

Über die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung

Emil Waelsch,

Professor an der k. k. technischen Hochschule zu Brünn.

Man kann die Lamé'sche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit fünf singulären Punkten in der Form schreiben:

$$(a\varphi)_2 + c \cdot \varphi = 0,$$

wo a eine binäre Form fünfter Ordnung ist (deren Wurzelpunkte die singulären Punkte sind, die als von einander getrennt vorausgesetzt werden sollen), wo ferner c eine lineare Form und $(a\varphi)_2$ die zweite Überschiebung der Form a und der unbekannten Form φ ist.¹

Man kann² nun sechs lineare Formen $c_x^{(1)}, c_x^{(2)}, \dots, c_x^{(6)}$ so bestimmen, dass die Identität besteht:

$$(a\varphi^{(i)})_2 + c^{(i)} \varphi^{(i)} = 0,$$

wobei $\varphi^{(i)}$ eine der Lamé'schen Formen zweiter Ordnung der Form a ist.

Im Folgenden ergibt sich zunächst, dass allgemein das Product Φ der analog definirten Lamé'schen Formen zweiter Ordnung einer Form n^{ter} Ordnung a identisch ist mit der Hermite'schen Schwesterform u_{n-1} von a , so dass sich für $n = 5$ das Product der $\varphi^{(i)}$ leicht ergibt.

Hierauf wird auf geometrischem Wege die Covariante sechster Ordnung Γ bestimmt, deren Wurzelfactoren die Punkte

¹ Siehe Klein, Autographirte Vorlesungshefte, Sommer 94, S. 40.

Siehe: Zur Geometrie der linearen algebr. Differentialgleichungen. Mittheilungen der deutschen mathem. Gesellsch. zu Prag.

$c^{(i)}$ liefern und der Zusammenhang zwischen den $\varphi^{(i)}$ und den $c^{(i)}$ erörtert. Diese Covariante Γ gibt durch die Realität ihrer Wurzeln Aufschluss über die Realität der Lamé'schen Formen $\varphi^{(i)}$.

Zum Schlusse ergibt sich noch eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche der Diagonalfäche dritter Ordnung.

1. Die Hermite'sche Form u_{n-1} . In der Differentialgleichung

$$(a\varphi)_2 + c\varphi = 0, \quad 1)$$

wo a, c respective Formen n^{ter} und $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung sind, kann die Form c auf $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Arten so bestimmt werden, dass die Integralform φ dieser Gleichung ganz und von zweiter Ordnung wird,¹ wo sie dann ein Lamé'sches Polynom zweiter Ordnung der Form a heisst.

Wird ein solches Polynom φ gleich $\alpha_x \beta_x$ gesetzt, so gilt nach Gleichung 1) die Identität

$$(a\alpha)(a\beta)a_x^{n-2} + c_x^{n-2} \cdot \alpha_x \beta_x \equiv 0.$$

Diese ist erfüllt, wenn $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ und $x_1 = \beta_2$, $x_2 = -\beta_1$ gesetzt wird, d. h. wenn

$$(a\alpha)(a\beta)^{n-1} = 0, \quad (a\beta)(a\alpha)^{n-1} = 0 \quad 2)$$

ist. Daher entsprechen sich die Wurzeln des Lamé'schen Polynoms φ in der ersten Polarbeziehung von a , und zwar in beiden Richtungen.

Sind umgekehrt die Gleichungen 2) erfüllt, so folgt aus ihnen:

$$(a\alpha)(a\beta)(a\alpha)^{n-2} = 0, \quad (a\alpha)(a\beta)(a\beta)^{n-2} = 0,$$

d. h. die Form

$$(a\alpha)(a\beta)a_x^{n-2} = (a_x^n, \alpha\beta)_2 = (a\varphi)_2$$

hat die Factoren α und β oder $(a\varphi)_2$ ist durch φ theilbar. Demnach folgt:

»Die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung der Form n^{ter} Ordnung a sind mit den zweigliedrigen Cyclen der ersten Polare dieser Form identisch.«¹

¹ Siehe meine oben citirte Arbeit.

