

# Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (directe Construction der Isophengen)

**Julius Mandl,**

*k. k. Hauptmann des Geniestabes.*

(Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)

In Burmester's ausführlichem Werke über »Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen« (Wien, 1871) wird die wahre und scheinbare Beleuchtung der Flächen in der Weise behandelt, dass die Entwicklungen mit Hilfe der höheren Analysis und neueren Geometrie durchgeführt sind und aus den erhaltenen Resultaten die constructive Bestimmung der Licht- und Hellevertheilung abgeleitet wird; dagegen hat Tilscher in seinem Werke: »Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructions« (Wien, 1862) gezeigt, wie die Darstellung der wahren oder geometrischen Beleuchtung auf rein constructivem Wege abgeleitet werden kann.

Wenn man sich die Bedürfnisse des Technikers vor Augen hält, so verdient erstens die scheinbare Beleuchtung den Vorzug vor der geometrischen, zweitens muss der constructiven Behandlung der Vorrang vor der analytischen eingeräumt werden, bei welcher letzterer das Endresultat naturgemäss wieder eine Construction bildet. Aus diesen Ursachen haben die Burmester'schen Theorien und die scheinbare Beleuchtung überhaupt in jenen Werken, welche den Bedürfnissen der Praxis angepasst sind, bisher keine Berücksichtigung erfahren.

Der Verfasser hat sich nun die constructive Behandlung der scheinbaren Beleuchtung zur Aufgabe gestellt und wird im vorliegenden Aufsätze die bezüglichlichen Constructionen an einem senkrechten Kreiscylinder, geraden Kreiskegel und der Kugel ableiten, wogegen die Behandlung der übrigen Flächen zweiter Ordnung, der allgemeinen Cylinder- und Kegelflächen, der abwickelbaren und windschiefen Regelflächen, der Rotations- und Umhüllungsflächen den Gegenstand eines oder mehrerer folgender Aufsätze bilden wird.

Bekanntlich ist die wahre Beleuchtungsintensität oder Lichtintensität eines ebenen Flächenelementes proportional dem Cosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen, wenn unter dem Einfallswinkel jener Winkel verstanden wird, den die Richtung der Lichtstrahlen mit der Normalen des Flächenelementes einschliesst.

Die scheinbare Beleuchtungsintensität oder Helleintensität eines ebenen Flächenelementes ist proportional der wahren Beleuchtungsintensität und dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels, wobei wir unter dem Ausstrahlungswinkel jenen Winkel verstehen wollen, welchen die Sehrichtung mit der Normalen des Flächenelementes einschliesst. Nimmt man die scheinbare Beleuchtungsintensität eines Flächenelementes, auf dem sowohl die Lichtrichtung, als auch die Sehrichtung senkrecht stehen, als Einheit an, so ist die Helleintensität eines jeden Flächenelementes gleich dem Producte aus dem Cosinus des Einfallswinkels und dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels.

In nachstehender Fig. 1 bedeute  $LF$  einen auf das Flächenelement auffallenden Lichtstrahl,  $SF$  die Sehrichtung,  $FN$  die Normale des Flächenelementes, ferner  $\lambda$  den Einfalls- und  $\sigma$  den Ausstrahlungswinkel; dann ist die Helleintensität des Flächenelementes

$$H = \cos \lambda \cdot \cos \sigma.$$

Trägt man auf dem Lichtstrahle die Intensität  $\overline{Fa} = 1$  nach einem beliebig angenommenen Maassstabe auf und fällt von  $a$  die Senkrechte  $ab$  auf die Normale  $FN$ , so ist  $\overline{Fb} = \cos \lambda$ .

Zieht man ferner von  $b$  die Gerade  $bc$  senkrecht auf der Sehrichtung, so ist  $\overline{Fc} = \cos \lambda \cdot \cos \sigma$ . Somit gibt die Strecke  $\overline{Fc}$  in dem angenommenen Maassstabe die Helleintensität des Flächenelementes  $F$ .

Daraus ergibt sich sofort das Gesetz vom Parallelogramm der Lichtstrahlen. Ein Lichtbündel  $L$  von der Richtung  $LF$  und der Intensität  $\overline{aF}$  kann in seiner Wirkung durch zwei

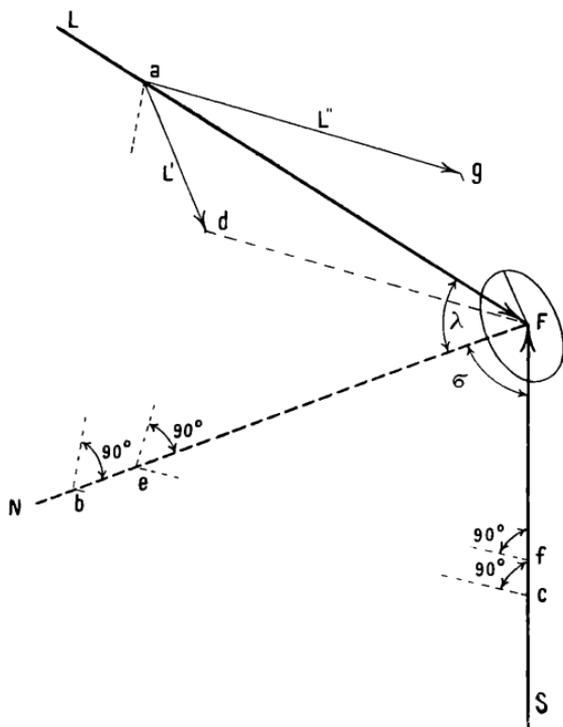


Fig. 1.

andere Lichtbündel  $L'$  und  $L''$  ersetzt werden, deren Richtungen und Intensitäten durch die Strecken  $\overline{ad}$ , beziehungsweise  $\overline{ag}$  bestimmt sind, wenn sich aus  $\overline{ad}$  und  $\overline{ag}$  ein Parallelogramm construiren lässt, dessen Diagonale mit  $\overline{aF}$  der Richtung und Grösse nach übereinstimmt. Fällt man nämlich von  $d$  die Senkrechte  $de$  auf  $FN$  und zieht  $ef$  senkrecht auf  $FS$ , so ist die Strecke  $\overline{be}$  die Projection von  $\overline{ad}$  auf  $NF$  und  $\overline{fc}$  die Projection von  $\overline{de}$  auf  $FS$ ; die Strecke  $\overline{fc}$  bedeutet somit die Helleintensität des Flächenelementes  $F$  für den Fall, als dasselbe von einem

