Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen

Dr. **R. Daublebsky von Sterneck** in Wien.

Die folgende Arbeit behandelt die Frage, unter welchen nothwendigen und hinreichenden Bedingungen gewisse additive Darstellungsanzahlen der Zahl n ungerade ausfallen. Dies wird mit Zugrundelegung einer äusserst einfachen Recursionsformel und mit Benützung bekannter Sätze, namentlich des Satzes von Legendre, dass die Anzahl der geraden Zerlegungen in verschiedene Summanden gleich jener der ungeraden ist, sobald n keine Pentagonalzahl ist, und eines allgemeineren, von Herrn K. Th. Vahlen im 112. Bande des Crelle'schen Journals mitgetheilten Satzes durchgeführt. Hiebei zeigt sich ein Zusammenhang mit der Anzahl der Darstellungen der Zahl $24n+1$ durch gewisse quadratische Formen, welch letztere wieder von der Primzahlzerlegung der Zahl $24n+1$ abhängig ist. In dieser Hinsicht sind die im Folgenden mitgetheilten Sätze zugleich als arithmetische additive Kriterien zu betrachten, indem sie einen Schluss aus den möglichen additiven Erzeugungen der Zahl n auf einen gewissen Typus der Primzahlzerlegung von $24n+1$ gestatten.

1.

Es seien bestimmte ganzzahlige positive Elemente $a_1, a_2 \ldots$ in endlicher oder unendlicher Anzahl vorgegeben. Aus denselben soll die ganze positive Zahl n additiv erzeugt werden. Hiebei soll ein und dasselbe Element a_i auch mehrmals verwendet werden können, doch soll für jedes Element a_i eine obere Grenze k_i festgesetzt sein, derart, dass das Element a_i nicht öfter als k_i-mal bei einer und derselben Darstellung der Zahl n verwendet werden darf. Es handelt sich also um alle Darstellungen der Zahl n in der Form

$$n = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots$$

$$0 \leqq \mu_1 \leqq k_1, \qquad 0 \leqq \mu_2 \leqq k_2, \ldots$$

Es werde mit $[n]$ die Anzahl aller möglichen derartigen Darstellungen bezeichnet; mit $[n]_{a_i}$ die Anzahl jener Darstellungen von n, in denen das Element a_i mindestens einmal zur Verwendung kommt; mit $[n]_{(a_i)}$ die Anzahl jener Darstellungen, in denen das Element a_i nicht zur Verwendung gelangt.

Man sieht dann folgende Recursionsformel leicht ein:

$$[n]_{a_i} = [n-a_i]-[n-(k_i+1)a_i]_{(a_i)};$$

ferner ist selbstverständlich

$$[n-(k_i+1)a_i]_{(a_i)} = [n-(k_i+1)a_i]-[n-(k_i+1)a_i]_{a_i};$$

also, eingesetzt, und dasselbe Verfahren öfters wiederholt:

$$[n]_{a_i} = [n-a_i]-[n-(k_i+1)a_i]+[n-(k_i+2)a_i]$$
$$-[n-2(k_i+1)a_i]+[n-(2(k_i+1)+1)a_i]-[n-3(k_i+1)a_i]+\ldots$$

Setzt man zur Abkürzung

$$k_i+1 = k_i',$$

so wird

$$[n]_{a_i} = \sum_{\lambda}[n-(\lambda k_i'+1)a_i]-\sum_{\lambda}[n-\lambda k_i' a_i]$$

und es ist die Summation in der ersten Summe von $\lambda = 0$, in der zweiten von $\lambda = 1$ an so weit fortzusetzen, so lange die in der eckigen Klammer stehende Zahl nicht negativ ist. Das Symbol $[0]$ ist gleich 1 zu setzen.

Wir wollen nun aus sämmtlichen Darstellungselementen einen bestimmten Inbegriff auswählen, bezüglich jedes einzelnen desselben die letzte Summenformel aufgestellt denken und summiren. Dann erhalten wir links offenbar jede Darstellung von n so oft gezählt, so viele verschiedene Elemente dieses

Inbegriffs in ihr zur Verwendung gelangen, welche Anzahl mit $\{n\}$ bezeichnet werde, rechts aber einen Ausdruck der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)[n-\lambda],$$

wobei, wie leicht zu sehen ist, die Function $\zeta(\lambda)$ den Überschuss der zu dem Darstellungselement a_i complementären Theiler von λ, welche die Form $\rho k'_i+1$ haben, über jene der Form $\rho k'_i$ bedeutet, über alle Elemente a_i des betreffenden Inbegriffs summirt. Die so erhaltene Formel

$$\{n\} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)[n-\lambda] \tag{1}$$

wird uns als Grundlage für das Folgende dienen.

2.

Zunächst sollen einige additiv gebildete Kriterien für Primzahlen abgeleitet werden. Dieselben sollen uns in den Stand setzen, wenn die s ersten Primzahlen als bekannt angenommen werden, jede einzelne der auf die s^{te} Primzahl folgenden ganzen Zahlen daraufhin zu prüfen, ob sie die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Zu diesem Zwecke wollen wir obige Voraussetzungen etwas specialisiren; und zwar soll zunächst jedes Element nur einmal zur Verwendung kommen können, also alle Zahlen $k_i = 1$, respective die Zahlen $k'_i = 2$ sein. Ferner soll der herausgegriffene Inbegriff von Elementen mit der Gesammtheit der Elemente identisch sein, so dass also $\{n\}$ die Anzahl bedeutet, die man erhält, wenn man jede Darstellung von n so oft zählt, so viele Darstellungselemente darin auftreten, $\zeta(\lambda)$ aber den Überschuss der Anzahl der ungeraden über die der geraden Theiler von λ, welche zu einem Darstellungselement complementär sind.

Von den folgenden Primzahlkriterien ist das erste von Herrn K. Zsigmondy[1] bereits auf anderem Wege abgeleitet worden.

[1] Monatshefte für Math. und Phys. Jahrg., 1894, S. 127

1. Wählt man die Einheit und die als Producte aufgefassten Combinationen der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, so ist die Anzahl der additiven Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$ durch eine beliebige Anzahl verschiedener Elemente eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem n gleich der $s+1$ten Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Ist nämlich λ kleiner als die $s+1$te Primzahl und gehen etwa r der Primzahlen $p_1, \ldots p_s$ darin auf, so gibt es 2^r zu Darstellungselementen complementäre Theiler von λ; also ist in diesem Falle auch der Überschuss $\zeta(\lambda)$ eine gerade Zahl; $\zeta(1) = 1$; also nimmt die Formel (1) die Gestalt an:

$$\{n\} + [n-1] \equiv \zeta(n) \pmod{2}.$$

Da $\zeta(p_{s+1}) = 1$ ist, weil p_{s+1} nur einen, zum Darstellungselemente 1 complementären Theiler besitzt, folgt

$$\{n\} + [n-1] \equiv 0 \pmod{2}, \text{ wenn } n < p_{s+1},$$
$$\{n\} + [n-1] \equiv 1 \pmod{2}, \text{ wenn } n = p_{s+1}.$$

In $\{n\}$ ist jede Darstellung so oft gezählt, so viele Darstellungselemente in ihr vorkommen; Modulo 2 ist es also die Anzahl der aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bestehenden Darstellungen.

