Über die Transcendenz der Zahlen e und π

F. Mertens.

1.

Wenn hier den Bearbeitungen der Beweise Hermite's und Lindemann's für die Transcendenz der Zahlen e und π von Weierstrass,[1] Hilbert,[2] Hurwitz[3] und Gordan[4] noch eine hinzugefügt wird, so geschieht dies nur, weil dieselbe mit möglichst einfachen algebraischen Sätzen auszukommen trachtet und keine zahlentheoretischen Hilfsmittel in Anspruch nimmt.

2.

Die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} +$$

zerfällt, wenn k, m ganze positive Zahlen bezeichnen, in die drei Theile:

$$X_k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$Y_k = \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \frac{x^{m+k-1}}{(m+k-1)!}$$

$$Z_k = \frac{x^{m+k}}{(m+k)!} + \frac{x^{m+k+1}}{(m+k+1)!} + \quad \text{in inf.}$$

[1] Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, XLIX.

[3], [4] Mathematische Annalen, XLIII.

Bezeichnet man die ganze Function $m-1^{\text{ten}}$ Grades von t

$$(t+m-1)(t+m-2)\dots(t+1)+(t+m-1)(t+m-2)\dots(t+2)x$$
$$+(t+m-1)(t+m-2)\dots(t+3)x^2+\quad+x^{m-1}$$

mit $g(t)$ und die erste, zweite, ... $m-1^{\text{te}}$ Differenzenreihe der Reihe

$$g(0),\ g(1),\ g(2), \dots g(m-1)$$

beziehungsweise mit

$$g_1(0),\ g_1(1),\ g_1(2), \dots g_1(m-2)$$
$$g_2(0),\ g_2(1),\ g_2(2), \dots g_2(m-3)$$
$$g_{m-1}(0),$$

so wird identisch

$$g(t)=g(0)+g_1(0)\frac{t}{1}+g_2(0)\frac{t(t-1)}{2!}+$$
$$+g_{m-1}(0)\frac{t(t-1)\dots(t-m+2)}{(m-1)!}$$

und man hat

$$(m+k-1)!\,Y_k=x^k g(k)$$
$$=g_0(0)\,.\,x^k+\frac{g_1(0)x}{1!}\cdot kx^{k-1}+$$
$$+\frac{g_2(0)x^2}{2!}\cdot k(k-1)x^{k-2}+ \qquad (1)$$

Es sei nun

$$f(x)=a_0x^{n+1}+a_1x^n+\quad+a_nx$$

eine ganze, durch x theilbare Function von x, deren Coëfficienten ganze oder auch ganze complexe Zahlen sind, in welcher a_0 nicht Null und welche zu ihrer Ableitung $f'(x)$ theilerfremd ist, und es werde

$$x^{\nu+1}\left(\frac{1}{x}f\right)^m=T=c_1^{(\nu)}x+c_2^{(\nu)}x^2+\quad+c_{mn+n+1}^{(\nu)}x^{mn+n+1}$$

gesetzt, wo ν eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots n$ bezeichnet. Man multiplicire die Identität

$$(m+k-1)!\,e^x=(m+k-1)!\,(X_k+Y_k+Z_k)$$

mit $\frac{1}{m!}c_k^{(\nu)}$ und summire hierauf von $k=1$ bis $k=mn+n+1$ Das Resultat erscheint, wenn

$$G_\nu(x)=\frac{1}{m!}(c_1^{(\nu)}m!X_1+c_2^{(\nu)}(m+1)!X_2+ \\ \ldots+c_{mn+n+1}^{(\nu)}(mn+n+1)!X_{mn+n+1})$$

$$R_\nu(x)=\frac{1}{m!}(c_1^{(\nu)}m!Z_1+c_2^{(\nu)}(m+1)!Z_2+ \\ \ldots+c_{mn+n+1}^{(\nu)}(mn+n+1)!Z_{mn+n+1})$$

gesetzt wird, in der Gestalt

$$G_\nu(0)e^x=G_\nu(x)+Lf(x)+R_\nu(x), \tag{2}$$

wo L eine ganze Function von x bezeichnet. Denn die Function

$$c_1^{(\nu)}m!Y_1+c_2^{(\nu)}(m+1)!Y_2+\quad +c_{mn+n+1}^{(\nu)}(mn+n+m)!Y_{mn+n+1}$$