Der Verfasser hat sich nun die constructive Behandlung der scheinbaren Beleuchtung zur Aufgabe gestellt und wird im vorliegenden Aufsätze die bezüglichlichen Constructionen an einem senkrechten Kreiscylinder, geraden Kreiskegel und der Kugel ableiten, wogegen die Behandlung der übrigen Flächen zweiter Ordnung, der allgemeinen Cylinder- und Kegelflächen, der abwickelbaren und windschiefen Regelflächen, der Rotations- und Umhüllungsflächen den Gegenstand eines oder mehrerer folgender Aufsätze bilden wird.

Bekanntlich ist die wahre Beleuchtungsintensität oder Lichtintensität eines ebenen Flächenelementes proportional dem Cosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen, wenn unter dem Einfallswinkel jener Winkel verstanden wird, den die Richtung der Lichtstrahlen mit der Normalen des Flächenelementes einschliesst.

Die scheinbare Beleuchtungsintensität oder Helleintensität eines ebenen Flächenelementes ist proportional der wahren Beleuchtungsintensität und dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels, wobei wir unter dem Ausstrahlungswinkel jenen Winkel verstehen wollen, welchen die Sehrichtung mit der Normalen des Flächenelementes einschliesst. Nimmt man die scheinbare Beleuchtungsintensität eines Flächenelementes, auf dem sowohl die Lichtrichtung, als auch die Sehrichtung senkrecht stehen, als Einheit an, so ist die Helleintensität eines jeden Flächenelementes gleich dem Producte aus dem Cosinus des Einfallswinkels und dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels.

In nachstehender Fig. 1 bedeute  $LF$  einen auf das Flächenelement auffallenden Lichtstrahl,  $SF$  die Sehrichtung,  $FN$  die Normale des Flächenelementes, ferner  $\lambda$  den Einfalls- und  $\sigma$  den Ausstrahlungswinkel; dann ist die Helleintensität des Flächenelementes

$$H = \cos \lambda \cdot \cos \sigma.$$

Trägt man auf dem Lichtstrahle die Intensität  $\overline{Fa} = 1$  nach einem beliebig angenommenen Maassstabe auf und fällt von  $a$  die Senkrechte  $ab$  auf die Normale  $FN$ , so ist  $\overline{Fb} = \cos \lambda$ .

Zieht man ferner von  $b$  die Gerade  $bc$  senkrecht auf der Sehrichtung, so ist  $\overline{Fc} = \cos \lambda \cdot \cos \sigma$ . Somit gibt die Strecke  $\overline{Fc}$  in dem angenommenen Maassstabe die Helleintensität des Flächenelementes  $F$ .

Daraus ergibt sich sofort das Gesetz vom Parallelogramm der Lichtstrahlen. Ein Lichtbündel  $L$  von der Richtung  $LF$  und der Intensität  $\overline{aF}$  kann in seiner Wirkung durch zwei

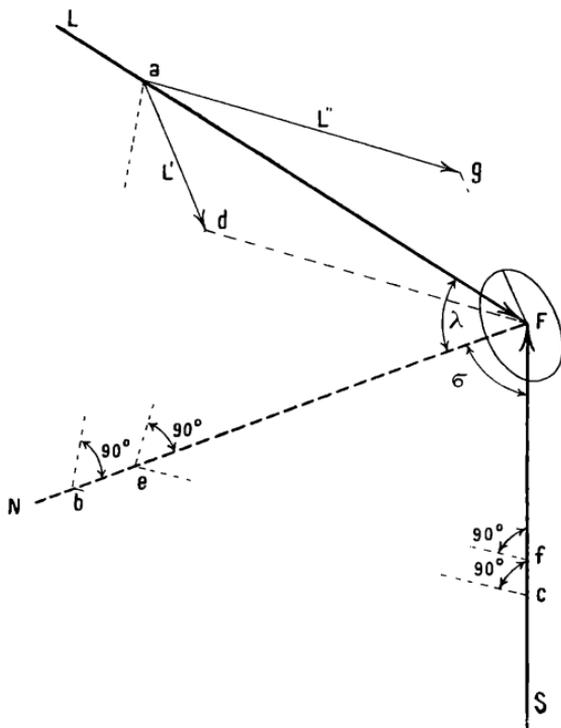


Fig. 1.

andere Lichtbündel  $L'$  und  $L''$  ersetzt werden, deren Richtungen und Intensitäten durch die Strecken  $\overline{ad}$ , beziehungsweise  $\overline{ag}$  bestimmt sind, wenn sich aus  $\overline{ad}$  und  $\overline{ag}$  ein Parallelogramm construiren lässt, dessen Diagonale mit  $\overline{aF}$  der Richtung und Grösse nach übereinstimmt. Fällt man nämlich von  $d$  die Senkrechte  $de$  auf  $FN$  und zieht  $ef$  senkrecht auf  $FS$ , so ist die Strecke  $\overline{be}$  die Projection von  $\overline{ad}$  auf  $NF$  und  $\overline{fc}$  die Projection von  $\overline{be}$  auf  $FS$ ; die Strecke  $\overline{fc}$  bedeutet somit die Helleintensität des Flächenelementes  $F$  für den Fall, als dasselbe von einem

Lichtbündel  $L'$  von der Intensität  $\overline{ad}$  beleuchtet wird. Desgleichen gibt die Strecke  $\overline{Ff}$  die Helleintensität des Flächenelementes  $F$  für den Fall, als dasselbe unter der Einwirkung eines Lichtbündels  $L''$  von der Intensität  $\overline{ag} = \overline{dF}$  steht.

Die Lichtbündel lassen sich demnach nach denselben Gesetzen wie Kräfte zusammensetzen und zerlegen. Die beiden Componenten  $L'$  und  $L''$  heissen die Nebenlichtbündel des Lichtbündels  $L$ .

