Über einen mechanischen Satz Poincaré's

Ludwig Boltzmann,
M. k. Akad.

In der Entgegnung[1] gegen Herrn Zermelo's Abhandlung: »Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie«[2] habe ich den daselbst angeführten Satz Poincaré's ohne Weiteres zugegeben, da derselbe meinen wärmetheoretischen Sätzen nicht nur nicht widerspricht, sondern diese sogar bestätigt. Natürlich habe ich damit keineswegs dem vom Herrn Zermelo am citirten Orte gegebenen Beweise des Poincaré'schen Satzes zugestimmt. Dieser Beweis scheint mir vielmehr so wenig bis zur vollständigen Klarlegung aller Umstände, worauf es ankommt, ausgearbeitet zu sein, dass ich es nicht für überflüssig erachte, nochmals auf die Sache zurückzukommen und eine möglichst gedrängte Darstellung des Satzes selbst und seines Beweises zu geben.

Die Grundlage des in Rede stehenden Satzes ist die Eindeutigkeit und Umkehrbarkeit der Integrale der mechanischen Differenzialgleichungen[3] und das Liouville'sche Theorem. Sei die Lage eines beliebigen mechanischen Systems durch n generalisirte Coordinaten $p_1, p_2, \ldots p_n$ gegeben. $q_1, q_2, \ldots q_n$ seien die dazugehörigen Momente. Das System gehe zweimal von demselben

---

[1] Wied. Ann., Bd. 57, S. 773, 1896.

[2] Wied. Ann., Bd. 57, S. 485, 1896.

[3] Damit diese garantirt sei, genügt es nicht, dass die Kräfte stetige eindeutige Functionen der Coordinaten sind. Auch in diesem Falle können, wenn die Ableitungen dieser Functionen unendlich werden, die Integrale mehrdeutig sein. (Vergl. Cauchy-Moigno-Schnuse, Integralrechnung 1846, S. 288 und 387; Lipschitz, Lehrbuch der Algebra, S. 504; Picard j. de math. 1890, Bull. d. sciens.; Boussinesq, Par. c. r. 84, p. 944).

Anfangszustande, d. h. denselben Anfangswerthen der Coordinaten und Momente aus. Der Zustand (worunter wie immer der Inbegriff der $2n$ Werthe sämmtlicher Coordinaten und Momente verstanden werden soll), den es das einemal nach Verlauf einer gewissen Zeit t erreicht, soll also niemals irgendwie verschieden sein können von dem Zustande, den es das anderemal nach Verlauf derselben Zeit erreicht. Die Bewegung soll vollkommen umkehrbar sein; dann können auch niemals zwei verschiedene Anfangszustände während derselben Zeit zu dem gleichen Endzustande führen. Dieser Satz heisse der Satz A.

Wir denken uns nun dasselbe System, dessen Bewegung durch dieselben Differentialgleichungen bestimmt ist, unendlich oftmal vorhanden und jedesmal wieder von anderen Anfangszuständen ausgehend. Alle diese Anfangszustände sollen jedoch so beschaffen sein, dass in der Folgezeit niemals der Werth irgend einer der Coordinaten oder eines der Momente unendlich wird. Es muss sich daher jedenfalls ein endliches Gebiet H von endlicher Ausdehnung V angeben lassen, innerhalb dessen die Zustände liegen, welche alle betrachteten Systeme nach beliebig langer Zeit annehmen.

Sehr viele (N) aller dieser Systeme sollen so beschaffen sein, dass ihr Anfangszustand, d. h. der Zustand zur Zeit $t = t_0$ durch alle möglichen Punkte eines gewissen kleineren, jedoch ebenfalls endlichen Gebietes g_0 von der Ausdehnung γ dargestellt sind.

Unter einem endlichen Gebiete verstehen wir den Inbegriff aller Combinationen aller Werthe der Variabeln $p_1, p_2, \dots q_n$, welche folgenden Bedingungen genügen: Keiner der Werthe der Variabeln darf unendlich werden. Der Werth der ersten dieser Variabeln muss zwischen gewissen um Endliches verschiedenen Grenzen liegen. Für jeden dieser Werthe der ersten Variabeln bis auf eine Zahl von Werthen, die gegen die Gesammtzahl dieser Werthe verschwindet, muss auch der Werth der zweiten Variabeln zwischen gewissen um Endliches verschiedenen Grenzen liegen, welche bis auf eine endliche Zahl von Sprüngen continuirliche Functionen des gewählten Werthes der ersten Variable sind. Für alle Werthepaare der beiden ersten Variabeln (wieder bis auf eine gegen die Gesammtzahl der Werthepaare verschwindende Zahl von Werthepaaren) muss auch der Werth der dritten Variabeln zwischen gewissen endlichen Grenzen (Functionen der beiden Werthe der beiden ersten Variabeln) liegen u. s. f. bis zur letzten Variabeln. Eine bestimmte Combination von Werthen der Variabeln $p_1, p_2, \ldots q_n$, welche diesen Bedingungen genügen, also innerhalb des Gebietes liegen, nennen wir einen Punkt dieses Gebietes. Der durch die betreffenden Werthe der Coordinaten und Momente definirte Zustand heisst der durch diesen Punkt dargestellte oder ihm entsprechende Zustand oder ein in diesem Gebiete liegender Zustand. Ein Gebiet kann daher im Allgemeinen durch eine Ungleichung von der Form