wird nach (1)

$$=g(0)(c_1^{(\nu)}x+c_2^{(\nu)}x^2+\quad +c_{mn+n+1}^{(\nu)}x^{mn+n+1})$$
$$+\frac{g_1(0)x}{1!}(c_1^{(\nu)}+2c_2^{(\nu)}x+3c_3^{(\nu)}x^2+\ldots)+$$
$$+\frac{g_2(0)x^2}{2!}(2c_2^{(\nu)}+3\cdot 2c_3^{(\nu)}x+4\cdot 3c_4^{(\nu)}x^2+\ldots)$$
$$+$$
$$=g(0)T+g_1(0)\frac{x}{1!}T'+g_2(0)\frac{x^2}{2!}T''+\quad +g_{m-1}(0)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}T^{(m-1)}$$

und ist demnach durch f theilbar, da T den Factor f und T', T'',.. $T^{(m-1)}$ alle den Factor $\frac{1}{x}f$ enthalten.

3.

Der Ausdruck

$$(m+k-1)!X_k=\frac{(m+k-1)!}{(k-1)!}x^{k-1}+\frac{(m+k-1)!}{(k-2)!}x^{k-2}+ \\ \ldots+(m+k-1)!$$

ist die Summe der m^{ten}, $(m+1)^{\text{ten}}, \ldots (mn+m+n)^{\text{ten}}$ Ableitung von x^{m+k-1}. Wird daher

$$x^{m-1} T = x^{\nu} f^{m} = f_{\nu}$$

gesetzt, so erscheint $G_{\nu}(x)$ in der Gestalt

$$G_{\nu}(x) = \frac{1}{m!}(f_{\nu}^{(m)} + f_{\nu}^{(m+1)} + \quad + f_{\nu}^{(mn+m+n)})$$

und ist sonach eine ganze Function von x, welche ganze ganzzahlige Verbindungen von $a_0, a_1, \ldots a_n$ zu Coëfficienten hat, da die Coëfficienten von $\frac{1}{m!} f_{\nu}^{(m+k)}$ Vielfache der Coëfficienten von f_{ν} sind.

Ist $g_{\nu}(x)$ der den Grad n in x nicht erreichende Rest, welcher bei der Division von $G_{\nu}(x)$ durch f bleibt, so ist die Determinante des Coëfficientensystems der $n+1$ Functionen

$$g_0, g_1, g_2, \ldots g_n$$

nicht Null. Dies lässt sich, wie bei Weierstrass, in folgender Weise darthun.

Wäre die fragliche Determinante Null, so gäbe es Zahlen $c_0, c_1, \ldots c_n$, welche nicht durchweg Null sind und der Identität in x

$$c_0 g_0 + c_1 g_1 + \quad + c_n g_n = 0$$

genügen, und die Function

$$G = c_0 G_0(x) + c_1 G_1(x) + \ldots + c_n G_n(x)$$

wäre durch f theilbar. Setzt man aber

$$c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = (c_0 + c_1 x + \quad + c_n x^n) f^m = v$$

$$v + v' + v'' + \ldots + v^{(mn+n+m)} = u,$$

so wird

$$m! G = v^{(m)} + v^{(m+1)} + \ldots + v^{(mn+m+n)}$$

und es müsste auch u durch f theilbar sein, weil $v, v', \ldots v^{(m-1)}$ den Factor f enthalten.

Wenn aber u durch f^p theilbar und $p \leqq m$ ist, so folgt aus der Identität

$$u - u' = v,$$

dass u' ebenfalls durch f^p theilbar ist. Dann muss aber f^{p+1} in u aufgehen, weil f zu seiner Ableitung theilerfremd ist. Wäre also u durch f theilbar, so müsste es auch durch $f^2, f^3, \dots f^{m+1}$ theilbar sein. Dies ist aber unmöglich, da u von geringerem Grade als f^{m+1} ist und nicht identisch verschwindet.