Wenn die Normale des Flächenelementes mit dem auf dasselbe auffallenden Licht- und dem Sehstrahle in einer Ebene

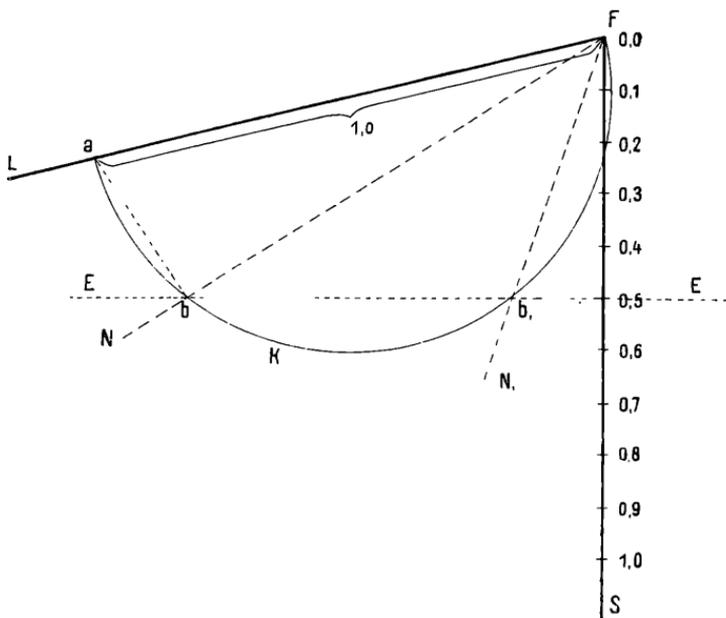


Fig.

liegt, so ist die Ermittlung der Helleintensität nach Fig. 2 vorzunehmen.

Man trägt auf dem Lichtstrahle  $LF$  die Strecke  $\overline{Fa} = 1$  und auf dem Sehstrahle  $SF$  die Intensitätsskala nach demselben Maassstabe auf, dann fällt man von  $a$  die Gerade  $ab$  senkrecht auf die Normale  $FN$  des Flächenelementes und projicirt  $b$  auf die Sehrichtung  $SF$ . In Fig. 2 wird die Intensitätsskala beim Theilstriche 0,5 getroffen, dies ist die Helleintensität des Flächenelementes.

Der Punkt  $b$  muss auf einem Kreise  $K$  liegen, von dem  $\overline{Fa}$  ein Durchmesser ist. Man kann daher umgekehrt diejenigen Flächenelemente finden, welchen eine bestimmte Helleintensität zukommt, indem man in dem betreffenden Theilpunkte der Intensitätsscala (z. B.  $0\cdot5$ ) eine Senkrechte ( $0\cdot5 \perp b$ ) errichtet und diese Senkrechte mit dem Kreise  $K$  zum Schnitte bringt. Die Schnittpunkte  $b$  und  $b_1$  verbindet man mit  $F$  und erhält auf diese Weise die Flächennormalen  $N$  und  $N_1$ . Alle Flächenelemente, welche auf den Richtungen  $NF$  und  $N_1F$  senkrecht stehen, haben die Helleintensität ( $0\cdot5$ ), von der wir bei der Construction ausgegangen sind.

Liegt jedoch die Flächennormale  $FN$  nicht in der Ebene  $LFS$ , welche man durch den auf das Flächenelement auffallenden Licht- und Sehstrahl legen kann, so ist der geometrische Ort für den Fusspunkt  $b$  des durch  $a$  auf  $FN$  gefällten Perpendikels eine Kugelfläche  $K$ , von der  $\overline{Fa}$  ein Durchmesser ist. Um ein Flächenelement von bestimmter Helleintensität (z. B.  $0\cdot5$ ) zu finden, muss jetzt durch den betreffenden Theilstrich ( $0\cdot5$ ) der Intensitätsscala eine Ebene senkrecht zur Sehrichtung gelegt werden; diese Ebene  $EE$  schneidet die Kugelfläche  $K$  nach einem Kreise von der Eigenschaft, dass die Verbindungslinie eines jeden seiner Punkte mit dem Punkte  $F$  eine Flächennormale ergibt, die der Intensität ( $0\cdot5$ ), von welcher wir bei der Construction ausgegangen sind, entspricht. Nachdem parallele Flächenelemente die gleiche Helleintensität haben, so handelt es sich darum, jene Flächenelemente ausfindig zu machen, deren Normalen parallel sind zu den Mantellinien eines schiefen Kreiskegels, dessen Spitze in  $F$  liegt und dessen Basis die Schnittlinie der Kugel  $K$  mit der Ebene  $EE$  ist. Verbindet man alle auf diese Weise erhaltenen Punkte einer gegebenen Fläche, denen die gleiche Helleintensität zukommt, so erhält man die Linien gleicher scheinbarer Beleuchtungsintensität oder Isophengen, zum Unterschiede von den Linien gleicher wahrer Beleuchtungsintensität oder Isophoten.

Alle Flächenelemente, welche zur Lichtrichtung oder zur Sehrichtung parallel sind, haben die Helleintensität Null, demnach gibt es auf jeder krummen Fläche bei bestimmter Licht- und Sehrichtung im Allgemeinen zwei Isophengen mit der Helle-

intensität Null. Die eine dieser Grenzisophengen ist die Selbstschattengrenze, die zweite ist die Contour der Fläche.

Wird eine krumme Fläche in orthogonaler Parallelprojection durch Aufriss und Grundriss dargestellt, so ist die Sehrichtung für den Aufriss normal zur verticalen, für den Grundriss normal zur horizontalen Projectionsebene. Wir müssen daher Aufriss-Isophengen von den Grundriss-Isophengen unterscheiden.

Innerhalb des Selbstschattens gibt es, wie die Erfahrung lehrt, gleichfalls verschiedene Grade der Lichtintensität. Für die Construction der Isophoten und Isophengen im Selbstschatten einer beleuchteten Fläche wird die Annahme gemacht, dass dieser Theil der Fläche von einem dem directen Lichte gerade entgegengesetzt wirkenden Lichtbündel von bedeutend geringerer Intensität getroffen wird. In den beiliegenden Figuren sind diese Isophengen als negative Isophengen bezeichnet.

