Über die Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit

Alois Indra,
k. u. k. Artillerie-Oberst.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1896.)

Die angestrebte Fortsetzung und praktische Verwerthung meiner Studien über die Wärmeleitung in Kanonenrohren[1] versetzte mich in die Nothwendigkeit, ein Thermometer zu besitzen, welches die momentan herrschende Temperatur oder Temperaturdifferenz an Geschütztheilen sofort anzugeben gestattet.

Wenngleich das Thermoelement ein ganz geeignetes Mittel hiezu bietet, so ist dessen Anwendung bei Experimenten in der unmittelbaren Nähe des feuernden Geschützes so gut wie ausgeschlossen.

Indem ich nun versuchte, die gewöhnlichen Quecksilber-Thermometer zu Momentanmessungen anzuwenden, wurde ich durch folgenden Gedankengang geleitet:

Wird ein Quecksilber-Thermometer, welches die Temperatur der umgebenden Luft besitzt, mit einer Wärmequelle in Berührung gebracht, so steigt die Quecksilbersäule mit einer gewissen abnehmenden Geschwindigkeit, und wir messen die Temperatur durch die Höhe der Quecksilbersäule nach einer meist willkürlichen Zeit, sobald keine weitere Ausdehnung des Quecksilberfadens wahrgenommen werden kann.

---

[1] Indra, Neue ballistische Theorien. I. Analytische Theorie der Wärmeleitung in Geschützrohren. Pola 1893.

Es wird daher bei gewöhnlichen Messungen der Temperatur auf die Zeit der Einwirkung der Wärmequelle keine streng gesetzmässige Rücksicht genommen, sondern jene unbestimmte Zeit abgewartet, bis der Beharrungszustand in der Quecksilbersäule eingetreten ist.

Diese Zeit wird bei gewöhnlichen Temperaturmessungen aus zweifachen Gründen leicht zu bemessen sein:

1. Wenn die ganze Quecksilbersäule mit der Wärmequelle in Contact gebracht werden kann, und

2. wenn die Wärmequelle entweder absolut stationär ist oder durch unvermeidliche Wärmeverluste nur wenig abnimmt.

Schwierig wird jedoch die Temperaturbestimmung, wenn im Gegentheile

1. nur das Quecksilbergefäss oder — wie bei manchen Experimenten beim Geschütz — nur der Boden des Gefässes mit der Wärmequelle in Contact gebracht werden kann, und

2. wenn die Wärmequelle während des Messens der Temperatur nicht nur nicht gleichmässig verharrt, sondern bedeutend steigt oder fällt.

Was den Punkt 1 anbelangt, so wurden bereits Methoden angegeben bezüglich der »Thermometer-Correction für den herausragenden Faden«.[1]

Bezüglich der Temperaturmessungen ad 2, d. h. wenn die Wärmequelle beständig steigt oder fällt, ist mir keine Methode bekannt geworden, und die Entwicklung derselben bildet den Gegenstand der nachstehenden Abhandlung.

Die grundlegende Idee für die Bestimmung der momentanen Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle mittelst gewöhnlicher Quecksilber-Thermometer besteht darin, dass zuerst, je nach der Geschwindigkeit der Temperaturänderung, angenommen wird, die Temperatur sei in einem entsprechend kleinen Zeitbereich t_0 constant.

Dieses Zeitintervall könnte nun im Allgemeinen innerhalb eines beliebigen Zeitintervalles t gewählt werden; aus

[1] Wüllner, Experimentalphysik, Leipzig 1875, S. 310, mitgetheilt in Landolt's Abhandlung über die Dampftensionen homologer Verbindungen, Bonn 1868.

praktischen Gründen — da man ja grösstentheils Anfangstemperaturen messen will — ist hier unter t_0 eine anfängliche Zeit verstanden.

Ist nun die Umgebungstemperatur u_0, die dem Zeitintervalle t_0 entsprechende Temperatur u_t und die Temperatur für den Beharrungszustand u, so kann ich die mir gestellte Aufgabe in nachstehender Weise formuliren:

Es soll bei der momentanen Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle jene Temperatur u gemessen werden, welche die Wärmequelle im Anfangszustande (oder zu einer bestimmten Zeit t) hatte, wenn innerhalb der Zeit t_0 die Wärmequelle nahezu als constant angesehen werden konnte.

