

Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 2 Textfiguren.)

Bewegt sich eine Schallquelle in ruhender Luft mit constanter Geschwindigkeit, so entfernt sich die Schallwelle von der Schallquelle in deren Bewegungsrichtung mit einer Geschwindigkeit, welche gleich ist der Schallgeschwindigkeit vermindert um die Geschwindigkeit der Schallquelle. In der entgegengesetzten Richtung hingegen wird diese Geschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit vermehrt um die Geschwindigkeit der Schallquelle. Da es sich hier immer nur um die Geschwindigkeit der Schallquelle im Vergleich zu jener der Luft handelt, so können wir uns auch die Schallquelle als ruhend und die Luft in allen ihren Punkten mit constanter und gleichgerichteter Geschwindigkeit bewegt denken und sagen. die Schallgeschwindigkeit in der Windrichtung ist gleich der Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft vermehrt um die Windgeschwindigkeit u. s. w. In jeder zu der des Windes geneigten Richtung setzt sich die Schallgeschwindigkeit mit jener des Windes nach dem Geschwindigkeitsparallelogramm zusammen. Daraus folgt ohneweiters, dass die Mittelpunkte der Kugelwellen, welche von einer punktförmigen Schallquelle ausgehen, die Geschwindigkeit und Richtung des Windes besitzen. Eine ebene Schallwelle bewegt sich nur dann senkrecht zu sich selbst fort, wenn ihre Normale mit der Windrichtung parallel ist. In jedem anderen Fall wird die Fortpflanzungsrichtung mit der Wellennormalen einen Winkel

bilden. Es sind dies alles selbstverständlich Sachen, die sich leicht aus dem Huyghens'schen Princip ergeben, wenn wir bedenken, dass für eine Elementarwelle genau dasselbe wie für jede Kugelwelle gilt.

Nicht mehr so einfach gestaltet sich der Vorgang, wenn wir annehmen, dass die Windgeschwindigkeit sich mit dem Ort ändert. Denken wir uns z. B. vorerst den einfachen Fall, dass eine horizontale Ebene MN (Fig. 1) die Trennungsebene zwischen ruhender und gleichförmig bewegter Luft bildet.

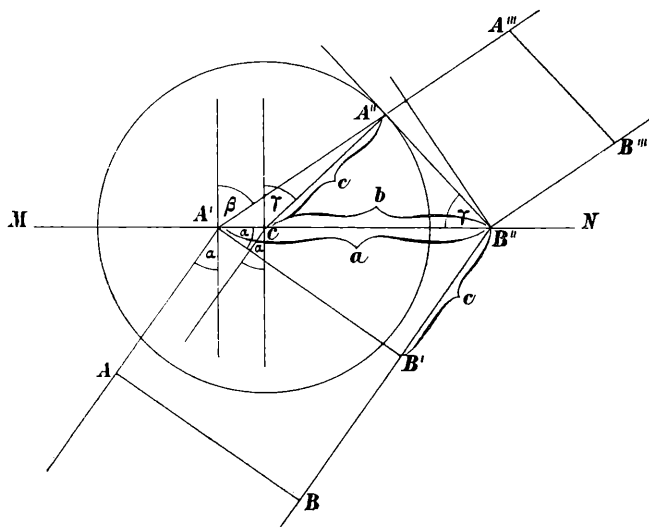


Fig. 1.

Diese sei oben, jene unten. Von unten komme unter dem Einfallswinkel α eine Planwelle AB gegen MN . In A' passiert der Punkt A die Trennungsebene. Gleichzeitig erleidet er daselbst eine Ablenkung in der Richtung $A'A''$, indem sich die Schallgeschwindigkeit v und die Windgeschwindigkeit w geometrisch summieren. Diese Ablenkung erfolgt der Reihe nach für alle Punkte zwischen A' und B' . Während B' nach B'' gelangt, legt der Wind den Weg $A'C$ zurück. Die Planwelle nimmt oberhalb MN die Lage $A''B''$ an und schreitet in der Richtung $A'A''$ fort. Wir haben also hier eine Brechung des Schalles bedingt durch die verschiedene Geschwindigkeit der Luftschichten.

Nach dieser Erörterung ist es nicht mehr schwer, das Brechungsgesetz aufzustellen, d. h. eine Beziehung zwischen dem Einfallswinkel α und dem Brechungswinkel β zu finden, wenn sowohl Schall-, als Windgeschwindigkeit gegeben ist.