### Construction der Isophengen eines verticalen Kreiscylinders.

In Fig. 3 ist ein verticaler Kreiscylinder in orthogonaler Projection dargestellt. Die Lichtstrahlenrichtung ist durch die beiden Projectionen  $l'$  und  $l''$  gegeben.

Für die Construction der Aufriss-Isophengen, um welche es sich hier nur handeln kann, ist  $SO$  die Sehrichtung (deren Projectionen sind  $S'O'$  und  $S''O''$ ).

Nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Lichtstrahlen kann das Lichtbündel  $l$  in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine vertical, die andere horizontal und parallel zum Grundriss  $l'$  der Lichtrichtung verläuft. Die Intensitäten dieser beiden Nebenlichtbündel findet man, wenn man den Lichtstrahl  $l$  um seine horizontale Projection nach  $l_0$  umlegt, sodann auf dem umgelegten Lichtstrahle die Strecke  $\overline{O'a_0} = 1$  aufträgt und  $a_0a' \perp l'$  zieht. Dann ist  $\overline{O'a'}$  die Intensität des horizontalen und  $\overline{a'a_0}$  jene des verticalen Nebenlichtbündels. Letzteres ist parallel zu allen Flächenelementen des Cylinders, daher ohne Wirkung. Demnach gibt das horizontale Nebenlichtbündel  $l'$  dieselbe Wirkung wie das Hauptlichtbündel  $l$  selbst und die Construction reducirt sich auf die dem Lichtbündel  $l'$  entsprechenden Isophengen.

Die Isophengen der Cylinderfläche sind offenbar Mantellinien, da die Normalenrichtung für alle Punkte einer Erzeugenden die gleiche ist. Im vorliegenden Falle sind die Lichtrichtung  $l'$  und die Sehrichtung  $S'O'$ , sowie alle Flächennormalen horizontal, demnach kann die ganze Construction nach dem früher an der Hand der Fig. 2 beschriebenen Vorgange in der horizontalen Projectionsebene durchgeführt werden.

Über dem Durchmesser  $\overline{O'a'}$ , dessen Grösse gleich ist der Intensität des horizontalen Lichtbündels  $l'$ , ist ein Kreis  $K$  gezogen. Auf der Sehrichtung  $S'O'$  ist die Intensitätsscala aufgetragen.

Die Isophenge mit der Helleintensität 0·4 ergibt sich nun, indem man durch den Theilstrich 0·4 der Intensitätsscala eine Parallele zu  $AX$  zieht und diese mit dem Kreise  $K$  zum Schnitte bringt. Die Schnittpunkte  $b$  und  $b_1$  verbindet man mit  $O'$ , so stellen  $O'b$  und  $O'b_1$  die Flächennormalen, daher  $F$  und  $F_1$  (deren horizontale Projectionen  $F'$  und  $F'_1$  sind) die gesuchten Isophengen vor.

Die an den Kreis  $K$  parallel zu  $AX$  geführten Tangenten  $t$  und  $t_1$  treffen die Intensitätsscala bei den Theilstrichen 0·69, beziehungsweise —0·12; diese entsprechen den hellsten Isophengen des direct beleuchteten, beziehungsweise des im Selbstschatten liegenden Theiles der Cylinderfläche, dem sogenannten positiven, beziehungsweise negativen Hellepole. Die Construction dieser Hellepole  $P$  und  $P_1$  ist aus der Figur zu ersehen. Die Richtungen  $O'P'$  und  $O'P'_1$  stehen aufeinander senkrecht, weil  $\sphericalangle BO'B_1$  ein Winkel im Halbkreise ist.

Zieht man durch  $a'$  die Gerade  $a'c$  senkrecht auf  $S'O'$ , so muss  $c$  in der Peripherie des Kreises  $K$  liegen. Ferner ist

$$\text{arc } a'B = \text{arc } Bc,$$

somit

$$\sphericalangle a'O'B = BO'c.$$

Die Grundrisse der beiden Hellepole  $P$  und  $P_1$  liegen daher auf den Halbirungslinien des Winkels  $a'O'S'$  und seines Nebenwinkels.

Die Intensität der verticalen Projectionsebene ist in der Strecke  $\overline{O'c} = 0\cdot58$ , jene der horizontalen Projectionsebene  $\overline{a'a_0} = 0\cdot58$  gegeben.

### Construction der Isophengen eines geraden Kreiskegels.

In Fig. 4 ist ein abgestumpfter gerader Kreiskegel durch seine beiden Projectionen dargestellt.

Führt man durch einen in der Kegelage liegenden Punkt  $O$  lauter Normale zu den Mantellinien des Kegels, so bilden diese Normalen ebenfalls einen geraden Kreiskegel  $CC$ , dessen Axe mit der Kegelage  $OS$  zusammenfällt. Nun legt man durch  $O$  einen Lichtstrahl, dessen Projectionen  $l'$  und  $l''$  sind und trägt auf demselben die Strecke  $\overline{Oa} = 1$  auf; über  $\overline{Oa}$  als Durchmesser wird ferner eine Kugel  $K$  gezeichnet. Fällt man nun von  $a$  eine Senkrechte auf irgend eine Erzeugende des Kegels  $C$ , so muss der Fusspunkt auf der Oberfläche der Kugel  $K$  liegen. Die Verbindungslinie aller dieser Fusspunkte fällt mit der Durchdringungslinie der Kugel  $K$  mit dem Kegel  $C$  zusammen. Der Grundriss  $D'$  dieser Durchdringungslinie bildet eine Art verlängerter Cardioide. Die Construction derselben ist sehr einfach, weil sowohl die Kugel  $K$ , als auch der Kegel  $C$  durch horizontale Ebenen nach Kreisen geschnitten werden; wir werden jedoch später noch eine einfachere Construction von  $D'$  kennen lernen.