Aus diesem Kriterium kann man einen einfachen Beweis für die Thatsache ableiten, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Nehmen wir nämlich an, es sei mit den Primzahlen $p_1 \ldots p_s$ die Gesammtheit aller Primzahlen bereits erschöpft, so könnte es keine Zahl $> p_s$ geben, für welche das Kriterium zutrifft. Es ist aber leicht zu sehen, dass die Zahl

$$(p_1+1)(p_2+1) \ldots (p_s+1)-2$$

die Bedingungen des Kriteriums erfüllt.

Diese Zahl lässt sich nämlich nur auf eine Art durch obige Elemente darstellen, nämlich als Summe aller Elemente mit Weglassung des Elementes 2. Hiebei werden 2^s-1, also eine ungerade Anzahl Elemente verwendet.

Die Zahl

$$(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_s+1)-3$$

lässt sich auf zwei Arten durch dieselben Elemente additiv erzeugen, indem einmal die Elemente 1 und 2, das anderemal das Element 3 aus der Summe aller Elemente weggelassen werden. Also erhält man als Summe die Anzahl 3, in der That eine ungerade Zahl, und das Kriterium trifft somit zu. Es wäre also $(p_1+1)\ldots(p_s+1)-2$ eine neue Primzahl.

2. Nimmt man die Combinationen aus den s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen (mit Ausschluss der Einheit), so ist die Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$ durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente, weiters vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-2$ durch eine beliebige Anzahl von Elementen einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

$\zeta(\lambda)$ ist nämlich in diesem Falle immer ungerade, wenn $\lambda < p_{s+1}$ ist, und $=0$, wenn $\lambda = p_{s+1}$ ist, ebenso $=0$ für $\lambda = 1$ Aus (1) ergibt sich daher

$$\{n\}+\zeta(n) \equiv [n-2]+[n-3]+\ldots+[1] \pmod{2}$$

und analog, weil $\zeta(n-1) \equiv 1 \pmod{2}$ ist:

$$\{n-1\}+1 \equiv [n-3]+\ldots+[1] \pmod{2}$$

oder addirt

$$\zeta(n)+1+\{n\}+\{n-1\} \equiv [n-2] \pmod{2};$$

also

$$\begin{aligned}\{n\}+\{n-1\}+[n-2] &\equiv 0 \pmod{2}, \text{ wenn } n < p_{s+1},\\ &\equiv 1 \pmod{2}, \text{ wenn } n = p_{s+1},\end{aligned}$$

womit der obige Satz bewiesen ist.

3. Nimmt man die Combinationen aus den s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einmal in einer und derselben Darstellung verwendet werden soll, die Einheit aber als Element mit beliebig ofter Verwendbarkeit in einer und derselben Darstellung, so ist die Anzahl der

Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine gerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Für das Element 1 wird nämlich $k_1 = \infty$, $k'_1 = \infty$, also kann der zum Element 1 complementäre Theiler, welcher die Form $\rho k'_1 + 1$ oder $\rho k'_1$ haben muss, nur gleich 1 sein. Er tritt folglich nur bei der Zahl 1 selbst auf; also ist $\zeta(1) = 1$, $\zeta(\lambda) \equiv 1$ (mod. 2) für $\lambda < p_{s+1}$, $\zeta(p_{s+1}) = 0$.

Hieraus ergibt sich analog dem vorhergehenden Falle

$$\begin{aligned} \{n\} + \{n-1\} + [n-1] &\equiv 0 \text{ (mod. 2), wenn } n < p_{s+1}, \\ &\equiv 1 \text{ (mod. 2), wenn } n = p_{s+1}. \end{aligned}$$

$\{n-1\} + [n-1]$ ist aber Modulo 2 der Anzahl jener Darstellungen von $n-1$ congruent, welche eine gerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten (wobei das vielleicht mehrfach verwendete Element 1 natürlich nur als ein Element zu zählen ist); hieraus folgt obiger Satz.

4. Nimmt man die Einheit und die Combinationen aus einer geraden Anzahl der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einmal verwendet werden darf, dann noch die sämmtlichen Potenzen der s ersten Primzahlen zu Elementen, deren jedes beliebig oft in einer und derselben Darstellung zur Verwendung kommen kann, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$ einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Der zu einer der Primzahlpotenzen, welche beliebig oft vorkommen können, complementäre Theiler von λ muss nämlich wieder gleich 1 sein, wenn er in $\zeta(\lambda)$ mitgezählt werden soll, also muss in diesem Falle λ selbst eine Primzahlpotenz sein.

Ist $\lambda = p_1^{\pi_1} \ldots p_r^{\pi_r}$, so gibt es $\binom{r}{0} + \binom{r}{2} + \ldots = 2^{r-1}$ zu den geraden Primzahlcombinationen complementäre Theiler.

Ist nun $r > 1$, so ist $\zeta(\lambda)$ gerade; ist $r = 1$, so kommt der zur Primzahlpotenz complementäre Theiler 1 in Betracht und $\zeta(\lambda)$ wird wieder gerade; man erhält daher

$$\{n\} + \zeta(n) \equiv [n-1] \pmod{2},$$

was obigen Satz ausdrückt.

Man kann natürlich auf Grund der Formel (1) noch sehr zahlreiche analoge Kriterien aufstellen; es seien etwa noch die folgenden hier angeführt:

5. Wählt man die Combinationen aus einer geraden Anzahl der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, welche nur einfach verwendet werden dürfen, die Einheit und sämmtliche Potenzen der s ersten Primzahlen aber zu Elementen, welche beliebig oft verwendet werden können, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine gerade Anzahl verschiedener Darstellungselemente enthalten, eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

6. Kommt unter den eben angenommenen Elementen die Einheit gar nicht vor, so wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, weiters vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-2$, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

7 Wählt man die Einheit und die Combinationen aus den Quadraten der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einmal verwendet werden darf, die Combinationen aus den Primzahlen selbst aber zu Darstellungselementen, deren jedes beliebig oft verwendet werden kann, so wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

8. Schliesst man aus den Darstellungselementen in (7) die Einheit aus, so wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Darstellungselemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, weiters vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-2$ einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

9. Unter denselben Voraussetzungen wie in (7), aber bei beliebig ofter Verwendbarkeit der Einheit wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine gerade Anzahl von verschiedenen Elementen enthalten, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

10. Wählt man allgemein die Einheit und die Combinationen aus den σ^{ten} Potenzen der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einfach zur Verwendung gelangen darf, ferner alle jene aus den s ersten Primzahlen zusammengesetzten Zahlen, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, zu Darstellungselementen, deren jedes beliebig oft verwendet werden kann, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$, eine ungerade, respective gerade Zahl, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

11. Nimmt man die Einheit und die Combinationen aus den $s-1$ Primzahlen, die man erhält, wenn man aus den s ersten Primzahlen eine beliebige weglässt, zu Darstellungselementen, deren jedes nur einfach verwendet werden darf, ferner die sämmtlichen Potenzen dieser weggelassenen Primzahl zu Elementen mit beliebig ofter Verwendbarkeit, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Darstellungselemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$ einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

3.

