in welchen α positiv und von Null verschieden ist, dagegen sicher nicht bestimmt für $\alpha = 0$.

Ein ganz analoger Fall gilt auch für den Raum von n Dimensionen und das Potentialgesetz $mr^{2-n-\alpha}$ und der Beweis überträgt sich ohneweiters auf diesen allgemeineren Fall. Dass für $n = 3$, $\alpha = 0$ aber die Massenvertheilung durch das Potential nicht bestimmt ist, ist längst bekannt und erhellt schon daraus, dass eine homogene Kugel in mannigfacher Weise durch concentrische Kugeln oder Kugelschalen ersetzt werden kann, ohne das Potential im Äusseren der ursprünglichen Kugel zu ändern.

Sei nun $k(\xi, \eta, \zeta)$ die räumliche Dichte im Punkte ξ, η, ζ und

$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

so ist das Potential der vorhandenen Massen im Punkte xyz gegeben durch

$$V = \int \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^{1+\alpha}}. \tag{1}$$

Anstatt nun V direct zu betrachten, studiren wir mit Green l. c. zunächst die Eigenschaften einer Function W welche ausser xyz noch die Variable u enthält und für $u = 0$ in V übergeht. Wir definiren diese durch die Gleichung

$$W = \int \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}}. \tag{2}$$

So lange nun der Punkt xyz nicht im Integrationsgebiet liegt und überdies gleichzeitig $u = 0$ ist, kann man W ohneweiters beliebig oft unter dem Integralzeichen differenziren. Eine einfache Rechnung lehrt dann, dass W der Differentialgleichung genügt:

$$\Delta W + \frac{d^2 W}{du^2} + \frac{\alpha - 1}{u} \frac{dW}{du} = 0, \tag{3}$$

welche bereits Green l. c. aufgestellt hat. Dabei bezeichnet ΔW wie üblich, die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten xyz. Ist nun W bekannt, so kann leicht $k(\xi, \eta, \zeta)$ ermittelt werden, wenn k in der Umgebung von $\xi\eta\zeta$ stetig und endlich ist. Im Gegenfalle verliert übrigens der Begriff der räumlichen Dichte seine unmittelbare Bedeutung als Grenzwerth des Quotienten: Masse durch Volumen, und ist nach Umständen erst durch Grenzübergang aus Nachbargebieten, in welchen Stetigkeit und Endlichkeit stattfindet, festzulegen.

Wir betrachten nun, um k aus W zu bestimmen, den Differentialquotienten

$$\frac{dW}{du} = -(1+\alpha)\, u \iiint \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} \tag{4}$$

und grenzen um die Stelle x, y, z eine Kugel K vom Radius ρ ab, innerhalb welcher $k(\xi, \eta, \zeta)$ eine stetige Function des Ortes ist. Ferner spalten wir das Integral in zwei Theile, von denen einer I_1 über die Masse innerhalb K erstreckt ist, der andere I_2 alle übrigen Massen umfasst.

Das Integral I_2 wird nun gewiss vergrössert, wenn wir im Nenner statt r^2+u^2 einsetzen ρ^2 und gleichzeitig im Zähler $k(\xi, \eta, \zeta)$ durch seinen absoluten Werth ersetzen. Wir bekommen so die Gleichung

$$I_2 = \theta\rho^{-3-\alpha}M,$$

wo θ einen echten Bruch und M die gesammte in Betracht kommende Masse ohne Rücksicht auf ihr eventuelles Vorzeichen bedeutet. Diese letztere setzen wir natürlich als endlich voraus.

Um für das erste Integral ebenfalls eine Abschätzung zu bekommen, sei $\varkappa$ der grösste Werth der Differenz zweier in der Kugel K vorkommenden Werthe von $k(\xi, \eta, \zeta)$. Dann sinkt nach der Voraussetzung über die Stetigkeit von k immer $\varkappa$ unter jede Grenze, wenn ρ unter jede Grenze abnimmt. Man kann dann setzen

$$I_1 = (k(x, y, z)+\Theta_1\varkappa)\iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}},$$

wo Θ_1 wieder einen echten Bruch bedeutet. Für das Integral findet man bei Einführung von Polarcoordinaten

$$\iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} = 4\pi\int_0^\rho \frac{r^2\, dr}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} =$$

$$= 4\pi u^{-\alpha}\int_0^{\frac{\rho}{u}} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}}, \qquad 5)$$

wo $r = ut$ gesetzt ist.