Projicirt man nun eine Mantellinie  $\overline{Ob}$  des Kegels  $C$ , deren Länge wir von der Kegelspitze  $O$  bis zur Durchdringungscurve  $D$  messen wollen, auf die Sehrichtung, so gibt die Länge dieser Projection — in dem angenommenen Maassstabe — die Intensität jener Flächenelemente, welche zur Richtung von  $Ob$  senkrecht stehen, also die Intensität einer Mantellinie des in Fig. 4 dargestellten abgestumpften Kegels, deren Grundriss mit  $O'b'$  zusammenfällt.

Für die Aufriss-Isophengen ist der Intensitätsmaassstab auf der Sehrichtung  $m'O'$  aufgetragen. Um daher die Aufriss-Isophenge von der Intensität  $0.4$  zu finden, zieht man durch den Theilstrich  $0.4$  der Intensitätsscala eine Parallele zu  $AX$  und sucht deren Schnittpunkte  $b'$  und  $b'_1$  mit  $D'$ . Die Verbindungsgeraden  $O'b'$  und  $O'b'_1$  sind die Grundrisse der gesuchten Aufriss-Isophengen.

Man erkennt leicht, dass jener Theil von  $D'$ , welcher von  $O'$  über  $b'_1B'$  und  $b'$  bis  $n'$  reicht, zu dem im Aufrisse sichtbaren

und direct beleuchteten Theile der Mantelfläche des gegebenen Kegelstumpfes gehört, dagegen der Curvenast von  $O'$  über  $B'_1$  bis  $q'$  zu dem im Aufrisse sichtbaren und im Selbstschatten befindlichen Theile der erwähnten Fläche. Der Rest der Curve ist für die Aufriss-Isophengen belanglos.

Die Hellepole des Aufrisses ergeben sich, indem man parallel zu  $AX$  die Tangenten an  $D'$  zieht, die Berührungspunkte  $B'$  und  $B'_1$  mit  $O'$  verbindet und die Aufrisse jener Mantellinien des Kegelstumpfes ermittelt, deren Grundrisse mit  $O'B'$ , beziehungsweise  $O'B'_1$  zusammenfallen. Die Selbstschattengrenze wird im Grundrisse durch die im Punkte  $O'$  an die Curve  $D'$  gezogenen Tangenten  $O' \quad 0 \cdot 0$  erhalten.

Die verticalen Projectionen jener Mantellinien, deren Grundrisse die Geraden  $O' \quad 0 \cdot 0$  sind, stellen auch die verticalen Projectionen der Selbstschattengrenze vor; von diesen hat jedoch nur eine die Bedeutung als Aufriss-Grenzisophenge.

Für die Grundriss-Isophengen ist der Intensitätsmaassstab auf  $O''S''$  aufgetragen. Um die Grundriss-Isophenge der Intensität  $0 \cdot 2$  zu erhalten, legt man durch den Theilpunkt  $0 \cdot 2$  der Intensitätsscala eine horizontale Ebene und ermittelt den Schnitt dieser Ebene mit dem Kegel  $C$ . Der Schnitt ist ein Kreis (dessen Grundriss ist mit  $k'$  bezeichnet) und trifft die Durchdringungcurve in zwei Punkten, deren Grundrisse mit  $f'$  und  $g'$  bezeichnet sind. Demnach sind  $O'f'$  und  $O'g'$  die Grundriss-Isophengen der Intensität  $0 \cdot 2$ .

Jene horizontale Ebene, welche durch den Theilstrich  $0 \cdot 2$  der Intensitätsscala  $O''S''$  geht, schneidet den Kegel  $C$  nach einem Kreise, dessen Grundriss mit  $k'$  zusammenfällt. Die Schnittpunkte mit der Durchdringungcurve projiciren sich in  $h'$  und  $i'$ , somit geben  $h'O'$  und  $i'O'$  — beziehungsweise deren Verlängerungen — die Grundriss-Isophengen der Intensität  $0 \cdot 2$ . Überhaupt stellt die grössere Schleife von  $D'$  den Grundriss jenes Theiles der Durchdringungcurve  $D$  vor, welcher oberhalb der horizontalen Projectionsebene liegt, während die kleinere Schleife von  $D'$  den Grundriss von dem unter der horizontalen Projectionsebene liegenden Theile der Durchdringungcurve  $D$  vorstellt. Die beiden Hellepole des Grundrisses fallen mit  $l'$  zusammen.

Aus dem Gesagten ersieht man, dass der Aufriss der Durchdringungscurve  $D$  für die Isophengen-Construction nicht benötigt wird. Für den Grundriss  $D'$  soll nun eine einfache Construction abgeleitet werden.

Zerlegt man das Lichtbündel  $l$  in ein verticales und ein horizontales Nebenlichtbündel, so erhält man die Intensitäten der beiden letzteren, indem man auf dem Lichtstrahle  $l$  die Strecke  $\overline{Oa}$  gleich der Einheit aufträgt und von  $a$  die Senkrechte  $\overline{ap}$  auf den Grundriss  $l'$  des Lichtstrahles fällt. Es ist dann  $\overline{ap}$  die Richtung und Intensität des verticalen,  $\overline{pO}$  die Richtung und Intensität des horizontalen Nebenlichtbündels; die Intensität des ersteren erscheint in der verticalen Projection  $\overline{a''p''}$ , die Intensität des letzteren in der horizontalen Projection  $\overline{p'O'}$  in wahrer Grösse.

Um nun die vom horizontalen Nebenlichtbündel herührenden Helleintensitäten zu ermitteln, ist über dem Durchmesser  $\overline{Op}$  eine Kugel  $K_1$  zu zeichnen und die Durchdringungscurve  $D_1$  dieser Kugel mit dem Kegel  $C$  zu bestimmen. Die horizontale Projection dieser Durchdringungscurve ist der Kreis  $D'_1$ , wie sich aus dem Folgenden ergibt.

