

Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische

Dr. O. Biermann,

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

Ist durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ ein irreductibles, algebraisches Gebilde p^{ten} Ranges definiert und sind

$$I(x, y)_1, \dots, I(x, y)_p$$

irgend p zugehörige und von einander linear unabhängige Integrale erster Gattung, so müssen zwischen den Constanten der vorgegebenen Gleichung besondere Beziehungen bestehen, wenn es möglich sein soll, ein Integral erster Gattung

$$c_1 I(x, y)_1 + \dots + c_p I(x, y)_p$$

in der Art auf ein elliptisches

$$\int \frac{d\xi}{\eta}$$

zurückzuführen, dass ξ und η , d. i. die Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Function dritten oder vierten Grades in ξ rational durch x und y darstellbar sind.

Diese Beziehungen sind zuerst von Herrn Weierstrass, und zwar in transcenderter Form, abgeleitet worden. Herr Königsberger theilte die von Herrn Weierstrass ermittelten Relationen für den Fall mit, dass $f(x, y) = 0$ ein hyperelliptisches Gebilde vom Range 2 darstellt,¹ und Frau Kowalewski

¹ Borchardt's J., Bd. 67, S. 72.

theilte nicht allein das auf ein beliebiges algebraisches Gebilde p^{ten} Ranges bezügliche Resultat mit, sondern auch den Gang des Beweises von Herrn Weierstrass.¹ Den ersten Beweis für das durch Herrn Königsberger mitgetheilte Resultat habe ich in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie² dadurch geliefert, dass ich die von Herrn Weierstrass herührende Darstellung der zu einem hyperelliptischen Gebilde gehörenden Integrale erster Gattung durch Logarithmen eindeutiger, transcenderter und an keiner Stelle (x, y) verschwindender Functionen, der Primfunctionen, benützte.

Da ich seither bei anderem Anlasse in den Monatsheften für Mathematik und Physik (Jahrgang III) die Darstellung der zu einem allgemeinen, irreductiblen algebraischen Gebilde p^{ten} Ranges gehörigen Integrale erster und zweiter Gattung durch Logarithmen nicht verschwindender Primfunctionen angeben konnte, will ich nun auch den hierauf zu gründenden Beweis für die allgemeinen Weierstrass'schen Relationen entwickeln, der mir wegen seiner Einfachheit einer Veröffentlichung werth erscheint.

Doch sei es wegen eines in der Folge nöthigen Satzes über Primfunctionen, der an dem letztgenannten Orte noch nicht vorkommt, aber eine Verallgemeinerung eines Satzes ist, den ich in den Sitzungsberichten (l. c. S. 967) vorbrachte, gestattet, kurz von den Primfunctionen zu sprechen.

Wir können und wollen immer voraussetzen, dass das vorgelegte Gebilde $f(x, y) = 0$ im Unendlichen nicht verzweigt sei. Ist dann

$$H(x, y; x'y')$$

eine rationale Function $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades, die an den $(p+1)$ von den singulären Stellen des Gebildes verschiedenen Stellen:

$$(c_1, d_1), \dots (c_p, d_p) \text{ und } (x', y'),$$

deren letzte als beweglich betrachtet werden wird, je von der ersten Ordnung unendlich wird und an einer noch willkürlich wählbaren Stelle (x_0, y_0) , die auch nicht mit einer singulären

¹ Acta mathematica, t. 4, 1884.