Ein Ausdruck

$$C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \dots + C_n e^{\beta_n t},$$

in welchem t eine Variable und $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ gegebene Grössen bezeichnen, verschwindet identisch, wenn in seiner Entwicklung nach Potenzen von t die Coëfficienten von $t^0, t \dots t^n$ Null sind. Sucht man nämlich unter den Grössen $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ die numerisch verschiedenen aus und bezeichnet dieselben mit $\gamma_2, \dots \gamma_\mu$, so nimmt der genannte Ausdruck nach Zusammenziehung aller Glieder mit identischen Exponentialfactoren die Gestalt

$$B_1 e^{\gamma_1 t} + B_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + B_\mu e^{\gamma_\mu t}$$

an und das Fehlen der Potenzen $t^0, t, \dots t^n$ in seiner Entwicklung wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
C_0 + C_1 + \quad + C_n &= B_1 + B_2 + \dots + B_\mu = 0 \\
C_0\beta_0 + C_1\beta_1 + \dots + C_n\beta_n &= B_1\gamma_1 + B_2\gamma_2 + \quad + B_\mu\gamma_\mu = 0 \\
C_0\beta_0^n + C_1\beta_1^n + \quad + C_n\beta_n^n &= B_1\gamma_1^n + B_2\gamma_2^n + \quad . + B_\mu\gamma_\mu^n = 0
\end{aligned}$$

ausgedrückt. Diese Gleichungen fallen aber, weil die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_\mu \\ \gamma_1^{\mu-1}, & \gamma_2^{\mu-1}, & \dots \gamma_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, mit den Gleichungen

$$B_1 = 0,\ B_2 = 0, \dots B_\mu = 0$$

zusammen.

Sind demnach $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

so muss wenigstens eine der $n+1$ Grössen

$$\begin{array}{c} C_0 G_0(\beta_0) + C_1 G_0(\beta_1) + \ldots + C_n G_0(\beta_n) \\ C_0 G_1(\beta_0) + C_1 G_1(\beta_1) + \ldots + C_n G_1(\beta_n) \\ \\ C_0 G_n(\beta_0) + C_1 G_n(\beta_1) + \ldots + C_n G_n(\beta_n) \end{array}$$

von Null verschieden sein, wenn der Ausdruck

$$C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t}$$

nicht identisch verschwindet. Wären nämlich die genannten Grössen alle $=0$, so hätte man

$$\begin{array}{c} C_0 g_0(\beta_0) + C_1 g_0(\beta_1) + \quad + C_n g_0(\beta_n) = 0 \\ C_0 g_1(\beta_0) + C_1 g_1(\beta_1) + \ldots + C_n g_1(\beta_n) = 0 \\ \\ C_0 g_n(\beta_0) + C_1 g_n(\beta_1) + \quad + C_n g_n(\beta_n) = 0 \end{array}$$

und daher auch, weil die Determinante des Coëfficientensystems der Functionen $g_0, g_1, \ldots g_n$ nicht Null ist,

$$\begin{array}{c} C_0 + C_1 + \ldots + C_n = 0 \\ C_0 \beta_0 + C_1 \beta_1 + \ldots + C_n \beta_n = 0 \\ \\ C_0 \beta_0^n + C_1 \beta_1^n + \quad + C_n \beta_n^n = 0 \end{array}$$

Dann müsste aber

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0$$

sein.

4.

Ist r der absolute Betrag von x und $m \geqq r > 0$, so hat man

$$\begin{aligned} |Z_k| &\leqq \frac{r^{m+k}}{(m+k)!} \left(1 + \frac{r}{m+k+1} + \frac{r^2}{(m+k+1)(m+k+2)} + \ldots\right) \\ &< \frac{r^{m+k}}{(m+k)!} \left(1 + \frac{m}{m+k} + \left(\frac{m}{m+k}\right)^2 + \ldots\right) \\ &< \frac{r^{m+k}}{(m+k-1)!} \end{aligned}$$

und daher

$$|R_\nu(x)| < \frac{r^m}{m!}(r\,|c_1^{(\nu)}| + r^2 |c_2^{(\nu)}| + \quad .)$$
$$< \frac{r^{n+1}}{m!} f_0(r)^m,$$

wo f_0 aus f hervorgeht, wenn alle Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden.

5.