Wir wollen die Strecken

$$A'B'' = a, B'B'' = CA'' = c, CB'' = b$$

setzen. Es ist nun

$$a \sin \alpha = b \sin \gamma = c.$$

ferner

$$\frac{a-b}{c} = \frac{v}{v'},$$

woraus leicht folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v - v' \sin \alpha}{v} \quad (1)$$

Aus dem Dreieck $A'A''C$ ergibt sich

$$\frac{\sin (\beta - \gamma)}{a-b} = \frac{\cos \beta}{c}$$

oder

$$\frac{\sin (\beta - \gamma)}{\cos \beta} = \frac{v}{v'} \quad (2)$$

Aus Gleichung (1) und (2) lässt sich ohne Schwierigkeit γ eliminieren, und es ist somit die gewünschte Beziehung zwischen Einfalls- und Brechungswinkel gegeben. Kennen wir gleichzeitig die Geschwindigkeit des Mediums als Function der Raumcoordinaten, so besitzen wir die Mittel, den jeweiligen Weg, welchen eine Welle zurücklegt, zu bestimmen. Es zeigt sich hier, dass die gebrochene Welle nicht mehr senkrecht auf ihrer Fortpflanzungsrichtung steht.

Wir wollen unsere allgemeinen Formeln auf den Fall anwenden, dass die Windgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit klein ist und sich nur mit der z -Ordinate eines rechtwinkligen Coordinatensystems ändert. Der Wind bewege sich parallel zur x -Axe. Der Einfallswinkel α sei von einem rechten Winkel nur wenig verschieden, so dass wir in Gleichung (1)

$$v' \sin \alpha = v, \text{ also } \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v - v'}{v}$$

setzen können. Diese Formel lässt sich wegen der Kleinheit des w gegenüber v auch so schreiben:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v}{v + w} \quad (3)$$

Da β unter diesen Verhältnissen ebenfalls nahezu 90° haben muss, so ist $\cos \beta$ eine sehr kleine Grösse, $\frac{w}{v} \cos \beta$ kann daher ohneweiters vernachlässigt werden, d. h. nach Gleichung (2)

$$\sin (\beta - \gamma) = 0 \text{ oder } \beta = \gamma$$

gesetzt werden. Gleichung (3) lässt sich also auch schreiben

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v + w}.$$

Nun ist aber v nichts anderes als die Geschwindigkeit der Schallwellen im ersten, $v + w = v'$ jene im zweiten Medium. Die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v'} \quad (4)$$

entspricht also vollständig dem gewöhnlichen Brechungsgesetz für eine Welle, welche die Grenzfläche zweier Medien passirt, in denen sie sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzt.

Es gibt demnach auch eine Totalreflexion, sobald der Winkel α eine gewisse Grenze überschreitet. Diese Totalreflexion ist jedoch nicht an unsere vereinfachenden Bedingungen gebunden. Sie folgt schon aus der allgemeinen Gleichung (1). Setzen wir in derselben $\sin \gamma = 1$, so erhalten wir ohneweiters den Grenzwinkel der Totalreflexion α_1 aus der Gleichung

$$\sin \alpha_1 = \frac{v}{v + w}.$$

Nehmen wir etwa an, die Schallgeschwindigkeit betrage $v = 330 \text{ m}$, die Windgeschwindigkeit w hingegen 10 m , so ergibt sich für den Grenzwinkel die Totalreflexion etwa $\alpha_1 = 86.8^\circ$

Bewegt sich der Schall nicht in der Richtung der x -Axe, sondern entgegengesetzt, so ist in Gleichung (4) $v > v'$. Für diesen Fall ist also eine Totalreflexion nicht möglich.

Wegen der inneren Reibung der Luft ist das von uns in Betracht gezogene Beispiel nicht streng realisierbar, sondern es kann sich die Windgeschwindigkeit nur stetig mit den Raumcoordinaten ändern. Wir wollen daher noch den Fall in Betracht ziehen, dass die Windgeschwindigkeit in der xy -Ebene gleich Null ist und mit der Höhe linear zunimmt. Die Geschwindigkeit einer Schallwelle bei den für Gleichung (4) nöthigen Bedingungen ist demnach

$$c = v + az.$$

Hat der Winkel β , welchen unser Schallstrahl mit der z -Axe macht, für eine bestimmte Geschwindigkeit c_1 den Werth β_1 , so gilt für alle Fälle

$$\frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \beta_1}{c_1} = A,$$

wobei A eine Constante ist. Es ist demnach

$$\sin \beta = A(v + az) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

In dieser Differenzialgleichung lassen sich die Variablen leicht trennen. Wir erhalten

$$\frac{A(v + az) dz}{\sqrt{1 - A^2(v + az)^2}} = dx.$$

Durch Integration ergibt sich

$$-\sqrt{1 - A^2(v + az)^2} = Aax + C,$$

oder durch weitere Umformung

$$\left(x + \frac{C}{aA}\right)^2 + \left(z + \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{A^2 a^2}.$$