87. Bd., II. Abth., 1883, Mai-Heft, S. 978.

Stelle des Gebildes zusammenfalle, von der ersten Ordnung verschwindet, sind ferner die Integrale

$$\int g(x, y)_\alpha dx \quad (\alpha = 1, \dots, p)$$

p linear unabhängige Integrale erster Gattung und sind die Integrale

$$\int g'(x, y)_\alpha dx \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

von denen das angeschriebene einzig und allein an der Stelle (c_α, d_α) unendlich werde, und zwar wie die Function $(x - c_\alpha)^{-1}$, solche Integrale zweiter Gattung, dass die Beziehung besteht:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H(x, y; x', y') &= \frac{d}{dx'} H(x', y'; x, y) + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^p \{ g'(x, y)_\alpha g(x', y')_\alpha - g(x, y)_\alpha g'(x', y')_\alpha \} \quad a) \end{aligned}$$

so gelangt man folgendermassen zu den Primfunctionen. Man führe einen geschlossenen Weg (b) ein, der durch keine der Stellen (x_0, y_0) und (c_α, d_α) gehe, nenne die Werthe der über (b) erstreckten Integrale:

$$\int g(x', y')_\alpha dx' = 2\omega'_\alpha, \quad \int g(x', y')_\alpha dx' = 2\eta'_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p)$$

und erstrecke die durch

$$\int H(x, y; x', y') dx'$$

angezeigte Integration über denselben Weg (b) , so ist durch dieses Integral eine Function $\Phi(x, y)$ definiert, deren Ableitung nach x zufolge der Beziehung (a) lautet:

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^p (g'(x, y)_\alpha 2\omega'_\alpha - g(x, y)_\alpha 2\eta'_\alpha).$$

Die Function

$$e^{\Phi(x, y)} = E(x, y)$$

ist dann eine eindeutige transcendente nirgends verschwindende Primfunction, die an den Stellen (c_α, d_α) das durch die Formeln

$$E(x_t^\alpha, y_t^\alpha) = c_\alpha \cdot e^{2\omega'_\alpha t^{-1}} (1 + t\mathfrak{P}_\alpha(t))^{*} \quad (\alpha = 1, \dots, p)$$

beschriebene Verhalten besitzt und wegen der Formel

$$H(x_0, y_0; x', y') = 0$$

an der Stelle (x_0, y_0) den Werth Eins hat.

Entsprechend den p Wegepaaren (a_β, b_β) eines vollständigen Normalquerschnittsystems kann man $2p$ Primfunctionen $E(x, y)_\beta$ und $E'(x, y)_\beta$ ($\beta = 1, 2, \dots, p$) aufnehmen, die allenthalben regulären Verhaltens sind, ausser an den p Stellen (c_α, d_α) , wo die Entwicklungen gelten:

$$E(x_t^\alpha, y_t^\alpha)_\beta = c_{\alpha\beta} e^{2\omega_{\alpha\beta} t^{-1}} (1 + t\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)),$$

$$E'(x_t^\alpha, y_t^\alpha)_\beta = c'_{\alpha\beta} e^{2\omega'_{\alpha\beta} t^{-1}} (1 + t\mathfrak{P}'_{\alpha\beta}(t)),$$

wie man nach Einführung der constanten Werthdifferenzen der Integrale

$$\int g(x, y)_\alpha dx, \text{ beziehungsweise } \int g'(x, y)_\alpha dx$$

an dem linken und rechten Ufer der Querschnitte b_β und a_β , d. i.

$$-2\omega_{\alpha\beta} \text{ und } 2\omega'_{\alpha\beta}, \text{ beziehungsweise } -2\eta_{\alpha\beta} \text{ und } 2\eta'_{\alpha\beta}$$

auf Grund des Verhaltens der Integrale erster und zweiter Gattung unmittelbar sieht. Die Werthe von $E(x, y)_\beta$ und $E'(x, y)_\beta$ an der Stelle (x_0, y_0) sind Eins.

Da nun aber die früheren Werthdifferenzen $2\omega'_\alpha$ und $2\eta'_\alpha$ immer in der Form darstellbar sind:

$$2\omega'_\alpha = \sum_{\beta=1}^p (-2m'_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2m_\beta \omega'_{\alpha\beta})$$

$$2\eta'_\alpha = \sum_{\beta=1}^p (-2m'_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2m_\beta \eta'_{\alpha\beta})$$

wo m_β und m'_β ganze Zahlen bezeichnen, so wird:

$$\frac{d \log E(x, y)}{dx} = \sum_{\beta=1}^p \left\{ m_\beta \frac{d \log E'(x, y)_\beta}{dx} - m'_\beta \frac{d \log E(x, y)_\beta}{dx} \right\}$$

x_t^α, y_t^α sind die Symbole für Ausdrücke $c_\alpha + t$ und $d_\alpha + t\sqrt{\mathfrak{P}_\alpha(t)}$, welche die Umgebung des Gebildes von (c_α, d_α) darstellen.