Es sei

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n$$

irgend eine gegebene ganze ganzzahlige nicht identisch verschwindende Function von z. Man setze in der Identität (2)

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

und der Reihe nach $x = 0, 1, 2, \ldots n$. Es wird dann

$$G_\nu(0) = G_\nu(0)$$
$$G_\nu(0)\,e = G_\nu(1) + R_\nu(1)$$
$$G_\nu(0)\,e^2 = G_\nu(2) + R_\nu(2)$$
$$G_\nu(0)\,e^n = G_\nu(n) + R_\nu(n).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $C_0, C_1, \ldots C_n$ und addirt, so ergibt sich

$$G_\nu(0)\,F(e) = H_\nu + \rho.$$

wo

$$H_\nu = C_0 G_\nu(0) + C_1 G_\nu(1) + \quad + C_n G_\nu(n)$$
$$\rho = \qquad C_1 R_\nu(1) + \quad + C_n R_\nu(n).$$

Man wähle nun m so gross, dass der Zahlenwerth von ρ unter $\frac{1}{2}$ fällt. Zu diesem Ende genügt es, wenn S die Summe der Zahlenwerthe der Coëfficienten $C_0, C_1, . \; C_n$ bezeichnet, m der Bedingung

$$S n^{n+1} \frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!} < \frac{1}{2}$$

zu unterwerfen; denn m fällt dann $>n$ aus und man hat

$$|R_\nu(k)| < \frac{k^{n+1} f_0(k)^m}{m!} \leqq n^{n+1} \frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!},$$

also

$$|\rho| < Sn^{n+1} \frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!}$$
$$< \frac{1}{2}.$$

Nach Fixirung von m muss nach 3. eine der Zahlen $H_0, H_1, \ldots H_n$, etwa H_ν, von Null verschieden sein, da der Ausdruck $F(e^t)$ nicht identisch verschwindet. Als ganze Zahl muss dann H_ν mindestens den Zahlenwerth 1 haben, und es wird daher ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$G_\nu(0) F(e) > \frac{1}{2}$$

$$F(e) > \frac{1}{2G_\nu(0)}.$$

Es gibt also keine ganze ganzzahlige Function, welche für e verschwindet.

6.

Es seien

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_q z^q$$

eine beliebige nicht identisch verschwindende ganze ganzzahlige Function und

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p$$

eine beliebige ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten, unter welchen b_0 und b_p von Null verschieden vorausgesetzt werden.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

und t eine Variable, so ergibt sich für das Product

$$P(t) = \psi(e^{\alpha_1 t})\psi(e^{\alpha_2 t})\ldots\psi(e^{\alpha_p t})$$

nach Ausführung der Multiplication eine Summe von Gliedern von der Form

$$Ae^{(\mathfrak{a}\alpha_1+\mathfrak{b}\alpha_2+\ldots+\mathfrak{e}\alpha_p)t} \tag{3}$$

wo A ein Product von p Coëfficienten der Function ψ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{e}$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots q$ bezeichnen. Sucht man alle in diesen Gliedern vorkommenden, unter einander numerisch verschiedenen Ausdrücke $\mathfrak{a}\alpha_1+\mathfrak{b}\alpha_2+\quad+\mathfrak{e}\alpha_p$ auf und bezeichnet dieselben mit $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$, wo $\beta_0 = 0$ ist, so ergibt sich nach Zusammenziehung aller Glieder, welche gleiche Exponentialgrössen als Factor enthalten, ein Resultat von der Form

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} +$$

Dieser Ausdruck kann nicht identisch verschwinden. Im Gegenfalle müssten nämlich in der Entwicklung eines der Factoren $\psi(e^{\alpha_1 t}), \psi(e^{\alpha_2 t}), \ldots \psi(e^{\alpha_p t})$ nach Potenzen von t die Potenzen $t^0, t, \ldots t^q$ fehlen, woraus nach 3 in Widerspruch mit der Annahme

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_q = 0$$

folgen würde. Man kann daher

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t}$$

setzen, wo entweder C_0 nicht $= 0$ ist, wenn $n = 0$ oder aber $C_1, C_2, \ldots C_n$ alle von Null verschieden sind.

Die Entwicklung von $P(t)$ nach Potenzen von t hat die Gestalt

$$P(t) = h_0 + h_1 \frac{t}{1!} + h_2 \frac{t^2}{2!} +$$

wo

$$h_0, b_0 h_1, b_0^2 h_2, \ldots$$

ganze complexe Zahlen sind. Denn der Beitrag, welchen das Glied (3) zu dem Coëfficienten h_k von $\frac{t^k}{k!}$ liefert, ist

$$A(\mathfrak{a}\alpha_1+\mathfrak{b}\alpha_2+\ldots+\mathfrak{e}\alpha_p)^k$$

und h_k ist demnach eine ganze ganzzahlige Function k^{ten} Grades der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$. Diese Function ist symmetrisch in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, wie sofort erhellt, wenn man die p Ausdrücke