$$f(p_1, p_2, \ldots q_n) \leqq 0$$

dargestellt werden. Unter der Ausdehnung eines Gebietes verstehen wir das bestimmte Integrale $\int\int \ldots dp_1 dp_2 \ldots dq_n$ erstreckt über alle Werthecombinationen der Variabeln, die in diesem Gebiete liegen, d. h. also über alle Punkte des Gebietes.

Da g_0 ein wenn auch sehr kleines, doch endliches Gebiet ist, so muss der Quotient V/γ endlich sein. Es sei n die erste ganze Zahl, die grösser als dieser Quotient ist, so dass man also hat:

$$n > V/\gamma. \tag{1}$$

Ferner sei ϑ eine beliebige endliche Zeit. Die Zustände unserer N Systeme sollen zur Zeit $t_1 = t_0 + \vartheta$ im Gebiete $g^{(1)}$, zur Zeit $t_2 = t_0 + 2\vartheta$ im Gebiete $g^{(2)}$ u. s. f. liegen. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1. Die Gebiete $g^{(1)}, g^{(2)} \ldots g^{(k)}$ haben, wie immer wir die Länge der endlichen Zeit ϑ und wie gross wir die Zahl k wählen mögen, immer endliche Theile mit dem Gebiete g_0 gemein. Dann gibt es in aller Zukunft unter den N Systemen eine unendliche Anzahl von solchen, deren Zustände einem Punkte des Anfangsgebietes g_0 entsprechen.

Fall 2. Das sub Fall 1 Gesagte tritt nicht ein; dann sei τ die kürzeste Zeit, nach welcher das von den Zuständen der N Systeme erfüllte Gebiet keinen endlichen Theil mehr mit dem Gebiete g_0 gemein hat. Der Satz Poincaré's geht nun dahin, dass sich dann immer eine endliche Zeit angeben lässt, nach welcher wieder die Zustände unendlich vieler der N Systeme Punkten des Gebietes g_0 entsprechen. Da dies nun im Falle 1 für jede beliebige endliche verstrichene Zeit gilt, so kann man sagen: Entweder es entsprechen überhaupt immer die Zustände einer unendlichen Zahl der N Systeme gewissen Punkten des Anfangsgebietes g_0 oder, wenn dieser Fall nicht zu allen Zeiten zutrifft, so tritt er immer eine endliche Zeit, nachdem er aufgehört hat, zuzutreffen, wieder ein. Wenn dem Gebiete g_0 kein Punkt, der der Ruhe in einem Gleichgewichtszustande entspricht, für den also alle Momente Null und alle Coordinaten constant sind, angehört oder unendlich nahe liegt, so kann übrigens das Gebiet g_0 immer so klein gewählt werden, dass nicht der Fall 1, sondern der Fall 2 eintritt.

Wir haben nur noch den Poincaré'schen Satz im Falle 2 zu beweisen. Es seien $g_1, g_2, .$ die Gebiete, innerhalb deren zu den Zeiten $t_1 = t_0 + \tau$, respective $t_2 = t_0 + 2\tau \ldots$ die Zustände unserer N Systeme liegen, deren Anfangszustände durch sämmtliche Punkte des Gebietes g_0 dargestellt wurden. Wir verfolgen zunächst die Bewegung der N Systeme bis zur Zeit $t_n = t_0 + n\tau$. Die gesammte Ausdehnung aller Gebiete $g_0, g_1, \ldots g_n$ wäre, wenn kein einziges dieser Gebiete mit irgend einem anderen einen endlichen Theil gemein hätte, gleich $n\gamma$. Nun müssen aber alle diese Gebiete im Gebiete H liegen, daher kann ihre Gesammtausdehnung nicht grösser als V sein, und da nach der Ungleichung 1) $n\gamma > V$ ist, so müssen wenigstens zwei der Gebiete $g_0, g_1, . . g_n$ einen endlichen Theil gemein haben. Es mögen dies die Gebiete g_a und g_b sein, wobei a und b zwei verschiedene ganze Zahlen sind, die kleiner oder höchstens gleich n sind; b sei die grössere derselben. Der gemeinsame Theil der beiden Gebiete sei s. Das Gebiet s muss ein continuirlich zusammenhängendes sein. Es kann nicht durch unendlich viele Punkte, die Mannigfaltigkeiten von weniger als $2n$ Dimensionen bilden und nicht den Gebieten g_a und g_b gemeinsam sind, in unendlich viele unendlich wenig ausgedehnte Theile getheilt werden; denn dann müsste mindestens eines der Gebiete g_a oder g_b selbst Theile haben, die in solcher Weise aus lauter unendlich kleinen, nicht zusammenhängenden Theilen bestehen, was unmöglich ist; denn wenn die Kräfte im ganzen Gebiete eindeutige nach dem Taylor'scher