Wir betrachten jetzt die Zerlegungen der ganzen Zahl n in lauter verschiedene Summanden. Ferner sei irgend ein Inbegriff von bestimmten Elementen a definirt. Den allgemeinen Überlegungen des 1. Abschnittes entsprechend ist dann $\zeta(\lambda)$ der Überschuss der Anzahl der ungeraden über die geraden Theiler von λ, deren complementäre Theiler Elemente a sind; Modulo 2 wird also $\zeta(\lambda)$ der Gesammtzahl der zu Elementen a complementären Theiler von λ congruent. $\{n\}$ wird mod. 2 der Anzahl jener Darstellungen von n congruent, in welchen eine ungerade Anzahl von Elementen a vorkommt; $[n-\lambda]$ wird nach dem Satze von Legendre dann und nur dann ungerade sein. wenn $n-\lambda$ eine Pentagonalzahl ist.

Als Elemente a wollen wir jetzt sämmtliche durch die ganze Zahl L theilbaren ganzen Zahlen wählen. Dann wird $\zeta(\lambda)$ nur für $\lambda = Lz^2$ ungerade ausfallen, wo z^2 ein beliebiges Quadrat ist. Wir erhalten also in unserer Formel

$$\{n\} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)[n-\lambda]$$

rechter Hand so oft einen ungeraden Summanden, soviele ganzzahlige Lösungen die Gleichung

$$n = Lz^2 + \frac{3x^2 \pm x}{2} \qquad z > 0, \quad x \geqq 0,$$

respective

$$24n+1 = 24Lz^2 + (6x \pm 1)^2, \qquad z > 0, \quad x \geqq 0,$$

oder

$$24n+1 = 24Lz^2 + y^2; \quad z > 0, \quad y > 0$$

zulässt.

Ist L nicht durch 4 theilbar, so kann man noch die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 6Lz^2 + y^2; \quad z > 0, \quad y > 0$$

verwenden, da $y^2 \equiv 1$ (mod. 8) ist und daher das z der letzteren

Gleichung nothwendigerweise gerade sein muss, was auf die frühere Form zurückführt.

Die Zahl $24n+1$ soll also durch die quadratische Form $(6L, 0, 1)$, d. i. durch eine der reducirten Formen der Determinante $-6L$ dargestellt werden und es soll entschieden werden, wann die Anzahl aller möglichen Darstellungen durch diese Form ungerade ist. Trifft es sich nun bei specieller Wahl des L, dass überhaupt keine andere reducirte Form der Determinante $-6L$ Zahlen der Form $24n+1$ darzustellen im Stande ist, so handelt es sich um die Darstellung der Zahl $24n+1$ durch die Gesammtheit aller reducirten Formen und bietet die Bestimmung dieser Anzahl daher gar keine Schwierigkeiten. Dieser vereinfachende Umstand trifft bei den hier durchgeführten Fällen $L = 1, 2, 3, 5, 7$ in der That zu.

L = 1.

Hier wird der Inbegriff der Elemente a mit der Gesammtheit aller ganzen Zahlen identisch. Die linke Seite der Gleichung (1) bedeutet jetzt mod. 2 die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden.

Für die Determinante -6 gibt es zwei reducirte Formen $(6, 0, 1)$ und $(3, 0, 2)$, von welchen nur die erstere, wie man sofort sieht, Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen, bei welchen beide Unbestimmte positive Werthe haben, ist bekanntlich $2^{\mu-1}$, wenn in $24n+1$ μ Primzahlen aufgehen, für welche -6 quadratischer Rest ist, und keine, für welche es Nichtrest ist. Da wir auch die uneigentlichen Darstellungen haben wollen, müssen wir $24n+1$ successive durch $\frac{24n+1}{d^2}$ ersetzen, wo d^2 alle quadratischen Theiler von $24n+1$ zu durchlaufen hat, und die erhaltenen Anzahlen summiren.

Vor Allem erkennt man, dass wir dabei in Summe gewiss eine gerade Zahl erhalten, wenn in $24n+1$ mehr als eine Primzahl in ungerader Potenz aufgeht. Denn dieser Umstand bleibt auch für alle Zahlen $\frac{24n+1}{d^2}$ bestehen. Die Anzahl der Darstellungen durch die Form (6, 0, 1) ist daher entweder $= 0$ (wenn sich eine Primzahl in $\frac{24n+1}{d^2}$ findet, für welche -6 Nichtrest ist) oder jedenfalls gerade, weil $\mu > 1$ ist. Also wird auch die Summe aller dieser Zahlen gerade ausfallen.

Ist ein und nur ein Exponent in der Primzahlzerlegung von $24n+1$ ungerade, so gibt es in der That Zahlen $\frac{24n+1}{d^2}$ für welche $\mu = 1$ ist. Ist $p_\lambda^{\pi_\lambda}$ die ungerade Primzahlpotenz, so sind es offenbar die Zahlen $p_\lambda, p_\lambda^3, \ldots p_\lambda^{\pi_\lambda}$, für welche $\mu = 1$ ist. Ist also -6 quadratischer Rest von p_λ und hat π_λ die Form $4t+1$, so wird die Gesammtzahl der gesuchten Darstellungen ungerade ausfallen.[1]

Ist endlich kein Exponent ungerade, also $24n+1$ einer Quadratzahl gleich, so gibt es, wenn $p_1^{\pi_1} \ldots p_\lambda^{\pi_\lambda}, q_1^{\sigma_1} \ldots q_\tau^{\sigma_\tau}$ die Primzahlzerlegung von $24n+1$ darstellt, wo für $p_1, \ldots p_\lambda$ -6 quadratischer Rest, für $q_1, \ldots q_\tau$ aber Nichtrest ist, folgende Zahlen $\frac{24n+1}{d^2}$, für welche $\mu = 1$ ist:

$$\begin{array}{l} p_1^2, p_1^4, \ldots p_1^{\pi_1}, \\ p_2^2, p_2^4, \ldots p_2^{\pi_2}, \\ \quad\ldots \\ p_\lambda^2, p_\lambda^4, \ldots p_\lambda^{\pi_\lambda}. \end{array}$$

Ist also die Summe $\frac{\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_\lambda}{2}$ eine ungerade Zahl, so wird die Gesammtzahl unserer Darstellungen ungerade ausfallen.