$$\psi(e^{\alpha_1 t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \ldots + qc_q)\alpha_1 t + \\ + (c_1 + 2^2 c_2 + \ldots + q^2 c_q)\alpha_1^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

$$\psi(e^{\alpha_2 t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \quad + qc_q)\alpha_2 t + \\ + (c_1 + 2^2 c_2 + \ldots + q^2 c_q)\alpha_2^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

$$\psi(e^{\alpha_p t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \ldots + qc_q)\alpha_p t + \\ + (c_1 + 2^2 c_2 + \quad + q^2 c_q)\alpha_q^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

in einander multiplicirt. Setzt man daher h_k in eine ganze Function der elementaren symmetrischen Functionen

$$-\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots \pm \frac{b_p}{b_0}$$

von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ um, so ist diese letztere vom Grade k und hat daher die Form $\frac{g}{b_0^k}$, wo g eine ganze complexe Zahl bezeichnet.

Die vorstehenden Schlüsse beziehen sich alle stillschweigend auf den Fall, wo $p > 1$ ist. Für $p = 1$ sind dieselben selbstverständlich, wenn man $P(t) = \psi(e^{\alpha_1 t})$ setzt.

Die elementaren symmetrischen Functionen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sind rationale complexe Zahlen, wofern $n > 0$ ist. Zieht man nämlich die Coëfficienten von t^0, t^k in $P(t)$ in Betracht, so ergibt sich

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = h_0 - C_0$$
$$C_1\beta_1^k + C_2\beta_2^k + \quad + C_n\beta_n^k = h_k$$

und daher, wenn

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots \pm \sigma_n = u$$

gesetzt wird,

$$h_n - \sigma_1 h_{n-1} + \sigma_2 h_{n-2} - \ldots \pm \sigma_n (h_0 - C_0) = 0$$
$$h_{n+1} - \sigma_1 h_n + \sigma_2 h_{n-1} - \ldots \pm \sigma_n h_1 = 0$$

$$h_{2n-1} - \sigma_1 h_{2n-2} + \sigma_2 h_{2n-3} - \ldots \pm \sigma_n h_{n-1} = 0$$
$$-u + x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots \pm \sigma_n = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, so folgt

$$\begin{vmatrix} h_n, & h_{n-1}, & \ldots h_0 - C_0 \\ h_{n+1}, & h_n, & \ldots h_1 \\ & & \\ h_{2n-1}, & h_{2n-2}, & \ldots h_{n-1} \\ -u+x^n, & x^{n-1}, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Identität gibt für u eine ganze rationalzahlige Function von x, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} h_{n-1}, & h_{n-2}, & \ldots h_0 - C_0 \\ h_n, & h_{n-1}, & \ldots h_1 \\ & & \\ h_{2n-2}, & h_{2n-3}, & \ldots h_{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist. Dieselbe ist aber

$$= \pm C_1 C_2 \ldots C_n (\beta_2 - \beta_1)^2 (\beta_3 - \beta_1)^2 \ldots (\beta_n - \beta_{n-1})^2$$

oder $= C_1$, je nachdem $n > 1$ oder $n = 1$ ist, und daher nicht $= 0$.

Es gibt also eine Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades

$$a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x = 0$$

mit ganzen complexen Coëfficienten, welche $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ zu Wurzeln hat.

Setzt man nun in der Identität (2)

$$f = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \quad + a_n x$$

und $x = \beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} G_\nu(0) &= G_\nu(\beta_0) \\ G_\nu(0) e^{\beta_1} &= G_\nu(\beta_1) + R_\nu(\beta_1) \\ & \\ G_\nu(0) e^{\beta_n} &= G_\nu(\beta_n) + R_\nu(\beta_n) \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn mit $C_0, C_1, \ldots C_n$ multiplicirt und addirt wird,

$$G_\nu(0) P(1) = \frac{1}{b_0^{mn+n}} H_\nu + \rho,$$

wo

$$H_\nu = b_0^{mn+n}(C_0 G_\nu(\beta_0) + C_1 G_\nu(\beta_1) + \ldots + C_n G_\nu(\beta_n))$$
$$\rho = C_1 R_\nu(\beta_1) + C_2 R_\nu(\beta_2) + \ldots + C_n R_\nu(\beta_n).$$