Sind nun

$$a_x^{n-1}(a\xi) = 0 \text{ und } (a\xi)^{n-1}a_x = 0 \quad 3)$$

die erste und letzte Polarbeziehung von a , so erhält man die Form Φ , welche das Product dieser Polarcyclen darstellt, indem man ξ aus den Gleichungen 3) eliminirt, d. h. indem man in die zweite dieser Gleichungen setzt:

$$\xi_1 = \frac{\partial a}{\partial x_1}, \quad \xi_2 = \frac{\partial a}{\partial x_2}.$$

Durch dieses Verfahren erhält man aber bekanntlich au_{n-1} , wo u_{n-1} die vorletzte Hermite'sche Schwesterform ist;¹ daher:

»Das Product der Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form a n ter Ordnung ist identisch mit deren Hermite'schen Schwesterform u_{n-1} .«

Demnach erhält man (in den Bezeichnungen des Gordan'schen Buches) für

$$\begin{aligned} n = 3: & \quad \Phi = \Delta, \\ n = 4: & \quad \Phi = t, \\ n = 5: & \quad \Phi = \frac{1}{2}ia^2 - \frac{3}{4}\Delta^2 \\ & \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ergibt sich auch:

»Die Form u_{n-1} von der $(n-1)(n-2)$ ten Ordnung zerfällt nach Lösung einer Gleichung von der Ordnung $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ in rational bekannte Formen zweiter Ordnung $\varphi^{(i)}$.«

Für $n = 4$ sind dies die drei quadratischen Factoren der Covariante t , deren Trennung durch die Gleichung

$$4t^3 - g_2t - g_3 = 0$$

geschieht.²

Im Falle einer Form höherer Ordnung kann man die Existenz einer solchen covarianten Gleichung, welche die Factoren $\varphi^{(i)}$ von Φ trennt, in folgender Weise einsehen. Man braucht nur dieselbe simultane lineare Covariante $l^{(i)}$ von $\varphi^{(i)}$ mit einer

Siehe z. B. Gordan's Invarianten, II, S. 357.

Vergl. Hilbert, Lettre adressé à M. Hermite, Liouville Journ., (4) IV, p. 249.

Covariante von f zu bestimmen; das Product der $l^{(i)}$ ist dann eine Covariante, welche gleich Null gesetzt eine solche Gleichung liefert.

Im Folgenden wird für $n = 5$, wo also das Product der $\varphi^{(i)}$ ist:

$$\Phi = \frac{1}{2}(aa)_4 a^2 - \frac{3}{4}(aa)_2,$$

wohl die einfachste dieser Gleichungen bestimmt, indem das Product der Covarianten

$$l^{(i)} = (j, \varphi^{(i)})_2$$

gesucht wird.

2. Die Überschiebungsfläche der Form a_x^3 . Deutet man die binäre Veränderliche x auf einer Raumcurve $\mathfrak{C}_3$ des dreidimensionalen Raumes, so liegen die Wurzelpunkte jeder Form $\varphi^{(i)}$ auf einer Bisecante dieser $\mathfrak{C}_3$. Die sechs sich ergebenden Bisecanten sind gerade Linien einer Fläche dritter Ordnung F_3 , welche $\mathfrak{C}_3$ enthält, und welche ich »Überschiebungsfläche der Form a « genannt habe.¹

Ist nämlich in

$$(a\varphi)_2 = f$$

φ eine quadratische Form, so ist f cubisch. Vermöge dieser Gleichung entspricht der Bisecante der Form φ die Ebene der Form f projectiv; der Schnittpunkt P von φ und f beschreibt die Überschiebungsfläche F_3 , wenn φ variirt. Die Ebenen f bilden ein Bündel, dessen Centrum l. c. als »Hauptpunkt der F_3 « bezeichnet wurde.

Ebenso liefert die Gleichung

$$(a\varphi)_2 + c\varphi = f + c\varphi = f',$$

wo c eine lineare Form ist, eine projective Beziehung des Systems der Bisecanten φ auf die Ebenen f' eines Bündels. Das Erzeugniss dieser Beziehung ist dieselbe Fläche F_3 ; denn die Ebene der Form f' geht durch P , weil diese Form aus f und $c\varphi$ linear abgeleitet ist. Das Centrum des Bündels f' ist daher ein Punkt von F_3 , und demnach sind die Coëfficienten c_1

und c_2 von c_x Parameter dieses Flächenpunktes C . Für $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ergibt sich der Hauptpunkt.

Das Leitglied der Form C' des Punktes C (d. i. derjenigen cubischen Form, deren Wurzelpunkte in der Nullebene von C bezüglich des Nullsystems der $\mathfrak{C}_3$ liegen¹⁾) wird gefunden, indem man die drei ersten Coëfficienten der Form f' annullirt wie folgt:

$$\begin{aligned} a_0\varphi_2 - 2a_1\varphi_1 + a_2\varphi_0 + c_1\varphi_0 &= 0 \\ 3(a_1\varphi_2 - 2a_2\varphi_1 + a_3\varphi_0) + 2c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 &= 0 \\ 3(a_2\varphi_2 - 2a_3\varphi_1 + a_4\varphi_0) + c_1\varphi_2 + 2c_2\varphi_1 &= 0 \end{aligned}$$

und dann die Coëfficienten $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ eliminirt. Man erhält so:

$$C' = 3j - 3ic + 2(ac^2)_9 + 2c^3 \quad (4)$$

(für $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ergibt sich, dass j die Form des Hauptpunktes ist. Siehe l. c. diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 812).