(Die Wahl von t_0 hängt daher von der Geschwindigkeit der Temperaturänderung der Wärmequelle ab und ist dieser Geschwindigkeit verkehrt proportional.)

Zur Durchführung der grundlegenden Experimente besass ich nur ein einfaches Quecksilber-Thermometer mit gewöhnlicher Centigrad-Eintheilung und zur Bestimmung der Zeit eine gewöhnliche Taschenuhr.

Die veränderliche Wärmequelle bildete ein Gefäss mit heissem Wasser, welche durch Wärmemittheilung an die umgebende Luft ihre Temperatur nur langsam änderte, so dass $t_0 = 5$ Secunden gewählt werden konnte.

Das Thermometer wurde in die Flüssigkeit nur auf die Länge des Thermometergefässes getaucht. Bei den ersten Versuchen besorgte ich selbst sowohl die Ablesung u_t des Thermometers, als auch der Zeit t_0 und erhielt hiebei nachstehende Resultate:

$t_0 = 5$ Secunden $\qquad u_0 = 30°$ C.

$u_t = 48°$ C.	$u = 54^1/_2°$ C.	$\dfrac{u_t - u_0}{u - u_0} = 0\cdot73$
46	$52^1/_2$	0·71
45	$51^1/_2$	0·69
43	50	0·65
42	49	0·64
41	$47^1/_2$	0·63

$u_t = 41°$ C.	$u = 46°$ C.	$\frac{u_t - u_1}{u - u_0} = 0 \cdot 64$
$40^1/_4$	$45^1/_4$	$0 \cdot 67$
40	45	$0 \cdot 66$
$35^1/_2$	38	$0 \cdot 69$
		Mittel $0 \cdot 67$

Bezüglich der Verwerthung der erhaltenen Messungsresultate ging ich von der Überlegung aus, dass a priori für

$$u = u_0 \text{ auch } u_t = u_0$$

sein muss; dass ferner nach dem Gesetze der Wärmeleitung im unendlichen Stabe für

$$t = 0, \quad u_t = u_0$$

und für

$$t = \infty, \quad u_t = u$$

sein müsse. Ferner folgt aus der linearen Form der Wärmeleitungsgleichung, dass bei constantem t die Grösse $u_t - u_0$ der Grösse $u - u_0$ proportional sein muss. Es ist daher $u_t - u_0 = (u - u_0) f(t)$, dabei muss $f(0) = 0$ und $f(\infty) = 1$ sein.

Für $t = t_0$ ist der Werth der Function eine Constante, so dass

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = f(t_0) = K$$

sämmtliche Argumentenwerthe in Beziehung bringt.

Die obigen Versuchsresultate zeigen mit Rücksicht auf die unvollkommene Art der Versuchsführung mit genügender Deutlichkeit den Charakter der Constanten und geben den Mittelwerth

$$K = 0 \cdot 67$$

Indem ich nun den vorigen Versuch bei Annahme derselben Zeit $t_0 = 5$ sec., aber einer anderen Umgebungstemperatur $u_0 = 20°$ C. wiederholte, wobei aber die Ablesung der Zeit ein Gehilfe (in Person meiner Frau) besorgte, erhielt ich nachstehende Zahlenreihen:

$u_t = 47°$ C.	$u = 60^1/_4°$ C.	$\dfrac{u_t - u_0}{u - u_0} = 0 \cdot 67$
41	$53^1/_4$	$0 \cdot 65$
40	50	$0 \cdot 67$
$38^1/_4$	47	$0 \cdot 67$
36	44	$0 \cdot 67$
33	$41^1/_2$	$0 \cdot 65$
33	39	$0 \cdot 68$
28	$32^1/_2$	$0 \cdot 64$
27	$29^3/_4$	$0 \cdot 72$
$25^3/_4$	$28^3/_4$	$0 \cdot 65$
		Mittel $0 \cdot 67$

Die Function f kann ohneweiters bestimmt werden, wenn man annimmt, dass zur Zeit t die Wärme noch so wenig tief in das Thermometergefäss eingedrungen ist, dass die Formel für die Wärmeleitung in einem cylindrischen Stabe angewendet werden darf.