H_ν ist eine ganze complexe Zahl. Ist nämlich $G_\nu(x)$ nach Potenzen von x entwickelt,

$$= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots + l_{mn+n} x^{mn+n},$$

so wird

$$\frac{1}{b_0^{mn+n}} H_\nu = l_0(C_0 + C_1 + \ldots + C_n) + l_1(C_0\beta_0 + C_1\beta_1 + \ldots + C_n\beta_n) + \ldots,$$

also

$$H_\nu = l_0 b_0^{mn+n} . h_0 + l_1 b_0^{mn+n-1} . b_0 h_1 + \quad + l_{mn+n} . b_0^{mn+n} h_{mn+n}.$$

Wählt man für m einen bestimmten Werth von der Art, dass $|\rho b_0^{mn+n}| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so ist eine der Zahlen $H_0, H_1 \ldots H_n$, etwa H_ν, von Null verschieden, weil $P(t)$ nicht identisch Null ist, und man hat

$$|H_\nu| \geqq 1,$$

also

$$|G_\nu(0)\, P(1)| > \frac{1}{2\,|b_0|^{mn+n}}$$

$$|P(1)| > \frac{1}{2\,|b_0|^{mn+n}\,|G_\nu(0)|}.$$

Es sei noch

$$\psi(z) = (z-\gamma)\,\psi_1(z),$$

λ irgend ein bestimmter Werth des natürlichen Logarithmus von γ, σ eine Grösse, welche keiner der absoluten Beträge von $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ übersteigt, und

$$|\psi_1(e^{\alpha_1})|\,|\psi_1(e^{\alpha_2})| \ldots |\psi_1(e^{\alpha_p})| \leqq K.$$

Man hat dann

$$P(1) = (e^{\alpha_1} - e^{\lambda})(e^{\alpha_2} - e^{\lambda}) \ldots (e^{\alpha_p} - e^{\lambda})\,\psi_1(e^{\alpha_1})\,\psi_1(e^{\alpha_2}) \ldots \psi_1(e^{\alpha_p})$$

$$|e^{\alpha_i} - e^{\lambda}| = |\alpha_i - \lambda| \left| 1 + \frac{\alpha_i + \lambda}{2} + \frac{\alpha_i^2 + \alpha_i\lambda + \lambda^2}{3!} + \quad \right|$$
$$\leqq |\alpha_i - \lambda|\, e^{\sigma}$$

und daher

$$|P(1)| \leqq \left|\frac{\varphi(\lambda)}{b_0}\right| e^{p\gamma}$$

Hieraus folgt

$$|\varphi(\log\gamma)| > \frac{e^{-p\gamma}}{2K|b_0^{mn+n-1}||G_\gamma(0)|}.$$

Es gibt daher keine ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten, welche für $\log\gamma$ verschwindet.

Nimmt man insbesondere

$$\psi(z) = 1+z \qquad \log(-1) = i\pi \qquad \varphi(z) = F(-iz),$$

wo F irgend eine ganze ganzzahlige Function bedeutet, so wird

$$\psi_1(z) = 1 \qquad K = 1$$

und daher

$$F(\pi) > \frac{e^{-p\gamma}}{2|b_0|^{mn+n-1}|G_\gamma(0)|}.$$

Ist x eine reelle algebraische Zahl,

$$\psi(z) = 0$$

die ganzzahlige Gleichung, welcher $\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}}$, beziehungsweise $\sqrt{1-x^2}+ix$ genügt, $F(z)$ eine beliebige ganze ganzzahlige Function und setzt man $\varphi(z) = F(-iz)$, so kann man ebenso Grenzen angeben, welche

$$F(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x), \qquad F(\arcsin x)$$

übersteigen müssen. Es genügt zu diesem Ende,

$$i \operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \log\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}} \qquad i\arcsin x = \log(\sqrt{1-x^2}+ix)$$

zu setzen.