Besteht zwischen c_1 und c_2 eine lineare Beziehung, so beschreibt der Punkt C eine Curve dritter Ordnung, welche zu demselben System von ∞^2 Curven gehört wie $\mathfrak{C}_3$. Ist diese Relation homogen, so kann man setzen $c_1 = \gamma$, $c_2 = \gamma c$, daher

$$c_x = \gamma(x_1 + \mathfrak{c}x_2) = \gamma\mathfrak{c}x.$$

Dann enthält die entsprechende Curve dritter Ordnung den Hauptpunkt und den Punkt c von $\mathfrak{C}_g$, der Wurzelpunkt von $c_x = x_1 + cx_2$ ist. Diese Curve soll mit $\mathfrak{C}_c$ bezeichnet werden.

Die Form eines ihrer Punkte ist nach der letzten Formel:

$$3j - 3ic\gamma + 2(ac^2)\gamma^2 + 2c^3\gamma^3, \quad (5)$$

und diese Form gibt eine Darstellung der Curve $\mathfrak{C}_c$ durch den Parameter γ .

Die Parameterwerthe der Schnittpunkte einer Ebene, deren Form für $\mathfrak{C}_3$ die Form ψ ist, sind Wurzeln der Gleichung

$$(3j - 3ic\gamma + 2(ac^2)_s \gamma^2 + 2c^3 \gamma^3; \psi)_3 = 0. \quad (6)$$

3. Die Covariante Γ . Wir suchen nun den Punkt c auf $\mathfrak{C}_3$ so zu bestimmen, dass die Curve $\mathfrak{C}_c$ zerfällt. Sie besteht

¹ Siehe: Über binäre Formen etc. Wiener Monatshefte für Math. u. Phys. VI. Jahrg., S. 263.

dann aus einem Kegelschnitt, welcher durch den Hauptpunkt geht und dessen Ebene $E^{(i)}$ die Gerade $\varphi^{(i)}$ enthält, und ferner aus einer Geraden der F_3 , welche die übrigen Geraden $\varphi^{(i)}$ schneidet. Es gibt demnach sechs solcher Punkte c ; sie seien mit $c^{(i)}$ bezeichnet. Ihre Formen $c^{(i)}$ sind Factoren der zu bestimmenden Covariante Γ .

Soll nun die Curve $\mathfrak{C}_c$ zerfallen, so müssen die Gleichungen 6) dritten Grades in j für alle Formen ψ eine Wurzel γ_0 gemein haben. Setzt man $\psi = j$ und $\psi = c^3$, so ergeben sich daher für die fraglichen c die Gleichungen [da $(aj)_3 \equiv 0$]:

$$\begin{aligned} -3(ic, j)_3 + 2(c^3, j)_3 \gamma_0^2 &= 0 \\ 3(j, c^3)_3 + 2((ac^2)_2 c^3)_3 \gamma_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminirt man γ_0^2 aus diesen Gleichungen, so folgt [da $(ij)_2 = \alpha$ gesetzt wird], dass die sechs $c_x^{(i)}$ Wurzelfactoren der Covariante

$$\Gamma_x^6 = j^2 - \alpha x$$

sind.

»Diese ist demnach diejenige Covariante, deren Wurzeln die Punkte $c^{(i)}$ der $\mathfrak{C}_3$ liefern.«

In Folge einer Syzygante der Form a^1 gilt auch

$$\Gamma = HA + 2ih + \frac{1}{2}i^3,$$

wo $A = (ii)_2$, $h = (fj)_2 = -(iH)_2 - \frac{3}{10}i^2$ ist.

4. Zusammenhang zwischen $\varphi^{(i)}$ und $c^{(i)}$. a) Nachdem die Wurzeln $c^{(i)}$ der Covariante Γ gefunden sind, soll die Form $\varphi^{(i)}$ bestimmt werden.

Da die Überschiebung $(a\varphi^{(i)})_2$ den Punkt $c^{(i)}$ enthält, so ist $\varphi^{(i)}$ harmonisch zur Form

$$(ac)^3 a_x^2. \quad 7)$$

Da ferner die Ebene, welche $\varphi^{(i)}$ mit $c^{(i)}$ verbindet, durch den Hauptpunkt geht und j die Form dieses Punktes ist, so ist $(j, \varphi^{(i)}c)_3 = 0$ oder $\varphi^{(i)}$ ist zur Form

$$(jc)j_x^2 \quad 8)$$

harmonisch.

¹ Siehe Stroh, Über eine fundam. Eigenschaft etc. Math. Ann., Bd. 33, S. 105.

