Über die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren

Gustav Kohn in Wien.

In einem auf der diesjährigen Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrage habe ich die Identität der Geometrie einer (m, n)-Correspondenz mit der Geometrie eines gewissen Curvenpaares dargelegt und diesen Gedanken für die Invariantentheorie der doppelt binären Formen verwerthet. Von demselben Gedanken getragen, habe ich seither geometrische Untersuchungen über die genannten Curvenpaare angestellt und erlaube mir einige für den Specialfall eines cubischen Raumcurvenpaares erlangte Ergebnisse an dieser Stelle in gedrängter Übersicht vorzulegen.

---

1. Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve Γ an sechs Stellen berühren, bilden ein irreducibles, von sechs Parametern abhängiges System. Die Curven dieses Systems ergeben sich als Erzeugnisse von drei beliebigen, projectiven Systemen von Schmiegungsebenen der Curve Γ, d. h. die Punkte einer solchen Curve C werden als Schnittpunkte von je drei homologen Schmiegungsebenen der drei projectiven Systeme erhalten. Die drei Punkte,

in denen eine beliebige Schmiegungsebene von Γ die Curve C trifft, sind wiederum homolog in drei projectiven Punktsystemen auf dieser Curve.

Solche zwei Curven C und Γ sind reciproke Polaren in Bezug auf eine Oberfläche zweiter Ordnung F. Die Schnittpunkte dieser Fläche mit C lassen sich angeben. Es ordnen sich nämlich die sechs Berührungspunkte der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ in drei »Paare zugeordneter Punkte« an, und die Schnittpunkte von F sind jene drei Punktepaare, welche je zwei von den drei Paaren zugeordneter Punkte auf C harmonisch trennen.

Die drei Paare von zugeordneten Punkten, in welchen eine gegebene cubische Raumcurve C von der Tangentenfläche einer zweiten Γ berührt werden soll, können auf C beliebig gewählt werden; die Curve Γ ist dann eindeutig bestimmt. Es gibt deshalb 15 cubische Raumcurven, deren Tangentenfläche die Curve C in sechs beliebigen ihrer Punkte berührt, entsprechend den 15 Arten, auf welche man sechs Punkte in drei Paare zerlegen kann.

Die Verbindungslinie eines Paares zugeordneter Punkte bezeichnen wir als Berührungssehne. Werden die Curven C und Γ als reell und die drei Berührungssehnen als verschieden vorausgesetzt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder sind alle drei Berührungssehnen reell, oder eine reell, die beiden anderen conjugirt imaginär. Im ersten Falle liegt die Curve C ganz ausserhalb, im zweiten ganz innerhalb der Tangentenfläche von Γ.

2. Einige specielle Fälle der Lagenbeziehung zweier Raumcurven dritter Ordnung, von denen die eine die Tangentenfläche der zweiten sechsfach berührt, bieten ein besonderes Interesse.

Ein solcher Specialfall liegt vor, wenn von den drei Berührungssehnen zwei zusammenfallen. Dann fällt auch die dritte Berührungssehne mit ihnen zusammen und die Beziehung der Curven C und Γ besteht darin, dass sie dasselbe Tetraëder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraëder haben. In diesem Falle kann jede von den beiden Curven als Erzeugniss aufgefasst werden, sowohl von drei projectiven Systemen von Punkten, als auch von drei projectiven Systemen von Schmiegungsebenen auf der anderen. Die Doppelelemente von je zwei unter drei solchen projectiven Systemen sind unter einander (und mit den beiden gemeinsamen Elementen von C und Γ) identisch, eine Eigenschaft, welche für sich die Lagenbeziehung bestimmt. Es gibt hier nicht bloss eine, sondern unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die beiden Curven reciproke Polaren sind.

Zwei Flächen zweiter Ordnung, welche durch eine und dieselbe Punktreihe dritter Ordnung hindurchgehen, sind stets einem und demselben Ebenenbüschel dritter Ordnung eingeschrieben. In solchen zwei cubischen Raumcurven C und Γ haben wir einen Specialfall der betrachteten Lagenbeziehung vor uns, der dadurch charakterisirt ist, dass von den drei Paaren zugeordneter Punkte, in denen die Curve C von der Tangentenfläche von Γ berührt wird, zwei Paare von dem dritten harmonisch getrennt werden.