7

Es seien

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \quad + b_p$$

eine gegebene ganzzahlige Gleichung p^{ten} Grades,

ihre Wurzeln,
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$$
$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$$

numerisch verschiedene ganzzahlige linear-homogene Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und

$$\psi(t) = A_1 e^{\xi_1 t} + A_2 e^{\xi_2 t} + \quad + A_q e^{\xi_q t}$$

ein Ausdruck, in welchem $A_1, A_2, \ldots A_q$ von Null verschiedene ganze Zahlen bezeichnen. Man bezeichne die nicht kleinere der beiden Zahlen $qp!, 2q^{p!}-1$ mit μ, den Inbegriff aller die Potenzen $t^0, t, \ldots t^\mu$ enthaltenden Glieder in der Entwicklung von $\psi(t)$ nach Potenzen von t mit ω und mit u eine Unbestimmte. Das über alle möglichen Permutationen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ zu erstreckende Product $\Pi(u-\omega)$ ist eine ganze symmetrische Function dieser Wurzeln und hat demnach ganze rationalzahlige Functionen von t als Coëfficienten bei den einzelnen Potenzen von u. Ist U derjenige irreductible Factor dieses Productes, welcher für $u = \omega$ verschwindet, so geht derselbe aus der Multiplication von $u-\omega$ mit ähnlichen Ausdrücken $u-\omega_1, u-\omega_2, \ldots$ hervor, welche aus $u-\omega$ durch gewisse Permutationen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ entstehen. Es seien $\psi_1, \psi_2,$ die Resultate, welche aus $\psi(t)$ durch eben diese nämlichen Permutationen hervorgehen, und man setze

$$P(t) = \psi(t)\psi_1(t)\psi_2(t)\ldots$$

$P(t)$ ist eine Summe von Gliedern von der Form $Ae^{\eta t}$, wo A eine ganze Zahl und η einen ganzzahligen linear-homogenen Ausdruck der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ bezeichnen. Sucht man alle numerisch verschiedenen Werthe von η auf und zieht alle Glieder zusammen, welche dieselbe Exponentialgrösse als Factor enthalten, so kann der resultirende Ausdruck nicht identisch verschwinden. Denn im Gegenfalle müsste das Product $\omega\omega_1\omega_2\ldots$, welches mit $P(t)$ bis zu den Gliedern mit t^μ einschliesslich übereinstimmt, durch $t^{\mu+1}$ und daher mindestens einer der Factoren $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ durch t^{q+1} theilbar sein, da die Anzahl dieser Factoren $\leqq p!$ ist. Ein solcher Factor hat aber die Gestalt

$$A_1 e^{\eta_1 t} + A_2 e^{\eta_2 t} + \ldots + A_q e^{\eta_q t}$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_q$ aus $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ durch eine Permutation der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ hervorgehen, und muss nach 3 identisch verschwinden, wenn er durch t^{q+1} theilbar ist. Es wäre also $\omega\omega_1\omega_2 \ldots = 0$ und die irreductible Function U müsste sich auf u reduciren. Dann wäre aber $\omega = 0$ und nach 3 in Widerspruch mit der Annahme $\psi(t) = 0$.

Hienach ist das Product $P(t)$ in der Gestalt

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t}$$

darstellbar, wo $\beta_0 = 0$ und entweder C_0 nicht $= 0$ ist, wenn $n = 0$, oder aber $C_1, C_2, \ldots C_n$ alle von Null verschieden und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ numerisch verschiedene ganzzahlige linear-homogene Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sind, wenn $n > 0$.

Entwickelt man $P(t)$ nach Potenzen von t und setzt

$$P(t) = h_0 + h_1 \frac{t}{1!} + h_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

so sind $h_0, b_0 h_1, b_0^2 h_2, \ldots$ ganze Zahlen. Denn zunächst erhellt, dass $h_0, h_1, \ldots h_\mu$ rationale Zahlen sind, da $P(t)$ mit $\omega\omega_1\omega_2 \ldots$ bis zu den Gliedern mit der Potenz t^μ übereinstimmt. Man beweist dann ganz wie in 6, dass die elementaren symmetrischen Functionen von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ in dem Falle $n > 0$ rationale Zahlen sind und dass man demzufolge eine ganzzahlige Gleichung vom Grade $n+1$

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z = 0$$

aufstellen kann, welche $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ zu Wurzeln hat. Die Rationalität von $h_{\mu+1}, h_{\mu+2}, \ldots$ folgt dann aus der Formel

$$a_0 h_s + a_1 h_{s-1} + \ldots + a_n h_{s-n} = 0,$$

welche von $s = n+1$ an gilt. Dass aber $b_0^k h_k$ ganzzahlig ist, folgt daraus, dass

$$h_k = C_0 \beta_0^k + C_1 \beta_1^k + \ldots + C_n \beta_n^k$$

eine ganze ganzzahlige Function k^{ten} Grades von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, also $b_0^k h_k$ eine ebensolche Function der Grössen $b_0\alpha_1, b_0\alpha_2, \ldots b_0\alpha_p$ ist, welche der Gleichung

$$z^p + b_1 z^{p-1} + b_0 b_2 z^{p-2} + \ldots + b_0^{p-1} b_p = 0$$

genügen, also algebraisch ganz sind.

