

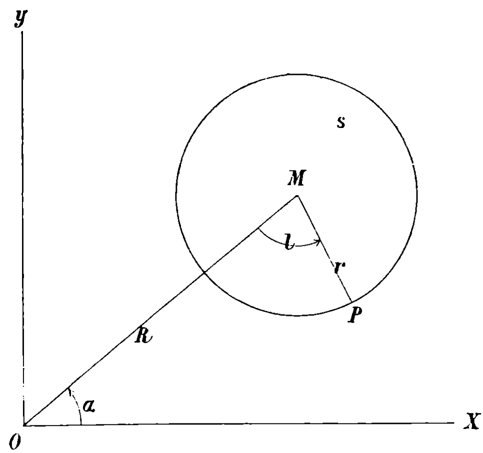
Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme

Fritz Hasenoehrl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1896.)

1. Sei O ein im Raume fest gegebener Punkt. An demselben sei eine massenlose, absolut starre Stange OM so befestigt, dass sich letztere um O reibungslos in der Ebene der Zeichnung drehen kann. An dem anderen Ende der Stange, in M,



befinde sich eine kreisförmige Scheibe s, welche um diesen Punkt ebenfalls reibungslos in der Ebene der Zeichnung drehbar sei. Die momentane Lage der Stange OM sei durch den Winkel α gegeben, welchen sie mit einer fixen Geraden OX bildet, während ein Punkt P an der Peripherie der Scheibe durch den Winkel $OMP = l$ definirt sein soll. Ferner sei

$$OM = R; \quad MP = r; \quad \frac{d\alpha}{dt} = \dot\alpha; \quad \frac{dl}{dt} = \dot l.$$

Und zwar soll der positive Sinn dieser Drehungen für ein oberhalb der Zeichenebene befindliches Auge dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt sein.

Die Scheibe s sei im Innern massenlos; bloss an ihrer Peripherie sei die Masse m gleichmässig mit der Liniendichte σ vertheilt, dass also $m = 2r\pi\sigma$.

2. Wir wollen nun die lebendige Kraft dieser Masse berechnen. Die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes P sind

$$x = R\cos\alpha - r\cos(\alpha+l),$$

$$y = R\sin\alpha - r\sin(\alpha+l);$$

daher ist das Quadrat der Geschwindigkeit von P

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = R^2\dot\alpha^2 + r^2(\dot\alpha+\dot l)^2 - 2Rr\dot\alpha(\dot\alpha+\dot l)\cos l.$$

Im Punkte P befindet sich das Massenelement $r\sigma dl$; die lebendige Kraft desselben ist $\frac{1}{2}v^2 r\sigma dl$. Daher ist die lebendige Kraft der ganzen Scheibe

$$T = \frac{1}{2} r\sigma \int_0^{2\pi} v^2 dl,$$

$$= \frac{1}{2} r\sigma [2\pi R^2\dot\alpha^2 + 2\pi r^2(\dot\alpha+\dot l)^2]$$

(da ja $\dot\alpha$ und $\dot l$ für alle Punkte der Scheibe denselben Werth haben) oder

$$T = \frac{m}{2}[R^2\dot\alpha^2 + 2\pi r^2(\dot\alpha+\dot l)^2] \tag{1}$$

— und aus diesem Ausdruck erkennen wir sofort, dass wir es mit einer cyklischen Bewegung zu thun haben, was übrigens von vorneherein klar ist.