Trennt jedes von den drei Paaren zugeordneter Berührungspunkte der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ die beiden übrigen Paare harmonisch, so lässt sich die Lagenbeziehung zwischen C und Γ dadurch charakterisiren, dass drei durch C hindurchgelegte Flächen zweiter Ordnung dem cubischen Ebenenbüschel Γ eingeschrieben sind. In diesem Falle gibt es unendlich viele, der Curve C eingeschriebene und gleichzeitig der Curve Γ umschriebene Tetraëder, welche Paare von Erzeugenden der drei Flächen zweiter Ordnung zu Gegenkanten haben. Die Beziehung zwischen C und Γ ist symmetrisch und durch das Vorhandensein von sechs gemeinsamen Tangenten definirt.

3. Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve Γ in fünf Punkten berühren, zerfallen in zwei Systeme mit je sieben Parametern.

Die Curven des einen Systems werden erhalten, wenn man auf jeder dem cubischen Ebenenbüschel Γ eingeschriebenen Fläche zweiter Ordnung, das eine von den beiden auf der Fläche vorhandenen Systemen von cubischen Raumcurven verzeichnet, nämlich das System der Curven, welche die Erzeugenden derjenigen Schaar zu einfachen Secanten haben, die aus Doppelaxen der Curve Γ besteht.

Das zweite System wird gebildet von den cubischen Raumcurven, welche auf einer beliebigen, dem Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ doppelt eingeschriebenen Regelfläche vierten Grades liegen, für die zwei ihrer vier Cuspidalpunkte (Klemmpunkte, pinch-points) zusammenfallen.

4. Die Raumcurven dritter Ordnung, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten Raumcurve dritter Ordnung Γ in je vier (und nicht mehr) Punkten berühren, zerfallen in zwei Systeme mit je acht Parametern.

Die Beziehung einer beliebigen Curve C des einen Systems zur Curve Γ erscheint durch die besondere Natur der (3, 3)-Correspondenz definirt, die zwischen den Schmiegungsebenen von Γ und ihren Schnittpunkten mit C besteht: Die Gleichung dieser Correspondenz ist vom Geschlechte null.

Die Curven des zweiten Systems werden gebildet von den Raumcurven dritter Ordnung, welche auf Regelflächen vierten Grades liegen, die dem Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ doppelt eingeschrieben sind. Ist C eine Curve dieses Systems, so gibt es auch eine dem Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ (einfach) eingeschriebene Regelfläche vierten Grades, welche C zur Doppelcurve hat. Die Lagenbeziehung von C und Γ erscheint vollkommen bestimmt durch die Existenz einer Projectivität zwischen diesen Curven von der Art, dass jede Schmiegungsebene von Γ durch den ihr auf C entsprechenden Punkt hindurchgeht.

Eine beliebige Curve des in Rede stehenden Systems kann als Erzeugniss einer beliebigen (2, 2)-Correspondenz zwischen den Schmiegungsebenen von Γ erhalten werden, d. h. als Ort der Punkte, in denen eine beliebige Schmiegungsebene des ersten Systems von den beiden ihr im zweiten System entsprechenden Schmiegungsebenen getroffen wird.

5. Ist die cubische Raumcurve C das Erzeugniss einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz von Schmiegungsebenen von Γ, so haben wir einen ausgezeichneten Specialfall der zuletzt betrachteten Lagenbeziehung vor uns, einen Fall, in dem die Beziehung zwischen C und Γ eine symmetri-

sche ist. Es gibt hier vier den beiden Curven gemeinsame Tangenten.

Solche zwei Curven C und Γ entsprechen einander in einem Nullsystem und diese Eigenschaft bestimmt ihre Lagenbeziehung vollständig.

Zur Definition ihrer Lagenbeziehung kann auch der Satz dienen: Es gibt eine Regelfläche vierten Grades, welche eine von den beiden Curven C und Γ zur Doppelcurve und die Developpable der anderen zur doppelt umschriebenen Developpablen hat.