In Verbindung mit der früheren Bemerkung können wir also folgenden Satz aussprechen:

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden ist dann und nur dann ungerade, wenn bei

[1] Die Bedingung, dass -6 quadratischer Rest von p_λ ist, ist hier von selbst erfüllt, denn da $24n+1$ das Product aus einer Quadratzahl und p_λ ist, muss, wie man sofort sieht, sowohl das Quadrat, als auch p_λ die Form $24t+1$ haben.

der Zerlegung von $24n+1$ in seine Primfactoren entweder ein einziger Exponent ungerade ist und die Form $4t+1$ hat, oder gar kein Exponent ungerade, also $24n+1$ einem Quadrate gleich, dabei aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, welche die Form $24k+1, 5, 7, 11$[1] haben, eine ungerade Zahl ist.

Die Anzahl der Darstellungen von n durch eine gerade Anzahl verschiedener Summanden ist nach dem Legendre'schen Satze jener durch eine ungerade Anzahl gleich, nur wenn n eine Pentagonalzahl ist, übertrifft die eine dieser beiden Anzahlen die andere um eine Einheit. Durch den vorstehenden Satz ist uns also die Gesammtzahl der Zerfällungen der Zahl n in lauter verschiedene Summanden Modulo 4 bekannt.[2]

Für diese ist nämlich -6 quadratischer Rest.

Nebenbei sei hier ein Zusammenhang der eben betrachteten Anzahl mit einer anderen Darstellungsanzahl angemerkt. Wenn die Anzahl der in n aufgehenden verschiedenen Primzahlen r beträgt, so gibt es 2^r Theiler von n, welche die Eigenschaft haben, durch keine Quadratzahl, grösser als 1, theilbar zu sein. Die Anzahl sämmtlicher Theiler, vermindert um 2^r, stellt also die Anzahl der durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbaren Theiler von n dar; diese Anzahl ist offenbar im Allgemeinen eine gerade Zahl, nur wenn n eine Quadratzahl ist, ist sie ungerade. Doch macht hievon die Zahl 1 eine Ausnahme, welche, obwohl Quadratzahl, keinen, also eine gerade Anzahl Theiler besitzt, die durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind.

Zählen wir also in der linken Seite unserer Gleichung

$$\{n\} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)\,[n-\lambda]$$

jede Darstellung so oft, so viele Elemente darin durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, so werden wir rechts mod. 2 die Anzahl der Darstellungen von n in der Form $n = z^2+\tilde{\omega}$ erhalten, wobei $\tilde{\omega}$ irgend eine Pentagonalzahl bedeutet. Diese Darstellungsanzahl ist aber mit jener durch die quadratische Form (6, 0, 1) identisch, also mod. 2 der eben betrachteten Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden congruent. Nur ist hier die Annahme $z = 1$ ausgeschlossen, also der Fall, in welchem n einer um 1 vermehrten Pentagonalzahl gleich ist.

Wir haben somit den Satz:

Die Anzahl der additiven Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene ganze Zahlen, unter denen eine ungerade

$L = 2.$

Hier handelt es sich um die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 12z^2+y^2; \quad z > 0, \quad y > 0.$$

Statt dieser können wir die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 3z^2+y^2; \quad z > 0, \quad y > 0,$$

verwenden, da z als Lösung der zweiten Gleichung nothwendigerweise gerade sein muss.

Hier ist die Lösung unserer Aufgabe also sehr einfach. Für die Determinante -3 gibt es zwei reducirte Formen, (3, 0, 1) und (2, 1, 2), von denen nur die erstere ungerade Zahlen darstellen kann. Ganz analog dem früheren Falle gelangen wir also zu folgendem Satze:

Die Anzahl jener Darstellungen von n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl gerader Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn entweder bei der Primzahlzerlegung von $24n+1$ ein einziger ungerader Exponent auftritt und dieser die Form $4t+1$ hat, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, also $24n+1$ ein Quadrat ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen von der Form $3h+1$ eine ungerade Zahl ist.

Anzahl durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, ist mod. 2 der Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden congruent, falls n nicht einer um 1 vermehrten Pentagonalzahl gleich ist. In letzterem Falle ist die um 1 vermehrte erstere Anzahl der letzteren congruent.

Ferner liefert obige Formel unmittelbar folgenden Satz:

Die Anzahl der Darstellungen von n durch lauter verschiedene Elemente, unter welchen eine ungerade Anzahl durch kein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, ist mod. 2 der Anzahl der Darstellungen von $n-1$ durch lauter verschiedene Elemente congruent.

L = 3.

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 18z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0$$

soll bestimmt werden, statt welcher man wieder die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 2z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0$$

verwenden kann, da das z der letzteren Gleichung offenbar durch 3 theilbar sein muss.

Da für die Determinante —2 nur die reducirte Form (2, 0, 1) existirt, findet man folgenden Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl durch 3 theilbarer Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn bei der Primzahlzerlegung von $24n+1$ entweder nur ein ungerader Exponent vorkommt, dieser überdies die Form $4t+1$ hat, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, also $24n+1$ ein Quadrat ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Formen $8h+1$ und $8h+3$ eine ungerade Zahl ist.

L = 5.

Hier muss die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 30z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0$$

bestimmt werden.

Für die Determinante —30 gibt es die vier reducirten Formen: (30, 0, 1), (15, 0, 2), (10, 0, 3), (6, 0, 5), von welchen nur die erste Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Somit werden wir auch hier einen analogen Satz erhalten. Aber es ist störend, dass in $24n+1$ jetzt auch die Primzahl 5 in irgend einer Potenz aufgehen kann und dann $24n+1$ nicht mehr zur Determinante theilerfremd ist. Doch lässt sich dieser Fall leicht erledigen; ist

$$24n+1 = 30z^2+y^2 \equiv 0 \pmod{5},$$

so muss $y \equiv 0$ (mod. 5) oder $y = 5y'$ sein, und folglich

$$24u+1 = 30z^2+25y'^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{24n+1}{5} = 6z^2+5y'^2;$$

es ist also jetzt $\frac{24n+1}{5}$, eine Zahl, welche $\equiv 5$ (mod. 24) ist, durch die Form (6, 0, 5) darzustellen; da nun diese Form, wie man leicht erkennt, wieder die einzige ist, welche solche Zahlen darstellen kann, handelt es sich wieder um die Zahl der Darstellungen durch die Gesammtheit der reducirten Formen, wie früher. Man wird also an Stelle von $24n+1$ einfach $\frac{24n+1}{5}$ setzen. Ist noch immer Theilbarkeit durch 5 vorhanden, also

$$\frac{24n+1}{5} = 6z^2+5y'^2 \equiv 0 \pmod{5},$$

so muss $z = 5z'$ sein; es wird dann

$$\frac{24n+1}{25} = 30z'^2+y'^2;$$

dann wird also $\frac{24n+1}{25}$, welches $\equiv 1$ (mod. 24) ist, durch die Form (30, 0, 1) darzustellen sein, welche wieder die einzige ist, welche unsere Zahl darzustellen im Stande ist; so kann man fortfahren, bis man die ganze Potenz von 5, welche in $24n+1$ aufgeht, entfernt hat und die übrig bleibende Zahl wird dann entweder durch (30, 0, 1) oder (6, 0, 5) darzustellen sein, also wieder durch die Gesammtheit der reducirten Formen. Also folgender Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen die durch 5 theilbaren Summanden in ungerader Anzahl vorkommen, ist dann und nur dann ungerade, wenn die Zahl, die man erhält, nachdem man $24n+1$ durch die höchste darin enthaltene Potenz von 5 dividirt hat, in ihre Primfactoren zerlegt, nur einen ungeraden Exponenten aufweist, der die Form $4t+1$ hat und überdies einer Primzahl zugehört, für welche -30 quadratischer Rest ist,[1] oder, wenn alle Exponenten gerade sind, dabei aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, für welche -30 quadratischer Rest ist, eine ungerade Zahl ist.