Setzt man nun in der Identität (2)

$$f = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x$$
$$x = \beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n,$$

so ergibt sich

$$G_\nu(0) = G_\nu(\beta_0)$$
$$G_\nu(0)\, e^{\beta_0} = G_\nu(\beta_1) + R_\nu(\beta_1)$$
$$G_\nu(0)\, e^{\beta_n} = G_\nu(\beta_n) + R_\nu(\beta_n)$$

und hieraus

$$G_\nu(0)\, P(1) = \frac{H_\nu}{b_0^{mn+n}} + \rho,$$

wo

$$\frac{1}{b_0^{mn+n}} H_\nu = C_0 G_\nu(\beta_0) + C_1 G_\nu(\beta_1) + \ldots + C_n G_\nu(\beta_n)$$
$$\rho = C_1 R_\nu(\beta_1) + C_2 R_\nu(\beta_2) + \ldots + C_n R_\nu(\beta_n).$$

H_ν ist eine ganze Zahl, da

$$H_\nu = l_0 b_0^{mn+n} . h_0 + l_1 b_0^{mn+n-1} . b_0 h_1 + l_2 b_0^{mn+n-2} . b_0^2 h_2 + \ldots$$

wird, wenn man

$$G_\nu(x) = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots$$

setzt.

Wählt man m wieder so, dass $|\rho b_0^{mn+n}| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so ist eine der Zahlen $H_0, H_1, \ldots H_n$, etwa H_ν, von Null verschieden und man hat

$$|G_\nu(0) P(1)| > \frac{1}{2 |b_0^{mn+n}|}$$

$$|P(1)| > \frac{1}{2 |G_\nu(0)| |b_0^{mn+n}|}$$

und daher

$$|\psi(1)| > \frac{1}{2K |G_\nu(0)| |b_0|^{mn+n}},$$

wenn

$$|\psi_1(1)\psi_2(1)\ldots| \leqq K.$$

Es kann also $\psi(1)$ nicht Null sein.

Sind in $\psi(t)$ die Coëfficienten $A_1, A_2, \ldots A_q$ nicht gewöhnliche ganze, sondern ganze algebraische Zahlen, so bilde man mit Hilfe von q Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_q$ den Ausdruck

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_q u_q$$

und die irreductible rationalzahlige Gleichung $\Gamma = 0$, welcher derselbe genügt. Ist $\pm Q(u_1, u_2, \ldots u_q)$ das constante Glied dieser Gleichung, so hat man

$$Q = (A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_q u_q)(A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \ldots) . \\ .(A''_1 u_1 + A'' u_2 + \ldots)\ldots,$$

wo $A'_1, A'_2, \ldots A''_1, A''_2, \ldots$ ebenfalls ganze algebraische Zahlen sind. Setzt man nun

$$Q(e^{\xi_1 t}, e^{\xi_2 t}, \ldots e^{\xi_q t}) = \psi_0(t),$$

so hat $\psi_0(t)$ die Gestalt

$$B_1 e^{\eta_1 t} + B_2 e^{\eta_2 t} + \ldots,$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots$ numerisch verschiedene ganzzahlige linear-homogene Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und $B_1, B_2, \ldots$ ganze Zahlen bezeichnen. Die Coëfficienten $B_1, B_2, \ldots$ können nicht alle Null sein, da sonst nach 3 auch einer der Ausdrücke

$$A'_1 e^{\xi_1 t} + A'_2 e^{\xi_2 t} + \ldots$$
$$A''_1 e^{\xi_1 t} + A''_2 e^{\xi_2 t} + \ldots$$

und daher auch Q identisch verschwände, was der Irreductibilität von Γ widerspricht.

Da nun $|\psi_0(1)|$ hienach eine angebbare Grenze übersteigen muss, so gilt dasselbe von $|\psi(1)|$.