Für einen solchen erhält man für die Temperatur $u_{t,x}$ in dem Querschnitte mit der Abscisse x den Ausdruck

$$u_{t,x} - u_0 = (u - u_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Für die gesammte Temperaturerhöhung u_t, welche offenbar der gesammten eingedrungenen Wärme proportional ist, ergibt sich daher

$$u_t - u_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(u - u_0)\int_0^{\infty} dx \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Setzt man

$$\frac{x}{2\sqrt{kt}} = \xi,$$

so ist

$$u_t - u_0 = (u - u_0) \,.\, 4\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\int_0^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta,$$

und nach durchgeführter theilweiser Integration

$$u_t - u_0 = (u - u_0)\, 2\sqrt{\frac{kt}{\pi}}$$

oder nach Zusammenfassung der constanten Grössen in eine Constante C,

$$u_t - u_0 = (u - u_0) . C \sqrt{t}. \tag{1}$$

Diese einfache Formel kann aber nur für sehr kleine Werthe von t benützt werden, da sie nur der einen an die Function $f(t)$ gestellten Forderung entspricht, dass $f(0) = 0$ sei, dagegen nicht mehr der Forderung $f(\infty) = 1$ Rechnung trägt.

Eine Function, welche beiden Bedingungen entspricht und als erstes Glied auch die eben abgeleitete Function enthält, ist dargestellt durch die empirische Formel

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e \quad d\eta_1,$$

worin m eine erst näher zu bestimmende Constante bedeutet.

Die Reihenentwicklung dieser Function ergibt

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad m\sqrt{t} \left(1 - \frac{m^2 t}{3} + \frac{m^4 t^2}{1.2.5} \quad \right),$$

woraus die Beziehung zur vorhin abgeleiteten Function ersichtlich ist.

Mit Hilfe dieser letzteren Function von t erhält man die Formel für u_t

$$u_t - u_0 = (u - u_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta_1^2} d\eta_1, \tag{2}$$

in welcher die Constante m durch das Experiment zu bestimmen ist. Bezüglich der Bestimmung der Constanten m ist hervorzuheben, dass die Anordnung des Experimentes bei der Wahl der Wärmequelle genau der Art der Verwendung des Thermometers bei der praktischen Anwendung entsprechen muss; es erscheint daher eine und dieselbe Constante nur bei genau bestimmter Qualität des Vergleichskörpers und bestimmt gegebener Art der Berührung zwischen dem Körper und dem Thermometer definirt.

Bei der experimentellen Bestimmung der vorhin angeführten Zahlenreihe war das Thermometer mit dem ganzen Gefässe in Wasser getaucht; die aus diesen Zahlen zu rechnende Constante m entspricht daher nur für Temperaturmessungen mit dem in Verwendung gestandenen Thermometer bei gleicher Tauchung in eine tropfbare Flüssigkeit, welche ebenso wie Wasser netzt und deren Wärmeleitungsconstante von der des Wassers nicht bedeutend differirt.

Dieselbe Constante wäre daher zur Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers nicht mehr anwendbar.

Bei nicht vollkommener Tauchung des Thermometergefässes, sondern nur theilweiser Berührung desselben mit einem festen Körper ist es nöthig, dass die Constante m aus Experimenten mit einem Vergleichskörper abgeleitet werde, welcher hiebei mit dem Thermometergefäss genau in gleicher Weise in Berührung kommt, und welcher eine nahezu gleiche Wärmeleitungsconstante besitzt.

Bei Verwerthung der früher angeführten Versuchsdaten zur Bestimmung der Constanten C in Formel 1), beziehungsweise von m in Formel 2) ergibt sich

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = C\sqrt{t} = 0\cdot 67, \quad C = 0\cdot 2996,$$

respective

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta = 0\cdot 67$$

$$m\sqrt{t} = 0\cdot 69, \quad m = 0\cdot 3085.$$

Beide Constante sind daher praktisch gleich zu nennen, und man wird in vielen Fällen die einfachere Formel 1) der Formel 2) vorziehen.