Durch eine verticale Ebene  $PQR$  wird die Kugel  $K_1$  nach einem Kreise und der Kegel  $C$  nach zwei Mantellinien geschnitten. Dreht man die Ebene  $PQR$  um die Kegelaxe  $OS$  in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage, so ergeben sich in  $e''_1$  und  $e''_2$  die verticalen Projectionen von zwei Punkten der Durchdringungscurve  $D_1$ , jedoch in der gedrehten Lage. Die horizontalen Projectionen dieser beiden Punkte fallen in  $e'_1$  zusammen und müssen nach  $e'$  zurückgedreht werden, um einen Punkt (oder eigentlich zwei sich deckende Punkte) von  $D'_1$  zu erhalten.

Bezeichnet man nun den Winkel, den die Ebene  $PQR$  mit  $l'$  einschliesst, mit  $\alpha$ , so ist  $\overline{O'c'} = \overline{O'a'} \cdot \cos \alpha$ ; ferner  $\overline{O'c'} = \overline{O''c''}$  und  $\overline{O''e''} = \overline{O''c''} \cdot \cos \beta$ , wenn  $\beta$  jener Winkel ist, den die Mantellinien des Kegelstumpfes mit der Kegelaxe einschliessen. Es ist also  $\overline{O''e''} = \overline{O'a'} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$ ; weiters ist  $\overline{O'e'_1} = \overline{O''e''} \cdot \cos \beta = \overline{O'a'} \cdot \cos \alpha \cdot \cos^2 \beta$  und  $\overline{O'e'} = \overline{O'e'_1}$ , somit  $\overline{O'e'} = \overline{O'a'} \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \alpha$ .

Der Ausdruck  $\overline{O'a'} \cdot \cos^2 \beta$  ist von der Lage der Ebene  $PQR$  unabhängig, unter gegebenen Verhältnissen constant. Macht man daher  $\overline{O'g'} = \overline{O'a'} \cdot \cos^2 \beta$ , so ist  $\overline{O'e'} = \overline{O'g'} \cdot \cos \alpha$ ; der Punkt  $e'$  muss daher auf einem Kreise liegen, von welchem  $\overline{O'g'}$  ein Durchmesser ist. Der Punkt  $g'$  ergibt sich direct, indem man von  $a'$  eine Senkrechte auf jene Mantellinie des Kegels  $C$  fällt, deren Grundriss mit  $l'$  zusammenfällt und die horizontale Projection vom Fusspunkte dieser Senkrechten ermittelt. Dies ist in der Fig. 4 nach erfolgter Drehung der Ebene  $P_1Q_1R_1$  in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage durchgeführt.

Es bedarf also bloss der Bestimmung von  $g'$ , um sofort die horizontale Projection der Durchdringungcurve  $D_1$ , als den über dem Durchmesser  $\overline{O'g'}$  gezeichneten Kreis  $D'_1$  zu erhalten.

Fällt man nun von einem Punkte  $e'$  dieses Kreises eine Senkrechte auf  $O'm'$ , so gibt der betreffende Theilstrich der Intensitätsscala, die dem horizontalen Nebenlichtbündel entsprechende Helleintensität jener Kegelerzeugenden, deren horizontale Projection mit  $O'e'$  zusammenfällt.

Was die vom verticalen Nebenlichtbündel herrührenden Intensitäten anbelangt, so ist die wahre Beleuchtungsintensität aller Mantellinien des Kegelstumpfes gleich gross, und zwar gleich der Projection von  $\overline{ap}$  auf die in die Ebene  $P_1Q_1R_1$  fallende Mantellinie des Kegels  $C$ . In der Figur ist diese Projection nach erfolgter Drehung der Ebene  $P_1Q_1R_1$  in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage ermittelt. Sonach ist  $z = \overline{s''_1u''_1}$  die vom verticalen Nebenlichtbündel erzeugte wahre Beleuchtungsintensität des Kegelstumpfes. Trägt man nun die Strecke  $z$  auf der Mantellinie  $Oe$  des Kegels  $C$ , von  $e$  bis  $b$ , auf, oder was dasselbe ist, wenn man die horizontale Projection von  $z$ , nämlich die Strecke  $\overline{a'e'}$  auf dem Grundrisse  $O'e'$  der betreffenden Mantellinie des Kegels  $C$  von  $e'$  bis  $b'$  aufträgt, und projicirt man  $\overline{b'e'}$  senkrecht auf  $O'm'$ , so wird auf der Intensitätsscala eine Strecke abgeschnitten, deren Grösse die scheinbare Beleuchtungsintensität jener Mantellinie vorstellt, deren Grundriss mit  $O'e'$  zusammenfällt. Daraus folgt, dass der Fusspunkt von  $b'$  auf  $O'm'$  mit jenem Theilstriche der Intensitätsscala übereinstimmt, der die totale Helleintensität der betreffenden Mantellinie des Kegelstumpfes angibt, nämlich jene Helle-

intensität, welche aus der vereinten Wirkung beider Nebenlichtbündel resultirt.

Die Verbindungslinie aller Punkte  $b'$  gibt die gezeichnete Curve  $D'$ , deren Bildungsgesetz nach dem Vorhergehenden jenem der Cardioïde ganz ähnlich ist und daher als verlängerte Cardioïde bezeichnet wurde. In dem speciellen Falle, wenn die Lichtstrahlenrichtung zu einer Mantellinie des Kegelstumpfes parallel ist, übergeht die Curve  $D'$  in die gemeine Cardioïde; ist dagegen die Lichtstrahlenrichtung senkrecht auf der Kegelaxe, so übergeht  $D'$  in den Kreis  $D'_1$ .

Sucht man auf der Oberfläche des Kegels  $C$  jene Linie, deren Grundriss die Curve  $D'_1$  ist, so ist leicht einzusehen, dass dies die Durchdringungscurve des Kegels  $C$  mit der Kugel  $K$  sein muss.

Die Construction der Isophengen eines gerades Kreiskegels reducirt sich somit auf verhältnissmässig wenige Linien und kann daher sehr gut für die Constructionen der scheinbaren Beleuchtung anderer Flächen in ähnlicher Weise verwerthet werden, wie es Tilscher für die Construction der wahren Beleuchtung gethan hat.