L = 7.

Wir suchen die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 42z^2+y^2; \quad z > 0,\ y > 0.$$

Für die Determinante -42 gibt es die vier reducirten Formen: (42, 0, 1), (14, 0, 3), (7, 0, 6), (21, 0, 2), von denen wieder nur die erste Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Auch hier kann der Fall eintreten, dass $24n+1$ durch 7 theilbar ist; in diesem Falle ist ganz analog dem früheren Falle $L = 5$ zu verfahren; ist

$$24n+1 = 42z^2+y^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

so muss $y = 7y'$ sein, also

$$\frac{24n+1}{7} = 6z^2+7y'^2;$$

diese Zahl ist aber $\equiv 7 \pmod{24}$ und kann daher, wie man leicht sieht, nur durch die dritte der obigen reducirten Formen dargestellt werden. Ist auch noch

$$\frac{24n+1}{7} = 6z^2+7y'^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

so muss $z = 7z'$ sein, also

$$\frac{24n+1}{49} = 42z'^2+y'^2,$$

und da diese letztere Zahl $\equiv 1 \pmod{24}$ ist, also überhaupt nur durch (42, 0, 1) darstellbar ist, kommt es auch hier wieder

[1] Es sind dies die in den arithmetischen Reihen $120K+1$, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 49, 59, 67, 79, 101, 113 enthaltenen Primzahlen.

in allen Fällen auf die Darstellungen durch das gesammte Formensystem an. Wir haben somit den Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl durch 7 theilbarer Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn die Primzahlzerlegung jener Zahl, die man aus $24n+1$ durch Unterdrückung der höchsten darin enthaltenen Potenz von 7 erhält, entweder nur einen ungeraden Exponenten aufweist, welcher überdies die Form $4t+1$ hat und einer Primzahl zugehört, für welche -42 quadratischer Rest ist, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, für welche -42 quadratischer Rest ist, eine ungerade Zahl ist.

4.

Man kann auch leicht entscheiden, unter welchen Bedingungen die Zahl n auf eine ungerade Anzahl von Arten derart als Summe von lauter verschiedenen Summanden darstellbar ist, dass sich darunter eine ungerade Anzahl durch L nicht theilbarer Summanden findet.

Bezeichnet nämlich M die Anzahl der Darstellungen von n, bei welchen eine ungerade Anzahl durch L theilbarer Elemente auftritt, N die Anzahl jener, bei welchen eine ungerade Anzahl durch L untheilbarer Summanden auftritt, so ist eine Darstellung, welche überhaupt aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht, entweder in beiden oder in keiner der beiden Zahlen M und N mitgezählt; eine Darstellung hingegen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Summanden besteht, in einer und nur einer der beiden Zahlen M und N gezählt; also ist $M+N$ mod. 2 der Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente congruent. Da uns diese letztere Anzahl, sowie M bereits mod. 2 bekannt sind, können wir auch N mod. 2 als bekannt betrachten.

Setzen wir z. B. $L = 3$. Nach Früherem ist in diesem Falle M dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, entweder nur einen ungeraden Exponenten nur einen ungeraden Exponenten aufweist, der die Form $4t+1$ hat und überdies einer Primzahl zugehört, für welche -30 quadratischer Rest ist,[1] oder, wenn alle Exponenten gerade sind, dabei aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, für welche -30 quadratischer Rest ist, eine ungerade Zahl ist.

L = 7.

Wir suchen die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 42z^2+y^2; \quad z > 0, \ y > 0.$$

Für die Determinante -42 gibt es die vier reducirten Formen: (42, 0, 1), (14, 0, 3), (7, 0, 6), (21, 0, 2), von denen wieder nur die erste Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Auch hier kann der Fall eintreten, dass $24n+1$ durch 7 theilbar ist; in diesem Falle ist ganz analog dem früheren Falle $L = 5$ zu verfahren; ist

$$24n+1 = 42z^2+y^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

so muss $y = 7y'$ sein, also

$$\frac{24n+1}{7} = 6z^2+7y'^2;$$

diese Zahl ist aber $\equiv 7 \pmod{24}$ und kann daher, wie man leicht sieht, nur durch die dritte der obigen reducirten Formen dargestellt werden. Ist auch noch

$$\frac{24n+1}{7} = 6z^2+7y'^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

so muss $z = 7z'$ sein, also

$$\frac{24n+1}{49} = 42z'^2+y'^2,$$

und da diese letztere Zahl $\equiv 1 \pmod{24}$ ist, also überhaupt nur durch (42, 0, 1) darstellbar ist, kommt es auch hier wieder

---

[1] Es sind dies die in den arithmetischen Reihen $120K+1$, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 49, 59, 67, 79, 101, 113 enthaltenen Primzahlen.

in allen Fällen auf die Darstellungen durch das gesammte Formensystem an. Wir haben somit den Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl durch 7 theilbarer Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn die Primzahlzerlegung jener Zahl, die man aus $24n+1$ durch Unterdrückung der höchsten darin enthaltenen Potenz von 7 erhält, entweder nur einen ungeraden Exponenten aufweist, welcher überdies die Form $4t+1$ hat und einer Primzahl zugehört, für welche -42 quadratischer Rest ist, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, für welche -42 quadratischer Rest ist, eine ungerade Zahl ist.

4.

Man kann auch leicht entscheiden, unter welchen Bedingungen die Zahl n auf eine ungerade Anzahl von Arten derart als Summe von lauter verschiedenen Summanden darstellbar ist, dass sich darunter eine ungerade Anzahl durch L nicht theilbarer Summanden findet.

Bezeichnet nämlich M die Anzahl der Darstellungen von n, bei welchen eine ungerade Anzahl durch L theilbarer Elemente auftritt, N die Anzahl jener, bei welchen eine ungerade Anzahl durch L untheilbarer Summanden auftritt, so ist eine Darstellung, welche überhaupt aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht, entweder in beiden oder in keiner der beiden Zahlen M und N mitgezählt; eine Darstellung hingegen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Summanden besteht, in einer und nur einer der beiden Zahlen M und N gezählt; also ist $M+N$ mod. 2 der Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente congruent. Da uns diese letztere Anzahl, sowie M bereits mod. 2 bekannt sind, können wir auch N mod. 2 als bekannt betrachten.