Damit folgt nun aus 4) die Gleichung

$$u^{\alpha-1}\frac{dW}{du} = -4\pi(1+\alpha)(k(x, y, z)+\Theta_1\varkappa)\int_0^{\frac{\rho}{u}} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} +$$

$$+\theta u^\alpha\rho^{-3-\alpha}M. \qquad 6)$$

Wird nun zunächst ρ beliebig klein, aber fest gewählt und lässt man hierauf u zu Null abnehmen, so convergirt, da α positiv ist, der zweite Theil der obigen Summe gegen Null, während das Integral des ersten Theiles zur oberen Grenze ∞ erhält und nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Gammafunctionen nach Einführung einer neuen Variablen für t^2 den Werth liefert:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$$

Da ferner die linke Seite der Gleichung 6) von ganz unabhängig ist, so muss es auch die rechte Seite sein und wir erhalten schliesslich, wenn wir mit u zur Grenze Null übergehen

$$\lim_{u=0} u^{\alpha-1}\,\frac{dW}{du} = -4\pi^{3/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\;k(x,y,z). \tag{7}$$

Diese Formel wurde bereits von Green aufgestellt, ist aber hier auf einem anderen, mehr directen Weg bewiesen.

Zufolge der Differentialgleichung 3) kann man die Formel 7) auch schreiben

$$\lim_{u=0} u^{\alpha}\left(\Delta W + \frac{d^2W}{du^2}\right) = 4\pi^{3/2}\,\frac{(\alpha-1)\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\,k(x,y,z),$$

wodurch ihre Analogie mit der Laplace-Poisson'schen Gleichung mehr hervortritt, jedoch der Fall $\alpha = 1$ eine besondere Untersuchung nöthig machen würde.

Können wir also W ermitteln für alle Werthe des u ausser $u = 0$, sobald uns V gegeben ist, so können wir nach Formel 7) durch einen Grenzprocess hieraus auch die Dichte finden, so lange α positiv und von Null verschieden ist. Wir bezeichnen nun der Kürze halber dasjenige Gebiet der Variablen x, y, z, u, für welches $u = 0$ ist und zugleich der Punkt xyz innerhalb der Massen liegt, als Gebiet M. Aus der Integralformel für W ergibt sich dann unmittelbar, dass W in der Umgebung jeder Stelle x_1, y_1, z_1, u_1, welche ausserhalb des Gebietes M liegt, nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, $u - u_1$ entwickelt werden kann. Dabei sind selbstverständlich die Variablen durchaus reell genommen. Daraus folgt aber, dass die Function W ein eindeutiger Zweig einer analytischen Function ist, so lange $xyzu$ reell und ausserhalb des Gebietes M bleiben. Da ferner das dreifach ausgedehnte endliche und begrenzte Gebiet M das vierfach ausgedehnte Gebiet der Variablen $xyzu$ nicht in Theile zerlegt, so ist W ein einziger Zweig einer solchen Function.

Daraus folgt, dass die Function W schon im ganzen Gebiet $xyzu$, ausgenommen das Gebiet M, vollständig bestimmt ist, wenn sie in einen beliebig kleinen, aber endlichen Theil des Gebietes, der mit M nichts gemeinsam hat, gegeben ist. Denn man kann dann von der Potenzreihenentwicklung um eine erste Stelle ausgehend, durch eine endliche Anzahl von Fortsetzungen, d. h. durch eine endliche Anzahl identischer Umformungen der nach $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$, $(u - u_1)$ fortschreitenden Potenzreihe zu der Potenzreihenentwicklung für die Umgebung einer beliebigen Stelle ausserhalb M gelangen.

Aber da W der Differentialgleichung 3) genügt, so ist W bereits vollständig bestimmt, wenn es nur in einem endlichen, massenfreien Raumtheil gegeben ist, für welchen $u = 0$ ist. In der That ist für $u = 0$ und eine Stelle ausserhalb des Gebietes M der Differentialquotient $\frac{dW}{du} = 0$, und da es sich in der Umgebung einer solchen Stelle um Potenzreihen aller Variablen handelt, so kann man dieselben auch nach u ordnen und setzen

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} V_n u^n,$$

wo die V_n Functionen von x, y, z allein sind und V_0 die in einem endlichen Raumtheil als gegeben angenommene Function V ist, während V_1 gleich Null ist.

Unter diesen Umständen kann man die Potenzreihe für W direct in die Differentialgleichung 3) einsetzen und erhält zur Bestimmung der V_n die Gleichung

$$\Delta V_n + (n+2)(n+\alpha) V_{n+2} = 0.$$

Hieraus ergibt sich wegen $V_1 = 0$ allgemein

$$V_{2\varkappa+1} = 0$$

und

$$V_{2\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \cdot \frac{\Delta^{\varkappa} V_0}{2^{\varkappa} . \varkappa! \, \alpha(\alpha+2)(\alpha+4) \ldots (\alpha+2\varkappa-2)}. \qquad 8)$$

Dagegen versagt diese Bestimmung, wenn $\alpha = 0$ ist. Hier bedeutet $\Delta^{\varkappa}$ das Resultat der $\varkappa$maligen Anwendung der Operation Δ.