und

$$E(x, y) = \prod_{\beta=1}^p \frac{E'(x, y)_{\beta}^{m_{\beta}}}{E(x, y)_{\beta}^{m'_{\beta}}},$$

d. h. jede Primfunction lässt sich als Product ganzzahliger Potenzen der $2p$ Primfunctionen $E(x, y)_{\beta}$ und $E'(x, y)_{\beta}$ darstellen (vergl. l. c. S. 967).

Auf Grund der Relationen zwischen den constanten Werthdifferenzen an den Querschnitten des Normalsystems folgen nun für die Integrale

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} g(x, y)_{\alpha} dx = I(x, y)_{\alpha} \quad \text{und} \quad \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} g'(x, y)_{\alpha} dx = I'(x, y)_{\alpha}$$

die Darstellungen

$$I(x, y)_{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \log \prod_{\beta=1}^p \frac{E'(x, y)_{\beta}^{2\omega_{\alpha\beta}}}{E(x, y)_{\beta}^{2\omega'_{\alpha\beta}}},$$

$$I'(x, y)_{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \log \prod_{\beta=1}^p \frac{E'(x, y)_{\beta}^{2\tau_{\alpha\beta}}}{E(x, y)_{\beta}^{2\tau'_{\alpha\beta}}},$$

und das von der Stelle (x_0, y_0) bis (x, y) erstreckte Integral erster Gattung:

$$I(x, y) = \sum_{\gamma=1}^p c_{\gamma} I(x, y)_{\gamma}$$

nimmt an der Stelle (x, y) die durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i} \log \prod_{\beta=1}^p \frac{E'(x, y)_{\beta}^{2\omega_{\beta}}}{E(x, y)_{\beta}^{2\omega'_{\beta}}} + \sum_{\beta=1}^p (2\omega_{\beta} k'_{\beta} - 2\omega'_{\beta} k_{\beta})$$

angegebenen Werthe an, wenn

$$2\omega_{\beta} = \sum 2\omega_{i\beta} c_i, \quad 2\omega'_{\beta} = \sum 2\omega'_{i\beta} c_i$$

und k_{β}, k'_{β} ($\beta = 1, 2, \dots, p$) beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Soll nun ein Integral $I(x, y)$ erster Gattung und p^{ten} Ranges auf ein elliptisches erster Gattung zurückführbar sein, dessen Perioden $2\bar{\omega}$ und $2\bar{\omega}'$ heissen mögen und dessen Werthe mit Hilfe zweier Primfunctionen $\mathfrak{E}(\xi, \eta)$ und $\mathfrak{E}'(\xi, \eta)$ durch

$$\frac{1}{2\pi i} \log \frac{\mathfrak{E}'(\xi, \eta)^{2\bar{\omega}}}{\mathfrak{E}(\xi, \eta)^{2\bar{\omega}'}} + (2\bar{\omega}\mu' - 2\bar{\omega}'\mu)$$

ausdrückbar sind, wo μ und μ' ganze Zahlen bezeichnen, so muss eine Gleichung von der Form

$$C \prod_{\beta=1}^p \frac{E'(x, y)_{\beta}^{2\omega_{\beta}}}{E(x, y)_{\beta}^{2\omega'_{\beta}}} = c \frac{\mathfrak{E}'(\xi, \eta)^{2\bar{\omega}}}{\mathfrak{E}(\xi, \eta)^{2\bar{\omega}'}}$$

bestehen, wo C und c Constante bedeuten. Wir müssen daher durch eine eindeutige, und zwar — wie es die Natur der Primfunctionen verlangt — rationale Transformation

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

von den Primfunctionen $\mathfrak{E}(\xi, \eta)$ und $\mathfrak{E}'(\xi, \eta)$ zu solchen Primfunctionen $\mathfrak{E}(x, y)$ und $\mathfrak{E}'(x, y)$ des Gebildes vom p^{ten} Range gelangen können, dass

$$c \frac{\mathfrak{E}'(x, y)^{2\bar{\omega}}}{\mathfrak{E}(x, y)^{2\bar{\omega}'}}$$

ein Ausdruck für das reducible Integral p^{ten} Ranges ist.