Setzen wir z. B. $L = 3$. Nach Früherem ist in diesem Falle M dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, entweder nur einen ungeraden Exponenten aufweist und dieser überdies die Form $4t+1$ hat, oder $24n+1$ einem Quadrate gleich ist und die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, welche die Form $8h+1$, 3 (d. i. $24K+1$, 11, 17, 19) haben, eine ungerade Zahl ist; $M+N$ ist dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, nur einen ungeraden Exponenten aufweist und dieser die Form $4t+1$ hat, oder, wenn $24n+1$ einem Quadrate gleich ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Formen $24K+1$, 5, 7, 11 ungerade ist. N wird dann und nur dann ungerade ausfallen, wenn eine und nur eine der beiden Zahlen M und $M+N$ ungerade ist. Daraus ergibt sich unmittelbar folgender Satz:

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, unter welchen sich eine ungerade Anzahl nicht durch 3 theilbarer findet, ist dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$ ein Quadrat ist (also n selbst eine Pentagonalzahl) und dabei die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Formen $12t\pm5$,[1] ungerade ist.

5.

Zu einer anderen Art additiver Erzeugungen der Zahl n gelangen wir auf folgende Weise: Fassen wir die ungerade Zahl n als Summe zweier Zahlen λ und $n-\lambda$ auf und stellen jede derselben als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen dar. Jede Darstellung von λ in Verbindung mit jeder von $n-\lambda$ wird dann eine additive Erzeugung der Zahl n liefern, bei welcher die Elemente aber auch doppelt zur Verwendung kommen können; es kann sich nämlich ein bestimmtes Element sowohl in der Darstellung von λ als auch in jener von $n-\lambda$ vorfinden.

Wir kommen also auf Darstellungen von n, in denen einige Elemente einfach, andere aber doppelt auftreten. Bilden wir die Summe:

[1] Nämlich $24K+5$, 7, 17, 19.

$$\sum_{\lambda=0}^{n} [\lambda]\,[n-\lambda],$$

so ist in derselben eine Darstellung von n, in welcher genau r Elemente einfach auftreten, offenbar 2^r mal gezählt; denn von den paarweise in der Darstellung von n auftretenden Elementen muss offenbar je eines als Darstellungselement von λ, das andere als solches von $n-\lambda$ aufgefasst werden, während jedes der in n einfach auftretenden Elemente sowohl als Darstellungselement von λ wie auch von $n-\lambda$ aufgefasst werden kann, was 2^r verschiedene Möglichkeiten ergibt. In der halben Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{\frac{n-1}{2}} [\lambda]\,[n-\lambda]$$

wird eine solche Darstellung also 2^{r-1} mal gezählt sein; mod. 2 werden wir also in letzterer Summe die Anzahl jener Darstellungen erhalten, in welchen $r = 1$ ist.[1] Anderseits wird diese Summe im Allgemeinen gerade Summanden enthalten, nur jene Glieder in denen sowohl λ als $n-\lambda$ Pentagonalzahlen sind, werden ungerade ausfallen, so dass wir unsere Summe mod. 2 der Anzahl der Darstellungen von n als Summe zweier verschiedener Pentagonalzahlen congruent setzen können.

Letztere Anzahl ist aber wieder auf Grund der Theorie der quadratischen Formen leicht zu ermitteln.

Aus der Gleichung

$$n = \frac{3\alpha^2 \pm \alpha}{2} + \frac{3\beta^2 \pm \beta}{2}$$

folgt nämlich

$$24n+2 = (6\alpha \pm 1)^2 + (6\beta \pm 1)^2.$$

Zahlen der Form $24n+2$ können aber, wie man sofort sieht, nicht anders als Summe zweier Quadrate dargestellt

[1] Weil n ungerade angenommen ist, gibt es keine Darstellung, in der alle Elemente paarweise auftreten und ist das isolirte Element nothwendig eine ungerade Zahl.

werden, als wenn beide darstellende Zahlen die Form $6\alpha\pm 1$ haben, so dass es hier auf die gesammte Zahl der Darstellungen von $24n+2$ als Summe zweier Quadrate ankommt; diese Anzahl ist aber mit der Darstellungsanzahl von $12n+1$ als Summe zweier Quadrate identisch.[1]

Die Frage, wann $12n+1$ auf eine ungerade Anzahl von Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann, ist ganz analog den früher behandelten Fällen zu erledigen. Da überdies, weil wir n als ungerade vorausgesetzt haben, $12n+1$ niemals ein Quadrat werden kann, kommen wir zu folgendem einfachen Satze:

Die ungerade Zahl n lässt sich dann und nur dann auf eine ungerade Anzahl von Arten als Summe von lauter verschiedenen geraden Zahlen[2] und einer ungeraden Zahl, welch letztere nicht mit der Hälfte einer jener geraden Zahl übereinstimmen darf, darstellen, wenn $12n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, nur einen ungeraden Exponenten aufweist und dieser überdies die Form $4t+1$ hat.

6.

Die im Vorigen abgeleiteten Sätze beruhen im Wesentlichen auf dem Satze von Legendre über die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch eine gerade und durch eine ungerade Anzahl von Summanden; in dem folgendem Abschnitte sollen zum Schlusse noch einige analoge Folgerungen aus dem von Herrn K. Th. Vahlen[3] aufgestellten allgemeineren Satze gezogen werden, welcher folgendermassen lautet:

»Unter denjenigen Zerlegungen einer Zahl in lauter verschiedene Summanden, in welchen die Summe der absolut kleinsten Reste (Modulo 3) der Summanden einer gegebenen

[1] Denn aus jeder Darstellung $12n+1 = x^2+y^2$ folgt:

$$24n+2 = (x+y)^2+(x-y)^2$$

und umgekehrt.

[2] Die Zahlenpaare können wir uns nämlich zu geraden Zahlen vereinigt denken; nur darf dann eben die eine ungerade Zahl nicht mit der Hälfte einer der so entstehenden geraden Zahlen übereinstimmen.

[3] Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 112.

positiven oder negativen Zahl h gleich ist, gibt es im Allgemeinen ebenso viele gerade wie ungerade; allein ausgenommen ist die Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_h = \frac{3h^2-h}{2}$, für welche es eine mit h zugleich gerade oder ungerade überzählige Zerlegung der betrachteten Art gibt.«

Die Gesammtzahl aller (geraden und ungeraden) derartigen Zerlegungen ist also immer gerade, nur für $\tilde{\omega}_h$ ist sie ungerade.

Es bezeichne $[n]^h$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen die absolut kleinsten Reste (Modulo 3) der Summanden h zur Summe geben und $[n]^h_a$ die Anzahl derjenigen unter diesen Darstellungen, in welchen das bestimmte Element a auftritt.