3. Wir wenden nun die Lagrange'schen Gleichungen an und erhalten

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = mR^2\alpha + mr^2(\ddot{\alpha}+\ddot{l}).$$

Dieser Ausdruck gibt negativ genommen die Kraft, welche das System scheinbar auf α ausübt. Sie kann als Quotient $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$ definirt werden, wobei δA die Arbeit ist, die bei Vergrösserung von α um $\delta\alpha$ geleistet wird. Nehmen wir aber an, dass der Veränderung von α weder äussere Kräfte, noch etwa Bewegungshindernisse entgegenwirken, so ist $\delta A = 0$, und daher auch

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = mR^2\ddot{\alpha} + mr^2(\ddot{\alpha}+\ddot{l}) = 0,$$

daraus

$$\alpha = -\frac{r^2}{R^2+r^2}\,.\,\ddot{l}$$

und wenn wir nach t integriren

$$\alpha = -\frac{r^2}{R^2+r^2}\,.\,\dot{l} + \text{Const.}$$

Wir können die Constante gleich Null setzen, wenn wir voraussetzen, dass zur Zeit $t = -\infty$, $\dot{l} = \dot{\alpha} = 0$ war und dass seither niemals äussere Kräfte auf α gewirkt haben.

Setzen wir nun zur Kürze $\frac{r^2}{R^2+r^2} = c$ und setzen den Werth $\alpha = -c\dot{l}$ in den Ausdruck für die lebendige Kraft (1) ein, so erhalten wir:

$$T = \frac{m}{2}\left[R^2c^2\dot{l}^2 + r^2(\dot{l} - c\dot{l})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}A\,.\,\dot{l}^2,$$

wenn wir zur Kürze

$$m\frac{R^2r^2}{R^2+r^2} = A$$

setzen.

Die Kraft, welche die cyklische Bewegung von l antreibt, ist dann

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = \frac{d}{dt}(A\dot{l}) = A\ddot{l}.$$

Natürlich könnten wir auch hier leicht Gegenkräfte der Bewegungshindernisse einführen, die sowohl $\dot{l}$ als auch l proportional sein können. Dann hätten wir

$$L = A\ddot{l} + \omega\dot{l} + \vartheta l$$

(Analogie mit einem elektrischen Stromkreise).

4. Die gegebene Anordnung lässt sich nun leicht verallgemeinern. Statt der einen Stange, die im Punkte O drehbar befestigt ist, nehmen wir $(n+1)$ Stangen an, die jedoch untereinander fix verbunden sein sollen, so dass $\dot{\alpha}$ für alle denselben Werth hat. Ferner soll wieder am Ende einer jeden Stange eine Scheibe drehbar befestigt sein. Und zwar sollen alle diese Stangen und Scheiben stets in der Ebene der Zeichnung liegen.

Die Grössen R_i, r_i, m_i, l_i sollen für jede einzelne Scheibe s_i dieselbe Bedeutung haben, wie früher die Grössen R, r, m, l.

Die lebendige Kraft des ganzen Systems ergibt sich jetzt durch Summirung des Ausdruckes (1) über alle Theile, respective Scheiben. Wir haben also jetzt

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i[R_i^2\dot{\alpha}^2 + r_i^2(\dot{\alpha}+\dot{l}_i)^2]. \tag{2}$$

Wenden wir jetzt wieder die Lagrange'schen Gleichungen an, so haben wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \sum_{i=0}^{n} m_i[R_i^2\ddot{\alpha} + r_i^2(\ddot{\alpha}+\ddot{l}_i)].$$

Machen wir nun dieselben Voraussetzungen wie früher (Art. 3), so können wir diesen Ausdruck gleich Null setzen. Daraus erhalten wir dann

$$\ddot{\alpha}\sum_{i=0}^{n} m_i(R_i^2+r_i^2) = -\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2\ddot{l}_i.$$

Setzen wir nun zur Kürze

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (R_i^2 + r_i^2) = S,$$

so erhalten wir durch Integration

$$\alpha = -\frac{1}{S} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}$$

(die Integrationsconstante können wir aus denselben Gründen weglassen, wie früher).