Den hier verwertheten Versuchsdaten lag eine Expositionszeit des Thermometers von 5 Secunden zu Grunde.

Um den Einfluss einer geänderten Annahme der Expositionszeit t_0 kennen zu lernen, wurde die nachstehende Versuchsreihe durchgeführt — unter der Annahme von

$$t_0 = 10 \text{ Secunden}, \qquad u_0 = 20° \text{ C}.$$

oder nach Zusammenfassung der constanten Grössen in eine Constante C,

$$u_t - u_0 = (u - u_0) . C \sqrt{t}. \tag{1}$$

Diese einfache Formel kann aber nur für sehr kleine Werthe von t benützt werden, da sie nur der einen an die Function $f(t)$ gestellten Forderung entspricht, dass $f(0) = 0$ sei, dagegen nicht mehr der Forderung $f(\infty) = 1$ Rechnung trägt.

Eine Function, welche beiden Bedingungen entspricht und als erstes Glied auch die eben abgeleitete Function enthält, ist dargestellt durch die empirische Formel

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta,$$

worin m eine erst näher zu bestimmende Constante bedeutet.

Die Reihenentwicklung dieser Function ergibt

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad m\sqrt{t} \left(1 - \frac{m^2 t}{3} + \frac{m^4 t^2}{1.2.5} \quad \right),$$

woraus die Beziehung zur vorhin abgeleiteten Function ersichtlich ist.

Mit Hilfe dieser letzteren Function von t erhält man die Formel für u_t

$$u_t - u_0 = (u - u_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta, \tag{2}$$

in welcher die Constante m durch das Experiment zu bestimmen ist. Bezüglich der Bestimmung der Constanten m ist hervorzuheben, dass die Anordnung des Experimentes bei der Wahl der Wärmequelle genau der Art der Verwendung des Thermometers bei der praktischen Anwendung entsprechen muss; es erscheint daher eine und dieselbe Constante nur bei genau bestimmter Qualität des Vergleichskörpers und bestimmt gegebener Art der Berührung zwischen dem Körper und dem Thermometer definirt.

Bei der experimentellen Bestimmung der vorhin angeführten Zahlenreihe war das Thermometer mit dem ganzen Gefässe in Wasser getaucht; die aus diesen Zahlen zu rechnende Constante m entspricht daher nur für Temperaturmessungen mit dem in Verwendung gestandenen Thermometer bei gleicher Tauchung in eine tropfbare Flüssigkeit, welche ebenso wie Wasser netzt und deren Wärmeleitungsconstante von der des Wassers nicht bedeutend differirt.

Dieselbe Constante wäre daher zur Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers nicht mehr anwendbar.

Bei nicht vollkommener Tauchung des Thermometergefässes, sondern nur theilweiser Berührung desselben mit einem festen Körper ist es nöthig, dass die Constante m aus Experimenten mit einem Vergleichskörper abgeleitet werde, welcher hiebei mit dem Thermometergefäss genau in gleicher Weise in Berührung kommt, und welcher eine nahezu gleiche Wärmeleitungsconstante besitzt.

Bei Verwerthung der früher angeführten Versuchsdaten zur Bestimmung der Constanten C in Formel 1), beziehungsweise von m in Formel 2) ergibt sich

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = C\sqrt{t} = 0\cdot 67,\ C = 0\cdot 2996,$$

respective

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta = 0\cdot 67$$

$$m\sqrt{t} = 0\cdot 69,\ m = 0\cdot 3085.$$

Beide Constante sind daher praktisch gleich zu nennen, und man wird in vielen Fällen die einfachere Formel 1) der Formel 2) vorziehen.

Den hier verwertheten Versuchsdaten lag eine Expositionszeit des Thermometers von 5 Secunden zu Grunde.