Die evidente Recursionsformel

$$[n]^h_a = [n-a]^{h-\alpha} - [n-a]^{h-\alpha}_a,$$

wobei α den absolut kleinsten Rest der Zahl a mod. 3 bedeutet, führt leicht zu den weiteren:

$$[n]^h_a = [n-a]^{h-\alpha} - [n-2a]^{h-2\alpha} + [n-3a]^{h-3\alpha} - \ldots$$

Wir denken uns nun wieder einen Inbegriff A von Elementen a definirt und summiren die letztere Formel über alle Elemente dieses Inbegriffs.

$$\sum [n]^h_a = \sum [n-a]^{h-\alpha} - \sum [n-2a]^{h-2\alpha} + \sum [n-3a]^{h-3\alpha} - \ldots$$

Hiebei ist nun offenbar in der Summe linker Hand jede Darstellung so oft gezählt, so viele Elemente a in ihr vorkommen, also mod. 2 alle Darstellungen mit ungerader Anzahl von Elementen a; die Darstellungsanzahlen rechts sind auf Grund des Satzes von Vahlen im Allgemeinen gerade Zahlen; es ist $[n-\lambda a]^{h-\lambda\alpha}$ dann und nur dann ungerade, wenn

$$n-\lambda a = \frac{3(h-\lambda\alpha)^2-(h-\lambda\alpha)}{2}$$

ist.

Wir theilen nun die Elemente a in drei Gruppen, nach ihren Modulo 3 absolut kleinsten Resten α; den Werthen

$\alpha = 0, 1, -1$ entsprechen die Zahlformen $a = 3b$, $a = 3b_1 + 1$, $a = 3b_2 + 2$.

Die linke Seite unserer Gleichung ist also Modulo 2 der Gesammtzahl der ganzzahligen Lösungen folgender drei Gleichungen congruent

$$n - 3\lambda b = \frac{3h^2 - h}{2} = \tilde{\omega}_h; \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

$3b$ dem Inbegriffe A angehörig;

$$n - \lambda_1 (3b_1 + 1) = \frac{3(h - \lambda_1)^2 - (h - \lambda_1)}{2}; \quad \lambda_1 > 0, \tag{2}$$

$3b_1 + 1$ dem Inbegriffe A angehörig;

$$n - \lambda_2 (3b_2 + 2) = \frac{3(h + \lambda_2)^2 - (h + \lambda_2)}{2}; \quad \lambda_2 > 0, \tag{3}$$

$3b_2 + 2$ dem Inbegriffe A angehörig.

Wir machen nun über A specielle Annahmen. Nehmen wir zunächst als Inbegriff A die Gesammtheit aller durch $3L$ theilbaren ganzen Zahlen, wobei L irgend eine gegebene positive ganze Zahl ist, so kann überhaupt nur die erste der obigen drei Gleichungen Lösungen zulassen. Die Anzahl ihrer Lösungen ist der Anzahl der durch L theilbaren Theiler von $\frac{n - \tilde{\omega}_h}{3}$ gleich, also dann und nur dann ungerade, wenn $\frac{n - \tilde{\omega}_h}{3} = Lz^2$, wobei ein beliebiges Quadrat ist. Wir haben also folgenden Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, bei welchen erstens die Summe der Modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden gleich h ist, und bei welchen zweitens eine ungerade Anzahl von Summanden durch $3L$ theilbar sind, ist dann und nur ungerade, wenn n die Form $3Lz^2 + \tilde{\omega}_h$ hat.

Zweitens bestehe A aus allen nicht durch 3 theilbaren ganzen Zahlen. In diesem Falle hat die erste der obigen drei Gleichungen keine Lösung; die zweite und dritte Gleichung zusammen haben aber, wie sich sofort zeigen wird, im Allgemeinen eine gerade Zahl von Lösungen. Wir schreiben die Gleichungen (2) und (3) in folgender Form:

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda_1(\lambda_1+1-2h+2b_1)}{2} \tag{2}$$

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda_2(\lambda_2+1+2h+2b_2)}{2} \tag{3}$$

Es ist nun klar, dass für einen und denselben Werth $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ sich $b_1 - b_2 = 2h$ ergibt, dass also aus jeder Lösung (λ, b_1) der zweiten Gleichung eine Lösung $(\lambda, b_1 - 2h)$ der dritten Gleichung und aus jeder Lösung (λ, b_2) der dritten Gleichung eine Lösung (λ, b_2+2h) der zweiten folgt. Isolirt bleiben aber bei positivem h die dem Intervalle $0, 1, 2 \ldots 2h-1$ angehörigen Werthe von b_1, bei negativem h die dem Intervalle $0, 1, 2 \ldots (-2h-1)$ angehörigen Werthe von b_2, soweit sie Lösungen der betreffenden Gleichungen bilden.

Was nun diese isolirt stehenden Lösungen betrifft, so sieht man leicht, dass dieselben im Allgemeinen wieder in gerader Anzahl auftreten; ist h positiv, so hat die Gleichung (2) isolirt stehende Lösungen, deren Anzahl man erhält, wenn man abzählt, wie viele von folgenden Darstellungen:

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda(\lambda-2h+1)}{2}, \quad \frac{\lambda(\lambda-2h+3)}{2} \ldots \frac{\lambda(\lambda-3)}{2},$$
$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}, \quad \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}, \ldots \frac{\lambda(\lambda+2h-1)}{2}$$

möglich sind für ganzzahlige nicht negative Werthe von λ. Nun folgt aber aus jeder Darstellung von $\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3}$ in der Form $\frac{\lambda(\lambda-i)}{2}$ eine solche in der Form $\frac{\lambda'(\lambda'+i)}{2}$, wenn man nur in ersterer $\lambda - i = \lambda'$ setzt; dies führt zu einer gegenseitigen Zuordnung dieser isolirt stehenden Lösungen; diese Zuordnung ist jedenfalls vollständig durchführbar, wenn auch noch die letzte Formel:

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda(\lambda+2h-1)}{2}$$

$\alpha = 0, 1, -1$ entsprechen die Zahlformen $a = 3b$, $a = 3b_1+1$, $a = 3b_2+2$.

Die linke Seite unserer Gleichung ist also Modulo 2 der Gesammtzahl der ganzzahligen Lösungen folgender drei Gleichungen congruent

$$n - 3\lambda b = \frac{3h^2-h}{2} = \tilde{\omega}_h; \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

$3b$ dem Inbegriffe A angehörig;

$$n - \lambda_1(3b_1+1) = \frac{3(h-\lambda_1)^2 - (h-\lambda_1)}{2}; \quad \lambda_1 > 0, \tag{2}$$

$3b_1+1$ dem Inbegriffe A angehörig;

$$n - \lambda_2(3b_2+2) = \frac{3(h+\lambda_2)^2 - (h+\lambda_2)}{2}; \quad \lambda_2 > 0, \tag{3}$$

$3b_2+2$ dem Inbegriffe A angehörig.