### Construction der Isophengen einer Kugel.

Mit Hilfe der Isophengenconstruction eines geraden Kreiskegels lassen sich die Isophengen einer Kugel in der Weise ermitteln, dass man für einen, die Kugel nach einem Horizontalkreise berührenden Kegel die Isophengen construirt und deren Schnittpunkte mit dem Berührungskreise bestimmt. Diese Schnittpunkte sind schon Punkte der Kugelisophengen.

Die Durchführung dieser Construction bietet nach dem Vorhergehenden nichts Neues.

Auf eine zweite Art ist die Isophengenconstruction einer Kugel in Fig. 5 durchgeführt. Nach dieser Construction erscheint jede Isophenge als die Durchdringungscurve eines schiefen Kreiskegels mit der Kugeloberfläche.

Durch den Mittelpunkt  $O$  der gegebenen Kugel  $K$  ist der Lichtstrahl  $l$  gelegt und auf demselben die Strecke  $\overline{Oa}$  gleich der Einheit des Intensitätsmaassstabes aufgetragen. Um  $\overline{Oa}$  als

Durchmesser ist eine Kugel  $K_1$  gezeichnet, welche den geometrischen Ort der Fusspunkte aller Senkrechten vorstellt, die man von  $a$  auf alle Radien der Kugel  $K$  fällt. Um die Intensität eines Punktes auf der Oberfläche der Kugel  $K$  zu finden, ist der zugehörige Kugelradius bis zum Schnitte mit der Kugel  $K_1$  zu verlängern und von diesem Schnittpunkte eine Senkrechte gegen die Sehrichtung zu ziehen. Diese Senkrechte schneidet auf dem Sehstrahle die gesuchte Helleintensität ab.

Punkte gleicher Helleintensität können daher gefunden werden, wenn man durch einen bestimmten Punkt des Intensitätsmaassstabes eine Ebene senkrecht auf die Sehrichtung legt und mit der Kugel  $K_1$  zum Schnitte bringt. Betrachtet man diesen Schnittkreis als Basis eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkte  $O$  der Kugel  $K$  liegt und bringt diesen Kegel mit der Kugel  $K$  zum Schnitte, so stellt die Durchdringungscurve die Kugelisophengen von der verlangten Intensität vor.

Die Isophengen der Kugel ergeben sich somit, wie erwähnt, als die Durchdringungslinien von schiefen Kreis Kegeln mit der gegebenen Kugel. Die Grundflächen dieser Kegel stehen senkrecht auf der Sehrichtung, daher parallel zu jener Projectionsebene, welche auf der Sehrichtung senkrecht steht. Ein System von Kreisschnitten eines jeden dieser Kegel ist daher parallel zu einer Projectionsebene, was die Ermittlung der Durchdringung wesentlich vereinfacht.

Soll beispielsweise in Fig. 5 die Aufrissisophenge mit der Intensität  $0.5$  ermittelt werden, so wird die Intensitätsscala auf der Sehrichtung  $m'O'$  aufgetragen und durch den Theilstrich  $0.5$  die Ebene  $E_1E_1$  parallel zur verticalen Projectionsebene gelegt und mit der Kugel  $K_1$  zum Schnitte gebracht. Der Schnittkreis  $k_1$  projicirt sich im Grundrisse in der Geraden  $k'_1$ , der Mittelpunkt desselben liegt in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte der Kugel  $K_1$ , seine Projectionen sind  $o'_1$ ,  $o''_1$ . Der Kegel  $C$  mit der Basis  $k_1$  und der Spitze  $O$  schneidet die gegebene Kugel  $K$  nach der Aufrissisophenge von der Helleintensität  $0.5$ . Schneidet man demnach die Kugel  $K$  und den Kegel  $C$  durch eine zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene  $E_2E_2$ , so erhält man im Aufrisse zwei Kreise  $k''_2$  und  $k''_3$  die sich in den Isophengenpunkten  $b''$  und  $d''$  schneiden. Die

Tangenten  $t_1''$  und  $t_2''$  an die Punkte  $b''$  und  $d''$  der Isophenge sind leicht zu ermitteln als die Schnittlinien von Tangirungsebenen, welche man in den Punkten  $b$  und  $d$  an die Kugel  $K$  und an den Kegel  $C$  legt.

Betrachten wir beispielsweise den Punkt  $b$ . Die in diesem Punkte parallel zur horizontalen Projectionsebene an die Kugel gelegte Tangente ist  $\tau_1$ ; die durch  $b$  parallel zur verticalen Projectionsebene gelegte Kugeltangente ist  $\tau_2$ ; die durch  $\tau_1$  und  $\tau_2$  bestimmte Berührungsebene der Kugel wird von einer zur verticalen Projectionsebene senkrecht stehenden Ebene  $PQR$  nach der Geraden  $ef$  geschnitten.

Die durch den Punkt  $b$  hindurchgehende Berührungsebene des Kegels  $C$  ist bestimmt durch die Mantellinie  $bO$  und durch die Tangente  $\tau_3$  an den Kreis  $k_3$ . (Die verticalen Projectionen von  $\tau_3$  und  $\tau_1$  fallen zufällig zusammen.) Bringt man die Geraden  $Ob$  und  $\tau_3$  mit  $PQR$  zum Schnitte, so erhält man in  $Og$  den Schnitt der Ebene  $PQR$  mit der Berührungsebene des Kegels. Die Geraden  $Og$  und  $ef$  schneiden sich in einem Punkte  $h$ , dessen verticale Projection  $h''$  ein Punkt der Isophengentangente  $t_1''$  ist. Offenbar muss aus Gründen der Symmetrie die Tangente  $t_2''$  ebenfalls durch  $h''$  hindurchgehen.

Abgesehen von den auf diese Weise construirten Isophengenpunkten und Isophengentangenten ist es zweckmässig, die Isophengenpunkte des grössten Horizontalkreises der Kugel zu ermitteln. Dieselben liegen in den Isophengen eines verticalen, die Kugel  $K$  umhüllenden Kreiscylinders und können nach Fig. 3 bestimmt werden.