Um den Einfluss einer geänderten Annahme der Expositionszeit t_0 kennen zu lernen, wurde die nachstehende Versuchsreihe durchgeführt — unter der Annahme von

$$t_0 = 10 \text{ Secunden}, \qquad u_0 = 20°\ \text{C}.$$

$u_t = 71°$ C.,	$u = 77°$ C.,	$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = 0\cdot895$
57	61	$0\cdot902$
$49^1/_2$	$53^3/_4$	$0\cdot874$
$41^1/_2$	$46^3/_4$	$0\cdot795$
$40^1/_2$	43	$0\cdot891$
$37^1/_2$	$40^3/_4$	$0\cdot843$
$34^3/_4$	$37^1/_4$	$0\cdot855$
$33^3/_4$	$36^1/_2$	$0\cdot833$
$32^1/_2$	$35^1/_4$	$0\cdot817$
32	34	$0\cdot857$
$30^3/_4$	$33^1/_4$	$0\cdot814$
$29^3/_4$	$30^3/_4$	$0\cdot907$
28	30	$0\cdot800$
27	29	0 778
		Mittel. $0\cdot847$

Aus diesen Zahlenreihen für $t_0 = 10$ Sec. folgt

$$C\sqrt{10} = 0\cdot847, \qquad C = 0\cdot2679$$

oder

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{10}} e^{-\eta^2}\, d\eta = 0\cdot847, \qquad m\sqrt{10} = 1\ 01,$$

$$m^2 = 0\cdot10201, \qquad m = 0\cdot3194.$$

Mit Rücksicht auf die äusserst primitive Art der Durchführung der Experimente ist die erhaltene Übereinstimmung der drei Werthe von m immerhin sehr befriedigend und kann als Bestätigung der a priori angenommene Functionsformen angesehen werden. Dagegen differirt der Werth von C schon bedeutender, womit die beschränkte Anwendbarkeit der Formel 1) ersichtlich ist.

Ich habe nun den Versuch in exacterer Form in nachstehender Weise durchgeführt, um die früher abgeleiteten Resultate zu verificiren.

Da die Ablesung des Standes der Quecksilbersäule in einem bestimmten, der Zeit t_0 entsprechenden Momente ihrer Bewegung sehr schwierig und ungenau ist, so wählte ich beim folgenden

Experimente statt der angemessenen Zeit t_0 eine angemessene Temperatur u_t und bestimmte nun umgekehrt die Zeit t_0 entsprechend dem Anlangen der Quecksilbersäule bei dem betreffenden Theilstrich der Thermometerscala mit einer genau gehenden Uhr von Marenzeller, welche das momentane Auslösen und Einstellen des Zeigers am Anfang und Ende der Zeit ermöglicht und die Zeiten bis auf Hundertstel-Secunden directe abzulesen gestattet.

Die Versuche ergaben nachstehende Resultate:

$$u_0 = 20° \text{ C.}$$

u_t° C.	u° C.	t_0 Sec.	$\frac{u_t - u_0}{u - u_0}$	$m\sqrt{t_0}$	
60	70	7·11	0·800	0·906	0·1155
50	$65^1/_4$	4·40	0·663	0·679	0·1047
50	$61^3/_4$	4·39	0·719	0·763	0·1327
50	$58^1/_4$	6·62	0·783	0·873	0·1151
45	$55^1/_2$	5·27	0·702	0·735	0·1024
45	54	6·12	0·733	0·785	0·1007
45	$52^1/_2$	6·18	0·769	0·847	0·1160
40	$46^3/_4$	4·72	0·747	0·808	0·1385
40	46	6·29	0·769	0·847	0·1139
40	$45^1/_4$	6·03	0·792	0·892	0·1319
				Mittel..	0·1171

Dem entspricht $m = 0·3422$, also ein etwas höherer Werth als früher, welcher einer etwas ungleichförmigen Tauchung des Thermometers in die Wärmequelle zuzuschreiben sein dürfte.

Vergleicht man die Werthe von m^2 aus den vier Versuchsreihen, so hat man

	0·0952
	0·0952
	0·1020
	0·1171
Mittel	0·1024

$$m = 0·32$$

Dieser Mittelwerth gehört nur zu meinem beim Versuche verwendeten Thermometer und ist daher für jedes Thermometer bei einer und derselben Berührungsart mit der Wärmequelle eine und dieselbe charakteristische Zahl, welche entweder schon bei der Construction des Thermometers auf die vorstehende Weise ermittelt und am Thermometer kennbar gemacht werden könnte, oder sie muss vor der Verwendung des Thermometers zur Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle erst ermittelt werden.