Gleichung (2) können wir auch in folgender Form schreiben.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 . S + \alpha \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i^2,$$

wobei zur Kürze

$$S = \sum_{i=0}^{n} m_i (r_i^2 + R_i^2);$$

hierin setzen wir nun den Werth von $\dot{\alpha}$ ein und erhalten

$$T = \frac{1}{2S} \left[\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i \right]^2 - \frac{1}{S} \left[\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i^2$$

oder

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i^2 - \frac{1}{2S} \left[\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \dot{l}_i^2 \left[m_i r_i^2 - \frac{1}{S} m_i^2 r_i^4 \right] - \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{n}{}' \sum_{k=0}^{n} m_i m_k \dot{l}_i \dot{l}_k r_i^2 r_k^2,$$

wobei das Symbol $\Sigma' \Sigma$ bedeutet, dass in der Doppelsumme die Glieder, wo $i = k$ ist, auszulassen sind.

Wir scheiden nun aus den Summen die Glieder, die $\dot{l}_0$ enthalten, aus und lassen zur Kürze den Index 0 einfach weg. Dann ist

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{l}^2\left(m r^2 - \frac{1}{S}\,m^2 r^4\right) - \dot{l}\,.\,\frac{1}{S}\,m r^2 \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i + N,$$

wo N eine Grösse bedeutet, in der $\dot{l}$ ohne Index nicht mehr vorkommt. Setzen wir nun

$$m r^2 - \frac{1}{S}\,m^2 r^4 = A$$

$$-\frac{m r^2}{S} \sum_{i=0}^{n} m_i r_2^2 \dot{l}_2 = J(s),$$

so erhalten wir

$$T = \frac{A}{2}\,\dot{l}^2 + \dot{l}\,.\,J(s) + N \tag{3}$$

(siehe Boltzmann, Vorles. I., S. 52, Gl. [25]).

Vielleicht ist es erlaubt, die Scheibe s, auf die sich die Grössen ohne Index beziehen, die »Aufscheibe« zu nennen. Ferner wollen wir $J(s)$ ihr Moment nennen.

Diese Grösse ist dann offenbar abhängig:

Erstens von der Lage (R_i), der Gestalt (r_i, m_i) und der Drehungsgeschwindigkeit sämmtlicher anderen Scheiben.

Zweitens von der Lage und Gestalt der »Aufscheibe«, jedoch nicht von ihrer Drehungsgeschwindigkeit.

5. Die Gleichung (3) zeigt eine Analogie mit einer bekannten Grundgleichung des elektromagnetischen Feldes, wenn wir unter $\dot{l}$ statt einer Drehungsgeschwindigkeit eine Stromstärke verstehen.

Nun müssen wir uns klar werden, ob wir uns unter einer solchen Scheibe das Analogon eines Stromelementes oder eines geschlossenen Stromes o. dergl. vorstellen sollen. Dazu wollen wir unsere allgemeinen Betrachtungen auf ein System von zwei Scheiben s_1, s_2 beschränken. Dann ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{l}_1^2\left(m_1 r_1^2 - \frac{m_1^2 r_1^4}{m_1(r_1^2+R_1^2)+m_2(r_2^2+R_2^2)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\dot{l}_2^2\left(m_2 r_2^2-\frac{m_2^2 r_2^4}{m_1(r_1^2+R_1^2)+m_2(r_2^2+R_2^2)}\right)-$$

$$-l_1 l_2 \frac{m_1 m_2 r_1^2 r_2^2}{m_1(r_1^2+R_1^2)+m_2(r_2^2+R_2^2)}$$

Der wechselseitige Inductionscoëfficient ist hier wesentlich negativ — d. h. es wird eine Drehung inducirt, die der inducirenden gleichgerichtet ist.

Wir dürfen daher nicht etwa als Analogon der beiden Scheiben zwei parallele Stromelemente nehmen, sondern vielmehr zwei geschlossene Stromkreise, die in derselben Ebene nebeneinanderliegen.

Endlich verlohnt es sich vielleicht zu bemerken, dass bei diesem Polycykel die lebendige Kraft nicht stets integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Arbeit ist.

Natürlich erhalten die Scheiben gegen ein fix im Raume gezogenes Coordinatensystem keine Drehung.