Die Formen für die neuen Primfunctionen lauten aber nach dem früheren Satze:

$$\mathfrak{E}(x, y) = \prod_{\beta} E'(x, y)_{\beta}^{n_{\beta}} E(x, y)_{\beta}^{m_{\beta}},$$

$$\mathfrak{E}'(x, y) = \prod_{\beta} E'(x, y)_{\beta}^{n'_{\beta}} E(x, y)_{\beta}^{m'_{\beta}},$$

daher ist nur auszudrücken, dass der Ausdruck:

$$c \prod_{\beta=1}^p \frac{E'(x, y)_{\beta}^{n'_{\beta} 2\bar{\omega}} E(x, y)_{\beta}^{m'_{\beta} 2\bar{\omega}}}{E'(x, y)_{\beta}^{n_{\beta} 2\bar{\omega}'} E(x, y)_{\beta}^{m_{\beta} 2\bar{\omega}'}}$$

ein Integral erster Gattung darstellt, also nirgends unendlich wird, d. h. es müssen die Entwicklungen um die singulären Stellen (c_α, d_α) der Primfunktionen E_β und E'_β so beschaffen sein, dass die Singularitäten aufgehoben werden; es müssen die p Relationen

$$\begin{aligned} & 2\bar{\omega}(n'_1\omega'_{\alpha 1} + \dots + n'_p\omega'_{\alpha p} + m'_1\omega_{\alpha 1} + \dots + m'_p\omega_{\alpha p}) - \\ & - 2\bar{\omega}'(n_1\omega'_{\alpha 1} + \dots + n_p\omega'_{\alpha p} + m_1\omega_{\alpha 1} + \dots + m_p\omega_{\alpha p}) = 0 \\ & (\alpha = 1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

bestehen. Doch diese Gleichungen erfordern, dass die folgenden $\frac{p(p-1)}{2}$ Determinanten verschwinden:

$$\begin{aligned} & (n'_1\omega'_{\alpha 1} + \dots + n'_p\omega'_{\alpha p} + m'_1\omega_{\alpha 1} + \dots + m'_p\omega_{\alpha p}) \cdot \\ & \quad \cdot (n_1\omega'_{\beta 1} + \dots + n_p\omega'_{\beta p} + m_1\omega_{\beta 1} + \dots + m_p\omega_{\beta p}) \\ & - (n_1\omega'_{\alpha 1} + \dots + n_p\omega'_{\alpha p} + m_1\omega_{\alpha 1} + \dots + m_p\omega_{\alpha p}) \cdot \\ & \quad \cdot (n'_1\omega'_{\beta 1} + \dots + n'_p\omega'_{\beta p} + m'_1\omega_{\beta 1} + \dots + m'_p\omega_{\beta p}) \\ & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p; \alpha \neq \beta) \end{aligned}$$