Für mein Thermometer ergibt sich nun die Formel

$$u_t = u_0 + (u - u_0)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0\cdot 32\sqrt{t}} \qquad d\eta.$$

Bei der praktischen Anwendung des Thermometers handelt es sich aber nicht um die Bestimmung der Temperatur u_t, sondern der Temperatur u, welche einem stationären Temperaturzustande der Wärmequelle entsprechen würde, welche eben während der Zeit t_0 geherrscht hat.

Aus obiger Formel erhält man

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{C\sqrt{t}},$$

beziehungsweise

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t_0}} e^{-\eta^2}\,d\eta}.$$

Auf Grund der abgeleiteten Formel können durch das Experiment nachstehende praktische Fragen der Thermometrie gelöst werden

1. Bestimmung der Temperatur einer constanten Wärmequelle, wenn nicht die ganze Quecksilbersäule, sondern nur das Gefäss oder selbst nur der Boden des Gefässes mit der Wärmequelle in Contact gebracht werden kann.

Zur Lösung dieser Aufgabe muss die Constante m so bestimmt worden sein, dass bei ihrer Ermittlung das Thermometer in derselben Weise mit der Wärmequelle in Contact gebracht wurde, wie es bei der Verwendung gefordert wird: entweder nur das Gefäss oder nur der Boden des Gefässes.

Die Formel leistet dann nicht nur dasselbe wie die Entwicklung von Wüllner für die Correctur des herausragenden Fadens, sie gibt bereits nach der beliebig klein gewählten Zeit t_0 die maximale Temperatur u an, welche die Quecksilbersäule eigentlich erst in einer viel grösseren Zeit erreichen würde, wenn die Temperatur u constant erhalten bliebe.

Ausserdem zeigt die Formel, dass es für jede Temperatur eine bestimmte Zeit t gibt, in welcher mit praktisch hinlänglicher Genauigkeit der Beharrungszustand in der Quecksilbersäule erreicht ist.

Diese Zeit wird dann erreicht sein, wenn die Ablesung in späterer Zeit keine nennbare Vermehrung der Temperatur zur Folge hat.

Nehmen wir an, dass es nicht mehr möglich wäre, eine Temperaturdifferenz von 0·01° C. zu constatiren, so dass wir setzen können

$$u-u_0 = u_t-u_0 \pm 0\cdot 01;$$

dann ist, da für die Rechnung nur das untere Zeichen verwerthbar ist,

$$\frac{u-u_0+0\cdot 01}{u-u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta$$

oder

$$0\cdot 01 = (u-u_0)\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta\right).$$

Damit der Fehler 0·01 für alle Werthe der relativen Temperatur u nicht überschritten wird, muss t so bestimmt werden, dass

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} \qquad d\eta = \frac{0\cdot 01}{u-u_0}$$

Setzen wir z. B. $u-u_0 = 100°$ C., so ist

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta = 0\cdot 0001,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} \qquad d\eta = 0\cdot 9999,$$

daher $m\sqrt{t} = 2\cdot 75$ und $t = 73\cdot 96$ Sec.

Bei Versuchen mit einem gewöhnlichen Thermometer wird man die Temperatur höchstens bis auf 0·25° C. genau angeben können; bei einer Temperatursdifferenz $u - u_0 = 20°$ ist

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \frac{0\cdot 25}{20} = 1 - 0\cdot 0125 = 0\cdot 9875,$$

wofür

$$m\sqrt{t} = 1\cdot 766 \text{ und } t = 30\cdot 25 \text{ Sec.}$$

entspricht.

Ein diesbezüglich durchgeführter Versuch ergab für

$$u_0 = 20° \qquad u = 40\cdot 75° \qquad t = 34\cdot 43 \text{ Sec.}$$

Indem hiemit bei vorausgesetzter Bekanntgabe meiner Constanten m für das im Gebrauche befindliche Thermometer bei einer bestimmten Art der Berührung mit der Wärmequelle diejenige Zeit t bestimmt werden kann, in welcher scheinbar der Beharrungszustand in der Quecksilbersäule eintritt, so entfällt jetzt die bisherige Unbestimmtheit und Willkür bezüglich des richtigen Zeitpunktes für die Ablesung des Thermometerstandes bei einer constanten Wärmequelle.