Wir erhalten also die Gleichung eines Kreises, d. h. es beschreibt der Schallstrahl einen Kreisbogen. Bestimmen wir

die willkürliche Constante so, dass für $x = 0$ auch $z = 0$ und $C = -\sqrt{1-A^2v^2}$ wird, so resultirt die Gleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{1-A^2v^2}}{aA}\right)^2 + \left(z + \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{A^2a^2}$$

Die Constante A ist durch den Winkel bestimmt, unter welchem der Schallstrahl vom Coordinatenursprung ausgeht. Der Radius der Kreisbögen, nach welchen sich der Schall fortpflanzt, ist $\frac{1}{Aa}$. Er ist demnach sowohl vom Anfangswinkel, als auch vom Windgeschwindigkeitsgefälle a abhängig, das heisst er wird umso grösser, je langsamer die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zunimmt. Die Mittelpunkte sämtlicher Kreisbögen liegen in der Entfernung $\frac{v}{a}$ unterhalb der x -Axe.

In ganz analoger Weise, wie wir hier die Bahn für Schallwellen, welche sich in der Windrichtung bewegen, bestimmt haben, lässt sich die Rechnung für entgegengesetzt wandernde Wellen durchführen. Wir erhalten dafür die Gleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{1-A^2v^2}}{aA}\right)^2 + \left(z - \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{A^2a^2}$$

Während also im ersten Falle die Mittelpunkte der Kreisbögen unterhalb der x -Axe liegen, so befinden sie sich jetzt oberhalb. Ein Schallstrahl, der demnach horizontal beginnt, wird sich allmählig nach aufwärts krümmen, so dass ein Ohr,

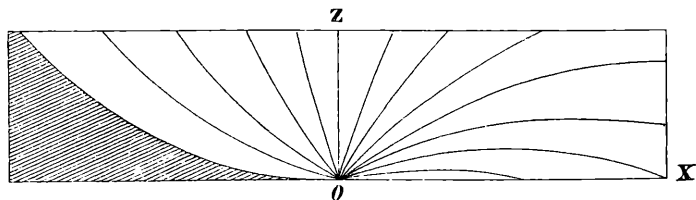


Fig. 2.

welches sich unterhalb des aufwärts gekrümmten Astes befindet, gar nichts zu hören bekommt. Fig. 2 versinnlicht die Wege, welche die unter verschiedenen Winkeln ausgehenden Schall-

strahlen zurücklegen. Es erklärt sich so auf sehr einfache Weise, warum wir den Schall nur schwer oder gar nicht wahrnehmen, wenn der Wind in der Richtung vom Ohr zur Schallquelle weht, dass hingegen eine deutliche Schallwahrnehmung bei entgegengesetzt wehendem Wind erfolgt.¹ Es ergibt sich daraus ferner die eigentlich auffallende Erscheinung, dass man den Schall gelegentlich sehr deutlich hören kann, obwohl zwischen Schallquelle und Ohr eine beträchtliche Erderhöhung liegt. Ich hatte zu wiederholtenmalen Gelegenheit, an einem Ort, der etwa 3 *km* von einer Eisenbahnstation entfernt und von derselben durch einen etwa 50 *m* hohen Bergrücken getrennt ist, sowohl das Pfeifen der Locomotiven, als auch das Rollen der Züge sehr deutlich wahrzunehmen. Dabei war es unmittelbar über dem Erdboden windstill und nur am Rauch höherer Schornsteine konnte man einen leichten Luftzug bemerken, der aus der Richtung des Bahnhofs kam. Es tritt dieser Fall nur einigemal des Jahres ein, aber immer unter der Begleiterscheinung derselben Windrichtung.

Dies stimmt nun alles vollkommen mit unseren Untersuchungen überein; denn suchen wir das Windgeschwindigkeitsgefälle a , welches einen Kreisbogen von 2 *km* Länge und 50 *m* Höhe ermöglicht — es muss dabei der Schall unter einem Winkel von $5^{\circ}43'$ zum Horizont ausgehen, — so erhalten wir $a = 0.034$. Das heisst: Ist auf der Erdoberfläche Windstille, so ist die Windgeschwindigkeit in einer Höhe von 100 *m* erst 3.4 *m*. Wir haben daher eine sehr ruhige Atmosphäre, was vollkommen zu den oben erwähnten Beobachtungen passt.

Stokes hat im Rep. of the Brith. Ass. 1857 (II, p. 27) eine ähnliche Erklärung für diese Erscheinungen gegeben.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: [105_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Jäger Gustav

Artikel/Article: [Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft
1040-1046](#)