Ist nun die Determinante

$$\Sigma \pm (\omega_{11}, \dots, \omega_{pp})$$

mit (ω) und die dem Elemente $\omega_{\alpha\beta}$ zugehörige Unterdeterminante mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ bezeichnet, und führt man die $\mathfrak{D}$ -Moduln

$$\tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\beta} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\omega'_{\alpha\gamma}(\omega)_{\alpha\beta}}{(\omega)}$$

ein, worauf

$$\omega'_{\alpha\gamma} = \omega_{\alpha 1}\tau_{1\gamma} + \dots + \omega_{\alpha p}\tau_{p\gamma}$$

wird, so lauten die letzten $\binom{p}{2}$ Relationen folgendermassen:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} (m'_\gamma + n'_1\tau_{\gamma 1} + \dots + n'_p\tau_{\gamma p}) \right) \left(\sum_{\gamma} \omega_{\beta\gamma} (m_\gamma + n_1\tau_{\gamma 1} + \dots + n_p\tau_{\gamma p}) \right) - \\ & - \left(\sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} (m_\gamma + n_1\tau_{\gamma 1} + \dots + n_p\tau_{\gamma p}) \right) \left(\sum_{\gamma} \omega_{\beta\gamma} (m'_\gamma + n'_1\tau_{\gamma 1} + \dots + n'_p\tau_{\gamma p}) \right) = 0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\left| \begin{array}{cc} \omega_{\alpha 1} & \omega_{\alpha 2} \\ \omega_{\beta 1} & \omega_{\beta 2} \end{array} \right| T_1 + \left| \begin{array}{cc} \omega_{\alpha 1} & \omega_{\alpha 3} \\ \omega_{\beta 1} & \omega_{\beta 3} \end{array} \right| T_2 + \dots + \left| \begin{array}{cc} \omega_{\alpha, p-1} & \omega_{\alpha p} \\ \omega_{\beta, p-1} & \omega_{\beta p} \end{array} \right| T_{\binom{p}{2}} = 0, \quad (2)$$

wenn

$$T_1 = (m'_1 + n'_1 \tau_{11} + \dots + n'_p \tau_{1p})(m_2 + n_1 \tau_{21} + \dots + n_p \tau_{2p}) - \\ - (m_1 + n_1 \tau_{11} + \dots + n_p \tau_{1p})(m'_2 + n'_1 \tau_{21} + \dots + n'_p \tau_{2p})$$

$$T_{\binom{p}{2}} = (m'_{p-1} + n'_1 \tau_{p-1,1} + \dots + n'_p \tau_{p-1,p})(m_p + n_1 \tau_{p1} + \dots + n_p \tau_{pp}) - \\ - (m_{p-1} + n'_1 \tau_{p-1,1} + \dots + n'_p \tau_{p-1,p})(m'_p + n'_1 \tau_{p1} + \dots + n'_p \tau_{pp})$$

ist.

Man erhält $\binom{p}{2}$ solcher Gleichungen wie (2), und da, wie sehr leicht zu sehen ist, die Determinante des in den Grössen T linearen Gleichungensystems den Werth

$$(\omega)^{p-1}$$

hat,¹ also nicht Null ist, so muss nothwendig

$$T_1 = 0, T_2 = 0, \dots, T_{\binom{p}{2}} = 0$$

sein und somit

$$\frac{m_1 + n_1 \tau_{11} + \dots + n_p \tau_{1p}}{m'_1 + n'_1 \tau_{11} + \dots + n'_p \tau_{1p}} = \frac{m_2 + n_1 \tau_{21} + \dots + n_p \tau_{2p}}{m'_2 + n'_1 \tau_{21} + \dots + n'_p \tau_{2p}} = \dots = \frac{m_p + n_1 \tau_{p1} + \dots + n_p \tau_{pp}}{m'_p + n'_1 \tau_{p1} + \dots + n'_p \tau_{pp}}$$

werden.

Diese Relationen sagen ebenso wie die voranstehenden nichts Anderes aus, als dass die Moduln der transformirten $\wp$ -Function:

$$\tau'_{1,2}, \tau'_{1,3}, \dots, \tau'_{1,p}$$

alle verschwinden; und das sind die Weierstrass'schen transcendenten Beziehungen, unter welchen ein Integral p^{ten} Ranges auf ein elliptisches zurückführbar ist.

¹ Was schon Herr Francke (Crelle J. 61, S. 350) bewiesen hat, wie in Baltzer's Lehrbuch zu finden ist.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: [105_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Biermann Otto

Artikel/Article: [Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische 924-931](#)