2. Bestimmung der Temperatur u eines constanten Wärmezustandes in einer sehr kleinen Zeit t_0.

Das Bedürfniss, die Temperatur einer constanten Wärmequelle in einer sehr kleinen Zeit zu bestimmen, liegt im Allgemeinen nicht vor; die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich in analoger Weise wie die folgende:

3. Bestimmung der Temperatur u einer veränderlichen Wärmequelle zu einer bestimmt gegebenen Zeit.

Der einfachste Fall ist der, wenn die veränderliche Temperatur der Wärmequelle zur Zeit $t = 0$ bestimmt werden soll.

Es wird sich nämlich bei der vollkommenen Untersuchung eines veränderlichen Wärmezustandes darum handeln, entweder die Temperatur desselben in bestimmten Zeitintervallen zu messen, um den Verlauf der Abkühlung beziehungsweise der Temperaturssteigerung der Wärmequelle kennen zu lernen, oder es soll zur gleichen Zeit der Zustand einer an verschiedenen Orten verschieden temperirten Wärmequelle gemessen werden.

Die Lösung der Aufgabe besteht unter allen Umständen darin, dass ein Thermometer, welches vor der Messung die

Temperatur u_0 der umgebenden Luft besitzt, in einer hinlänglich kleinen Zeit t_0 (innerhalb welcher die veränderliche Wärmequelle nahezu constant angesehen werden kann) mit der Wärmequelle in bestimmter Weise in Berührung gebracht und nach Ablauf der Zeit t_0 die Temperatur u_t am Thermometer abgelesen wird.

Die wahre Temperatur der Wärmequelle ergibt sich dann durch Rechnung aus der Formel:

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t_0}} e^{-\eta^2} d\eta}$$

Soll der ganze Verlauf der Wärmequelle durch Messung bestimmt werden, so muss für die folgenden Zeitintervalle wieder die Anfangstemperatur u_0 hergestellt und das kleine Zeitintervalle t_0 der Wärmequelle entsprechend angepasst werden, so dass bei gesteigerter Temperatur t_0 vermindert, bei verminderter Temperatur vermehrt wird.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung von u unter Beibehalt eines und desselben Werthes von t_0, indem dann

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{K}$$

gesetzt werden kann.

Da sich das Ablesen der Temperatur u_t während der Bewegung des Quecksilberfadens sehr schwierig gestaltet, so ist es zweckmässig, statt der Wahl einer entsprechend kleinen Zeit t_0 einen entsprechenden Werth von u_t anzunehmen und die Zeit t_0 vom Momente der Berührung der Wärmequelle bis zum Anlangen des Quecksilberfadens bei der Temperatur u_t mittelst einer genauen Uhr (Marenzeller) zu bestimmen.

Zur praktischen Anwendung des Thermometers bei der Messung der momentanen Temperatur der Bohrungswände von Geschützrohren versuchte ich es zuerst das Thermometergefäss aus Metall zu construiren, wodurch nebst der grösseren Empfindlichkeit sich auch der Vortheil ergeben würde, mit einem gewöhnlichen Quecksilberthermometer von 50° Scalenlänge und mit Decimaleintheilung sehr hohe Temperaturen bis zu 250° C. messen zu können.

Es ergibt sich dies aus der Formel 2), wenn man die Expositionszeit z. B. 5 Sec. wählt und den Contact des Thermometergefässes mit der Wärmequelle nur durch Anlegen des Gefässes an den festen Körper herstellt, so dass die Berührung nur in einem Oberflächenelement erfolgt.