Ferner können charakteristische Punkte der Aufrissisophengen in der verticalen Projection  $l''$  des Lichtstrahles erhalten werden, indem man die Beleuchtungsconstruction auf einen senkrechten Kreiscylinder anwendet, dessen Basis der in der Ebene  $PQR$  liegende grösste Kreis der Kugel  $K$  ist. Die Construction ist ebenfalls nach Fig. 3 durchzuführen, nachdem man die Basisebene  $PQR$  des Cylinders um ihre horizontale Spur  $PQ$  in die horizontale Projectionsebene gedreht hat. Nachdem die durch den Lichtstrahl  $l$  und die Sehrichtung  $mO$  gelegte Ebene  $PQR$  eine Symmetrieebene der Kugel ist, so müssen die Aufrissisophengen beiderseits der Spur  $QR$  symmetrisch

verlaufen. Die Punkte grösster Helleintensität werden daher auch in der Symmetrielinie  $QR$  zu suchen sein. Die Hellepole des erwähnten, auf  $PQR$  senkrecht stehenden Cylinders treffen somit den in der Ebene  $PQR$  liegenden grössten Kugelkreis in den absoluten Hellepolen  $P_1$  und  $P_2$  des Aufrisses der Kugel. Nach dem bei Besprechung des Cylinders Gesagten müssen demnach die absoluten Hellepole der Kugel allgemein in der durch die Lichtstrahlenrichtung und die Sehrichtung gelegten Ebene liegen und die zu den Hellepolen gehörigen Kugelradien den Winkel zwischen Licht- und Sehstrahl, beziehungsweise dessen Nebenwinkel halbiren. Auf Grund dieser Regel sind in Fig. 3 die absoluten Hellepole ermittelt worden.

Eine dritte Art zur Ermittlung der Isophengen einer Kugel zeigt Fig. 6. Jede Isophenge ist hier als Schnitt einer hyperbolischen Cylinderfläche mit der Kugel zur Darstellung gebracht. Diese Methode ist am besten geeignet, über den charakteristischen Verlauf der Helleintensitätslinien Aufschluss zu geben.

$K'$  und  $K''$  sind Grund- und Aufriss der gegebenen Kugel,  $l'$  und  $l''$  die bezüglichlichen Projectionen eines durch deren Mittelpunkt  $O$  hindurchgehenden Lichtstrahles. Durch Transformation der Coordinaten, wobei die durch die Sehrichtung  $mO$  und den Lichtstrahl  $l$  hindurchgehende Ebene  $PQR$  als neue Projectionsebene angenommen wurde, erhält man die neuen Projectionen  $K'''$  und  $l'''$  von Kugel beziehungsweise Lichtstrahl.

In dieser Projection zeigen sich nun die Linien gleicher wahrer Beleuchtungsintensität als die auf  $l'''$  senkrecht stehenden Sehnen  $(0 \cdot 0)$ ,  $(0 \cdot 1)$ ,  $(0 \cdot 2)$ . u. s. w.

Verbindet man ferner alle Punkte der Kugel, deren zugehörige Kugelradien mit der Sehrichtung  $m'''O'''$  den gleichen Winkel einschliessen, so erhält man Kreise, die sich in der dritten Projection als die auf  $m'''O'''$  senkrecht stehenden Sehnen  $[0 \cdot 0]$ ,  $[0 \cdot 1]$ ,  $[0 \cdot 2]$ . u. s. w. projiciren. Beispielsweise verbindet jener Kreis, der sich in der mit  $[0 \cdot 5]$  bezeichneten Sehne projicirt, alle Punkte der Kugel, für welche der Cosinus des besagten Winkels gleich ist  $0 \cdot 5$ . Die Schnittpunkte des Kreises  $(0 \cdot 6)$  mit dem Kreise  $[0 \cdot 5]$  haben sonach die wahre Beleuchtungsintensität  $0 \cdot 6$  und die scheinbare Beleuchtungsintensität  $0 \cdot 6 \cdot 0 \cdot 5 = 0 \cdot 3$ . Die Punkte gleicher Helleintensität

sind daher in der dritten Projection leicht gefunden. Wie leicht zu ersehen, projiciren sich die Aufrissisophengen in der dritten Projection als Hyperbeln, deren Asymptoten auf den Richtungen  $l'''O'''$ , beziehungsweise  $m'''O'''$  senkrecht stehen. Die Axen dieser Hyperbeln halbiren demnach den Winkel zwischen Licht- und Sehrichtung, respective dessen Nebenwinkel. Daraus erkennt man auch sofort die Richtigkeit des bei der früheren Construction über die Lage der Hellepole Gesagten.

Die Ermittlung der verticalen Projection der Isophengen ist in Fig. 6 für die Helleintensitäten  $0\cdot3$  und  $--0\cdot1$  durch Bestimmung der charakteristischen Punkte und Tangenten, sowie einiger Zwischenpunkte mit ihren Tangenten ausgeführt.

Beispielsweise erhält man die verticale Projection jenes Punktes der Isophenge  $0\cdot3$ , dessen dritte Projection  $a'''$  ist, indem man den durch  $a'''O'''$  hindurchgehenden grössten Kugelkreis in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage dreht. Die verticale Projection des gedrehten Punktes  $a$  ergibt sich in  $(a_1)''$ , beziehungsweise  $(a_2)''$ . Durch Zurückdrehen erhält man  $a_1''$ , beziehungsweise  $a_2''$ . Die Tangenten  $\tau_1''$  und  $\tau_2''$  in den Isophengenpunkten  $a_1''$  und  $a_2''$  erhält man, indem man im Punkte  $a$  die Berührungsebenen an die Kugel  $K$  und an jene hyperbolische Cylinderfläche legt, deren dritte Projection mit der dritten Projection der Isophenge  $0\cdot3$  zusammenfällt. Die Schnittlinie dieser beiden Berührungsebenen ist eine Tangente an die Isophenge.

Die Berührungsebene an die Kugel hat ihre dritte Spur in  $t_1$ , die Berührungsebene des Cylinders hat ihre dritte Spur in  $t_2$ , somit ist der Schnittpunkt  $T$  (dessen verticale Projection sich in  $T''$  ergibt) ein Punkt der gesuchten Tangente.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: [105\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Mandl Julius

Artikel/Article: [Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen \(directe Construction der Isophengen\) 807-822](#)