Wir machen nun über A specielle Annahmen. Nehmen wir zunächst als Inbegriff A die Gesammtheit aller durch $3L$ theilbaren ganzen Zahlen, wobei L irgend eine gegebene positive ganze Zahl ist, so kann überhaupt nur die erste der obigen drei Gleichungen Lösungen zulassen. Die Anzahl ihrer Lösungen ist der Anzahl der durch L theilbaren Theiler von $\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3}$ gleich, also dann und nur dann ungerade, wenn $\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = Lz^2$, wobei ein beliebiges Quadrat ist. Wir haben also folgenden Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, bei welchen erstens die Summe der Modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden gleich h ist, und bei welchen zweitens eine ungerade Anzahl von Summanden durch $3L$ theilbar sind, ist dann und nur ungerade, wenn n die Form $3Lz^2+\tilde{\omega}_h$ hat.

Zweitens bestehe A aus allen nicht durch 3 theilbaren ganzen Zahlen. In diesem Falle hat die erste der obigen drei Gleichungen keine Lösung; die zweite und dritte Gleichung zusammen haben aber, wie sich sofort zeigen wird, im Allgemeinen eine gerade Zahl von Lösungen. Wir schreiben die Gleichungen (2) und (3) in folgender Form:

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda_1(\lambda_1+1-2h+2b_1)}{2} \tag{2}$$

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda_2(\lambda_2+1+2h+2b_2)}{2} \tag{3}$$

Es ist nun klar, dass für einen und denselben Werth $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ sich $b_1 - b_2 = 2h$ ergibt, dass also aus jeder Lösung (λ, b_1) der zweiten Gleichung eine Lösung (λ, b_1-2h) der dritten Gleichung und aus jeder Lösung (λ, b_2) der dritten Gleichung eine Lösung (λ, b_2+2h) der zweiten folgt. Isolirt bleiben aber bei positivem h die dem Intervalle $0, 1, 2 \ldots 2h-1$ angehörigen Werthe von b_1, bei negativem h die dem Intervalle $0, 1, 2 \ldots (-2h-1)$ angehörigen Werthe von b_2, soweit sie Lösungen der betreffenden Gleichungen bilden.

Was nun diese isolirt stehenden Lösungen betrifft, so sieht man leicht, dass dieselben im Allgemeinen wieder in gerader Anzahl auftreten; ist h positiv, so hat die Gleichung (2) isolirt stehende Lösungen, deren Anzahl man erhält, wenn man abzählt, wie viele von folgenden Darstellungen:

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda(\lambda-2h+1)}{2},\quad \frac{\lambda(\lambda-2h+3)}{2} \quad \ldots \quad \frac{\lambda(\lambda-3)}{2},$$
$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2},\quad \frac{\lambda(\lambda+1)}{2},\quad \ldots \quad \frac{\lambda(\lambda+2h-1)}{2}$$

möglich sind für ganzzahlige nicht negative Werthe von λ. Nun folgt aber aus jeder Darstellung von $\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3}$ in der Form $\frac{\lambda(\lambda-i)}{2}$ eine solche in der Form $\frac{\lambda'(\lambda'+i)}{2}$, wenn man nur in ersterer $\lambda - i = \lambda'$ setzt; dies führt zu einer gegenseitigen Zuordnung dieser isolirt stehenden Lösungen; diese Zuordnung ist jedenfalls vollständig durchführbar, wenn auch noch die letzte Formel:

$$\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda(\lambda+2h-1)}{2}$$

nach λ aufgelöst, einen positiven Werth λ liefert; was mit der Bedingung $n > \tilde{\omega}_h$ identisch ist.

Bei negativem h verhält sich die Sache ähnlich. Es stehen dann Lösungen der Gleichung (3) isolirt; ist $h = -h'$, so sind es die dem Intervalle 0, 1, 2, $2h'-1$ angehörigen Lösungen von (3), welche sich in genau eben solcher Weise zu Paaren gruppiren lassen, sobald $n > \tilde{\omega}_h$ ist.

Da die Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_h$ überhaupt die kleinste Zahl ist, für welche eine Darstellung existiren kann, bei welcher die Summe der Modulo 3 absolut kleinsten Reste der Summanden h ist, so bleibt nur noch der Fall $n = \tilde{\omega}_h$ zu betrachten. In diesem Falle nehmen die Gleichungen (2) und (3) die Gestalt an:

$$\lambda_1 + 1 - 2h + 2b_1 = 0 \qquad 2)$$

$$\lambda_2 + 1 + 2h + 2b_2 = 0, \qquad 3)$$

respective

$$\frac{\lambda_1 + 1}{2} + b_1 = h, \qquad \lambda_1 > 0,\ b_1 \geqq 0, \qquad 2)$$

$$\frac{\lambda_2 + 1}{2} + b_2 = -h, \qquad \lambda_2 > 0,\ b_2 \geqq 0. \qquad 3)$$

Bei positivem h hat Gleichung (2) Lösungen in der Anzahl h; bei negativem h gibt es Lösungen der Gleichung (3) in der Anzahl $-h$; in jedem Falle haben also beide Gleichungen zusammen $\pm h$ Lösungen, also dann und nur dann eine ungerade Anzahl, wenn h ungerade ist.

Wir haben somit dem Satz:

Die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, bei welchen erstens die Modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden h zur Summe geben und bei welchen zweitens eine ungerade Anzahl durch 3 untheilbarer Summanden auftritt, ist im Allgemeinen immer eine gerade Zahl; nur wenn n der Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_h$ gleich ist und h ungerade ist, ist sie ungerade.

In Verbindung mit dem früheren Satze dieses Abschnittes ergibt sich leicht der folgende:

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe einer ungeraden Anzahl verschiedener ganzer Zahlen, bei welchen die Modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden h zur Summe geben, ist dann und nur dann ungerade, wenn $\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3}$ einer Quadratzahl, grösser als 0, gleich ist; oder wenn $n = \tilde{\omega}_h$ ist und h ungerade.

Indem wir den ersteren dieser beiden Sätze auf alle möglichen Werthe von h beziehen und summiren, erhalten wir den Satz:

Die Gesammtzahl der Darstellungen von n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, unter welchen eine ungerade Anzahl nicht durch 3 theilbarer sich findet, ist dann und nur dann eine ungerade Zahl, wenn n einer Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_k$ mit ungeradem Index k gleich ist.

Wir sind hiemit auf ein Resultat zurückgekommen, das wir bereits in Abschnitt 4 gefunden haben; die dort erhaltene nothwendige und hinreichende Bedingung, dass in $24n+1$ die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Form $12t \pm 5$ ungerade ist, ist mit der hier gefundenen identisch. Wenn nämlich n eine Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_k$ mit ungeradem Index k ist, so ist $24n+1 = (6k-1)^2 = (12l \pm 5)^2$; es muss daher die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen in $24n+1$, welche die Form $12t \pm 5$ haben, ungerade sein, weil sonst $24n+1$ die Form $(12s \pm 1)^2$ hätte; und anderseits hat die zweite dieser Bedingungen die erstere zur Folge.