Kennt man also in einem noch so kleinen, aber endlichen massenfreien Raumtheil die Function V_0, d. i. das Potential der wirkenden Massen, so kennt man in einem endlichen Gebiet der Variablen $xyzu$ die Function W. Da aber diese überallhin ausserhalb des Gebietes M fortsetzbar ist und der Grenzwerth in der Gleichung 5) nicht im Gebiete M, sondern bei Annäherung an dasselbe von aussen zu nehmen ist, so ist dadurch auch $k(x, y, z)$ vollständig bestimmt und unser Satz daher bewiesen.

II.

Es ist im Vorigen ausdrücklich zu beachten, dass die Function V_0 im Ausgangsgebiet nicht etwa willkürlich gegeben sein darf, sondern vielmehr vorausgesetzt ist, sie sei das Potential einer bloss räumlich vertheilten, nicht aber auf Linien oder Flächen concentrirten Masse. Es ist jedoch nicht schwer, ein System von hinreichenden Bedingungen dafür anzugeben, dass eine solche Function Potential einer im Endlichen gelegenen räumlich vertheilten Masse ist.

Wenn nämlich eine Function V

1. überall innerhalb des betrachteten endlichen Gebietes nach ganzen positiven Potenzen entwickelbar ist;

2. die mit Hilfe von 8) hergestellte Reihe

$$W = \sum_{0}^{\infty} V_{2\varkappa} u^{2\varkappa}$$

einen Convergenzbereich hat, wenn sie als Potenzreihe der Variablen $x-x_1, y-y_1, z-z_1, u$ aufgefasst wird;

3. die Function W für alle reellen Werthe von x, y, z, u, für welche u von Null verschieden ist, fortgesetzt werden kann und sich hiebeï als eindeutig erweist;

4. der Grenzwerth

$$\lim_{u=0} u^{\alpha-1}\frac{dW}{du}$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt und nur in einem endlichen Gebiet der x, y, z von Null verschieden und in diesem Gebiet eine Function von x, y, z ist, welche im Allgemeinen stetig ist;

5. wenn schliesslich die Werthe von W auf einem Gebiete, welches durch die Gleichung $x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2$ charakterisirt ist, von einem bestimmten Werth von R an sämmtlich kleiner sind als $AR^{-1-\alpha}$, während die Werthe von $\frac{dW}{dR}$ kleiner werden als $BR^{-2-\alpha}$;

dann ist V in der Form darstellbar

$$V = \int \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^{1+\alpha}},$$

wenn die Function k durch die Gleichung definirt ist.

$$\lim_{u=0} u^{\alpha-1}\frac{dW}{du} = -4\pi^{3/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} k(x, y, z).$$

Dass die Eigenschaften 1, 2, 3, 5 nothwendig sind, folgt ohneweiters aus der Integralform für V, dagegen würde es zu complicirten Untersuchungen führen, auch die Eigenschaft 4) auf das nothwendige Mass zurückzuführen. Zu bemerken ist, dass aus 1, 2, 3 sich bereits ergibt, dass W der Differentialgleichung 3) genügt.

Um nun diese Bedingungen als hinreichende zu erkennen, betrachten wir mit Green das Integral

$$I = \int du\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, u^{\alpha-1} \left(\frac{dW}{dx} \frac{dU}{dx} + \frac{dW}{dy} \frac{dU}{dy} + \right.$$
$$\left. + \frac{dW}{dz} \frac{dU}{dz} + \frac{dW}{du} \frac{dU}{du} \right),$$

wobei die Integration über ein Gebiet erstreckt ist, innerhalb dessen und auf dessen Grenze die Functionen U, W eindeutig endlich stetig sind und ebensolche erste und zweite derivirte haben. Man kann dasselbe durch partielle Integration, wie beim Beweise des gewöhnlichen Green'schen Satzes umformen und erhält:

$$\int u^{\alpha-1} U \frac{dW}{dn} \cdot d\omega - \int u^{\alpha-1} U \left[\Delta W + \frac{d^2 W}{du^2} + \frac{\alpha-1}{u} \frac{dW}{du} \right] d\xi\, d\eta\, d\zeta\, du$$

und hieraus durch Vertauschung von U mit W und Subtraction

$$\int u^{\alpha-1} \left| U \left(\Delta W + \frac{d^2 W}{du^2} + \frac{\alpha-1}{u} \frac{dW}{du} \right) - W \left(\Delta U + \frac{d^2 U}{du^2} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\alpha-1}{u} \frac{dU}{du} \right) \right| du\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int u^{\alpha-1} \left(U \frac{dW}{dn} - W \frac{dU}{dn} \right) d\omega. \qquad 9)$$