Dann ist (für ein bestimmtes Thermometer mit Glasgefäss)

$$m = 0\cdot 0315,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{5}} e^{-\eta^2}\, d\eta = 0\cdot 0788.$$

Gestattet man bei der Messung einer hohen Temperatur ein Steigen der Quecksilbersäule bis 40° C., so ist

$$u_t = 40°$$

und sei

$$u_0 = 20°$$

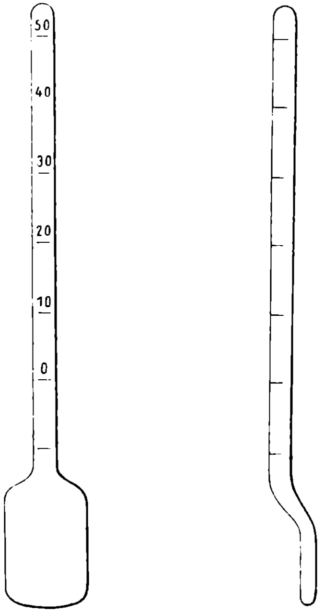
so ergibt sich

$$u = 20 + \frac{20}{0\cdot 0788} = 274°\ \mathrm{C}.$$

Die Anwendung von metallenen Thermometergefässen stösst dermalen noch auf Schwierigkeiten, so dass dasselbe vorläufig noch aus Glas hergestellt werden musste. Die vorgeführten Versuchsreihen zeigten aber, dass die geringe Wärmeleitungsfähigkeit des Glases die Anwendbarkeit desselben nicht stört.

Damit eine möglichst innige Berührung des Gefässes mit einem ebenen festen Körper ermöglicht werde, wurde die Glasröhre des Thermometers am oberen Ende des Gefässes abgebogen und das letztere plattgedrückt — wie in der nachstehenden Figur angedeutet — und das Thermometer zur leichteren Handhabung in ein Korklager gebettet.

Mit einem solchen von Herrn Heinrich Kapeller in Wien ausgeführten Thermometer mit Decimaleintheilung konnte ich nun thatsächlich den experimentellen Beweis erbringen, welchen ich in meiner eingangs citirten Studie über die Wärmeleitung in Geschützrohren theoretisch entwickelte, dass die Erwärmung der Geschützrohre beim Schusse nur zum geringsten Theile durch die Mittheilung der Verbrennungs-Temperatur der Pulvergase an die Bohrungswände, sondern hauptsächlich durch die in Wärme umgesetzte und auf die Bohrungswände übertragene Vibrationsarbeit der Pulvergase verursacht werde.



Vordere Ansicht Seitenansicht

Der experimentelle Nachweis ergab sich einfach durch nachstehende Temperaturmessungen an einem bronzenen Kanonenrohre.

Die Temperaturen wurden bei einer Expositionszeit des Thermometers von je 10 Secunden an der inneren und äusseren Bohrungswand nach je 7 Schüssen gemessen, welche in einer Zeit von circa $3^1/_2$ Minuten abgegeben wurden. Zwischen jeder Serie von 7 Schüssen verstrich eine Zwischenzeit von circa $2^1/_2$ Minuten.

Die Mittel aus mehreren Messungen ergaben:

Nach *n* Schüssen *n* =	Temperatur an der inneren Bohrungswand	Temperatur an der äusseren Bohrungswand
0	18·0° C.	18·0° C.
7	32·0	32·0
14	46·5	47·0
21	55·8	56·1
28	65·5	64·0
35	75·0	70·5
42	84·0	78·0
49	90·0	85·5

Diese Messungen zeigen, dass die Temperatursdifferenzen zwischen der inneren und äusseren Bohrungswand anfänglich verschwindend klein, für die späteren Schüsse aber ganz unbedeutend sind, so dass man behaupten könnte, die innere und äussere Bohrungswand wird durch den Schuss praktisch in gleicher Weise erwärmt.

Diese Thatsache könnte aber weder in qualitativer noch in quantitativer Weise niemals durch blosse Wärmeleitung hervorgerufen und kann nur dadurch erklärt werden, dass durch die Übertragung des Stosses der Pulvergase auf die Rohrmaterie die in der letzteren hervorgerufenen und mit der Schallgeschwindigkeit nahezu momentan bis an die äussere Bohrungswand fortgepflanzten Molecularschwingungen als Wärme zur Erscheinung gelangen, was experimentell zu beweisen war.