Daher ist $\varphi^{(i)}$ die Functionaldeterminante der Formen 7) und 8) oder

»es ist $\varphi^{(i)} = (aj)(ac^{(i)})^3(jc^{(i)})a_x j_x$ «.

b) Aus $\varphi^{(i)}$ soll die Form $c_x^{(i)}$ gefunden werden.

Es gilt

$$(a\varphi^{(i)})_2 + c^{(i)}\varphi^{(i)} \equiv 0.$$

Die Bedingung dafür, dass eine quadratische Form φ Factor einer cubischen Form χ sei, ist die, dass die Covariante

$$-2(\varphi\varphi)_2\chi + 3\varphi(\chi\varphi)_2$$

identisch verschwinde.¹

Daher ist

$$c^{(i)} = \frac{3}{2} \frac{((a\varphi^{(i)})_2\varphi^{(i)})_2}{(\varphi^{(i)}\varphi^{(i)})_2}.$$

c) Da $\varphi^{(i)}$ harmonisch ist zur Form 8), so ist $c^{(i)}$ Wurzel der Form

$$(j\varphi^{(i)})^2 j_x \quad (\text{siehe Art. 1}).$$

d) Sind die Coëfficienten von a reell und ist $\varphi^{(i)}$ ein reelles Polynom, so ist auch $c^{(i)}$ reell.

Ist umgekehrt $c^{(i)}$ reell, so sind auch die Formen 7) und 8) reell, daher auch ihre Functionaldeterminante $\varphi^{(i)}$.

»Es entspricht demnach jeder reellen Wurzel der Covariante Γ ein reelles Lamé'sches Polynom $\varphi^{(i)}$ und umgekehrt.«

5. Über die Diagonalfäche dritter Ordnung. Wenn man auf jeder durch fünf Punkte a des Raumes gehenden $\mathfrak{C}_3$ die Wurzelpunkte derselben Covariante construirt, so beschreiben diese Punkte eine Fläche, welche ich² als »Covariantenfläche« dieser Covariante bezeichnet habe. Die Gleichung dieser Fläche in den überzähligen Coordinaten x_i des Gegenflachs des gegebenen Fünfecks a (siehe l. c.) wird gefunden, indem man den Ausdruck annullirt, den man erhält, wenn man im Leitgliede der gewählten Covariante die Coëfficienten der Form der Punkte $a: a_0=1$ und $a_1=0$ setzt, dann die übrigbleibenden

¹ Siehe Clebsch, Binäre Formen, S. 94.

² Siehe: Über eine geom. Darstellung. Diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 574.

Coëfficienten durch die symmetrischen Functionen der Wurzeln α_i ersetzt und schliesslich $\alpha_i = x_i$ schreibt.

Wählt man als Covariante die oben bestimmte Covariante $\Phi = u_4$, so bleibt bei den angeführten Substitutionen vom Leitgliede nur das Glied a_4 (wie überhaupt im Allgemeinen a_{n-1} bei u_{n-1}).

Daher ist $\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ die Gleichung der Covariantenfläche der Covariante Φ . Dies ist aber die Gleichung der Hesse'schen Fläche der Diagonalfäche, deren Gleichung ist $\Sigma x_1^3 = 0$; daher folgt:

»Zu den fünf Punkten a gehört für jede durch sie gehende $\mathfrak{C}_3$ eine Überschiebungsfläche F_3 ; diese F_3 hat sechs Gerade, die Bisecanten der $\mathfrak{C}_3$ sind. Die Schnittpunktpaare dieser Bisecanten mit $\mathfrak{C}_3$ erfüllen die Hesse'sche Fläche der Diagonalfäche, welche zu dem Gegenflach des Fünfecks a gehört. Die Punkte eines dieser Paare entsprechen einander in der Steiner'schen Verwandtschaft conjugirter Punkte dieser Hesse'schen Fläche.« Oder:

»Die Geraden $\varphi^{(i)}$ der Überschiebungsflächen der Punkte a für alle durch diese Punkte gehenden $\mathfrak{C}_3$ erfüllen die Fiedler-Voss'sche Congruenz der Diagonalfäche des Gegenflachs der Punkte a .«

Der letzte Satz ergibt sich, indem man die Parameterdarstellung der $\mathfrak{C}^3$ benützt, wie sie in der zuletzt citirten Arbeit gegeben ist. Denn die Coordinaten der Punkte $\alpha = \infty, 0$ sind respective $x_i = \alpha_i, \alpha_i^{-1}$, wenn $a_4 = 0$ oder $\Sigma \alpha_i^{-1} = 0$ ist. Dann liegen die beiden Punkte auf der Hesse'schen Fläche, genügen aber auch der Polarbeziehung $\Sigma x_i y_i^2 = 0$ der Diagonalfäche, und zwar in beiden Richtungen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: [105_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Waelsch Emil

Artikel/Article: [Über die Lamesehen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung 741-748](#)