Dabei bedeuten $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dW}{dn}$ die Differentialquotienten nach der Normale der Begrenzung des vierdimensionalen Integrationsgebietes und $d\omega$ das Differential der dreifach ausgedehnten Begrenzung. Es ist also, wenn in der Nähe einer Stelle der Begrenzung dieselbe durch die Gleichung $\Phi(x, y, z, u) = 0$ definirt ist:

$$\frac{dU}{dn} = S \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)$$

wenn

$$S = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Dabei ist das Vorzeichen von S so zu bestimmen, dass der Punkt mit den Coordinaten

$$x+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}S,\quad y+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}S,\quad z+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}S,$$

$$u+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial u}S$$

für genügend kleine positive λ im Innern des Integrationsgebietes liegt, wenn x, y, t, u auf der Grenze desselben liegen.

Setzt man in der Gleichung 9) nun

$$U=(r^2+u^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}}$$

wo wieder

$$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2$$

und x, y, z eine Stelle bedeutet, an welcher sich W regulär verhält, und integrirt links in 9) über ein Gebiet, welches durch die Bedingungen $\xi^2+\eta^2+\zeta^2+u^2\leqq R^2$ und $u\geqq h$ definirt ist. wo h eine beliebig kleine, R eine beliebig grosse positive Grösse bedeutet, sind ferner für die Function W die Bedingungen 1. bis 5. erfüllt, so gilt auch die Gleichung 9), und zwar reducirt sich ihre linke Seite auf Null, weil sowohl W, als U der Differentialgleichung 3) Genüge leisten. Das Integral links ist dann gesondert über die Mannigfaltigkeit $x^2+y^2+z^2+u^2=R^2$, $u>h$ und die Mannigfaltigkeit $x^2+y^2+z^2<R^2-h^2$, $u=h$ zu erstrecken. Geometrisch ausgedrückt integriren wir also über eine dreifach ausgedehnte Halbkugel des vierdimensionalen Raumes und über ein Stück eines zum Raume xyz parallelen, im Abstand h gelegenen ebenen Raumes, welches innerhalb der Kugel $x^2+y^2+z^2+u^2=R^2$ liegt. Dabei kommt es jedoch nur auf die Grenzwerthe dieser Integrale für $R=\infty$ und $h=0$ an. Beginnen wir mit der Integration über die Mannigfaltigkeit $u=h$, so erhalten wir, da $\frac{dW}{dn}=-\frac{dW}{du}$, $\frac{dU}{dn}=-\frac{dU}{du}$ wird

$$-\lim_{h=0}h^{\alpha-1}\int\left(U\frac{dW}{du}-W\frac{dU}{du}\right)_{u=h}d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

und da $\lim\limits_{u=0} u^{\alpha-1}\dfrac{dW}{du}$ nur in einem endlichen Gebiet von Null verschieden ist, so erhalten wir in der Grenze vom ersten Glied einfach

$$4\pi^{3/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\int\frac{k(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r^{1+\alpha}}$$

wenn wieder die Function k durch die Formel 7) mit Hilfe von W definirt wird.

Wegen

$$\frac{dU}{du} = \frac{-(1+\alpha)u}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}}$$

liefert das zweite Glied des obigen Integrals in der Grenze überall 0, ausser in der Nähe der Stelle x, y, z.

In der Nähe dieser Stelle aber können wir das nämliche Grenzverfahren, durch welches seinerzeit Formel 7) bewiesen wurde, anwenden. Denn wenn wir hier W nach positiven Potenzen von u entwickeln, so sehen wir sogleich, dass nur das Anfangsglied der Entwicklung einen Beitrag zur Grenze liefern kann. Wenn man dies berücksichtigt, so tritt in der Ableitung von Formel 7) einfach $W(\xi, \eta, \zeta, 0) = V$ an die Stelle von k. Daher liefert das zweite Glied zum Integral den Beitrag

$$-4\pi^{3/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\,W(x, y, z, 0).$$

Von dem Integral über die Halbkugel $x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2$ sieht man sogleich, dass es zufolge der Voraussetzung 5) die Null zur Grenze hat, da es kleiner wird als $G.R^{-\alpha}$, wenn G eine endliche Grösse bedeutet. Wir erhalten also schliesslich die Gleichung

$$\int\frac{k(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r^{1+\alpha}} = W(y, y, z, 0) = V(x, y, z).$$

Unter den angegebenen Bedingungen ist also in der That V das Potential einer räumlichen Masse, deren Vertheilung durch die Formel 7) mit Hilfe der Function W dargestellt ist.

In ähnlicher Weise lassen sich auch andere Probleme der gewöhnlichen Potentialtheorie auf das Green'sche Gesetz übertragen, und es ist mir vielleicht erlaubt, bei anderer Gelegenheit darauf zurückzukommen.