Lehrsatze entwickelbare Functionen der Coordinaten sind, so können nicht die Zustände solcher Systeme nach einer endlichen Zeit ein unzusammenhängendes Gebiet erfüllen, welche vor dieser Zeit ein continuirlich zusammenhängendes Gebiet g_0 erfüllten, was wir den Satz C nennen wollen. Jeder Punkt des Gebietes s gehört sowohl dem Gebiete g_a, als auch dem Gebiete g_b an, d. h. den ihm entsprechenden Zustand hat eines unserer N Systeme (das System S_a) zur Zeit $t_a = t_0 + a\tau$ und auch eines unserer N Systeme (das System S_b) zur Zeit $t_b = t_0 + b\tau$. Es muss daher nach dem Satze A das System S_a auch zur Zeit $t_{a-1} = t_0 + (a-1)\tau$ genau denselben Zustand haben wie das System S_b zur Zeit $t_b = t_0 + (b-1)\tau$. Da ersterer Zustand dem Gebiete g_{a-1}, letzterer dem Gebiete g_{b-1} angehört, so müssen also auch die letzteren zwei Gebiete einen gemeinsamen Punkt haben, und da dasselbe von allen Punkten des Gebietes s gilt, so müssen, sobald die Gebiete g_a und g_b einen gemeinsamen Theil s haben, auch die beiden Gebiete g_{a-1} und g_{b-1} einen gemeinsamen Theil s' haben, dessen Ausdehnung nach dem Liouville'schen Satze gleich der Ausdehnung des Gebietes s sein muss, was wir den Satz B nennen wollen. Denn das Gebiet s umfasst die Zustände aller Systeme, deren Zustände vor der Zeit τ innerhalb s' lagen, genau so wie das Gebiet g_1 die Zustände aller Systeme umfasst, deren Zustand vor der Zeit τ innerhalb g_0 lagen. Schliesst man ebenso von $a-1$ und $b-1$ auf $a-2$ und $b-2$ u. s. f., so überzeugt man sich, dass auch die Gebiete g_0 und g_{b-a} ein Gebiet s_0 von derselben Ausdehnung wie das Gebiet s gemein haben müssen. Es muss also unter den Gebieten $g_1, g_2, \ldots g_n$ mindestens eines existiren, welches einen endlichen Theil s_0 mit dem Gebiete g_0 gemein hat. Da jeder Punkt des Gebietes s_0 innerhalb des Gebietes g_{b-a} liegt, so stellt er den zur Zeit $t_0 + (b-a)\tau$ gehörigen Zustand eines unserer N Systeme (des Systems Σ) dar. Das System Σ ist also ein Beispiel eines unserer N Systeme, welches während der Zeit $(b-a)\tau$ zu einem Zustande zurückkehrt, der wieder durch einen innerhalb g_0 liegenden Punkt dargestellt wird, und da dasselbe von jedem anderen Punkte des Gebietes s_0 gilt, so haben wir den zu beweisenden Satz bewiesen, dass unendlich viele von den N Systemen, deren

Anfangszustände durch Punkte des Gebietes g_0 dargestellt sind, nach Verlauf einer Zeit, die kleiner als $n\tau$ ist, wieder zu einem Zustande zurückkehren müssen, der irgend einem Punkte des Ausgangsgebietes g_0 entspricht. Sind die Ausdehnungen γ und V, sowie die Zeit τ gegeben, so ist $n\tau$ eine endlich angebbare Zeit. Wir können also den bewiesenen Poincaré'schen Satz, indem wir das Ausgeführte nochmals zusammenfassen, wie folgt aussprechen:

Wir betrachten N Systeme, deren Anfangszustände durch sämmtliche Punkte eines beliebigen endlichen Gebietes g_0 von der Ausdehnung γ dargestellt sind und nehmen an, dass für keines dieser Systeme der Werth irgend einer Coordinate oder eines Momentes, wenn es sich auch noch so lange bewegt, unendlich wird, so dass sich ein Gebiet von endlicher Ausdehnung V angeben lässt, ausserhalb dessen keiner der nach beliebiger Zeit folgenden Zustände unserer N Systeme liegt. Es sind dann zwei Fälle möglich: Im Falle 1 entsprechen in jedem Momente einer beliebig langen endlichen, auf den Zeitanfang folgenden Zeit die Zustände einer unendlichen Zahl unserer N Systeme Punkten desselben Gebietes g_0. Im Falle 2 ist dies nach einer endlichen Zeit τ nicht mehr der Fall, muss aber jedenfalls nach einer Zeit, die kürzer ist als die endliche Zeit $V\tau/\gamma$, wieder eintreten. Da dasselbe natürlich auch von jeder kleineren endlichen Unterabtheilung des Gebietes g_0 gilt, so können wir sagen: Es kann unter den N Systemen zwar solche (sogar deren unendlich viele) geben, deren Zustände in einer endlichen Zeit das Gebiet g_0 verlassen und niemals während einer beliebig langen Zeit wieder in dasselbe zurückkehren; allein die Punkte P, welche die Anfangszustände aller so beschaffenen Systeme darstellen, können im Anfangsgebiete g_0 niemals ein Gebiet von endlicher Ausdehnung bedecken. Sie bilden, wie sich Poincaré ausdrückt, singuläre Fälle. In der That, wenn wir die Punkte des Anfangsgebietes g_0, welche solchen Systemen entsprechen, deren Zustände dasselbe entweder während beliebig langer Zeit nicht verlassen oder nach endlicher Zeit wieder zu Punkten des Anfangsgebietes zurückkehren, mit Q bezeichnen, so haben wir bewiesen, dass in jeder Unterabtheilung des Gebietes g_0 von endlicher Ausdehnung unendlich viele Punkte Q existiren, welche auch ein endlich ausgedehntes Gebiet bedecken, von dem allerdings noch nicht bewiesen ist, dass es nicht kleiner als die betreffende Unterabtheilung sein kann. Das Gebiet g_0 ist ein $2n$-fach ausgedehntes. Es kann nach dem Bewiesenen kein endlicher Theil von g_0 in unendlich viele unendlich dicht gedrängte Mannigfaltigkeiten von weniger als $2n$ Dimensionen zerfallen, die abwechselnd bald aus Punkten P, bald aus Punkten Q bestehen. Die Zahl der Punkte P innerhalb des Gebietes g_0 muss also unendlich klein im Vergleich mit der Zahl der Punkte Q sein. Die Punkte P können nirgends ein endliches zusammenhängendes Gebiet und auch nicht unendlich viele unzusammenhängende Gebiete, deren Gesammtausdehnung einem endlichen gleichkäme, erfüllen.

Wir haben bisher nur von der einmaligen Wiederkehr des den Zustand darstellenden Punktes in das Anfangsgebiet g_0 gesprochen, da der Beweis einer solchen für die wärmetheoretische Anwendung vollkommen genügt. Nur der Vollständigkeit halber will ich kurz ausführen, wie eine beliebig oftmalige Wiederkehr zu beweisen ist. Nehmen wir eine Zahl von singulären Punkten aus, d. h. solchen, deren Inbegriff nur eine unendlich kleine Ausdehnung hat, so stellt jeder Punkt D des Anfangsgebietes g_0 den Anfangszustand eines Systems dar, dessen Zustand nach irgend einer endlichen Zeit $t < V\tau/\gamma$ wieder durch einen Punkt E des Gebietes g_0 dargestellt wird. Wegen des Satzes C muss es ein endliches, den Punkt D umgebendes, innerhalb g_0 liegendes Gebiet k_0 von solcher Beschaffenheit geben, dass jeder Punkt desselben den Anfangszustand eines Systems darstellt, dessen Zustand zur Zeit t wieder durch einen Punkt eines anderen endlichen innerhalb g_0 liegenden, den Punkt E umgebenden Gebietes k dargestellt wird. Von diesem Gebiete k gilt aber dasselbe, was von jedem endlichen Theile des Gebietes g_0 bewiesen wurde. Mit Ausnahme singulärer Punkte stellen alle Punkte desselben Zustände von Systemen dar, deren Zustand nach abermals einer endlichen Zeit wieder durch einen Punkt des Gebietes k und daher auch des Gebietes g_0 dargestellt wird. Die Zustände aller dieser Systeme wurden also zu Anfang und dann noch zweimal durch Punkte des Gebietes g_0 dargestellt. Da dasselbe wie vom Gebiete k_0 auch von jedem anderen endlichen Theile des Gebietes g_0 gilt, so ist bewiesen, dass, von singulären Punkten abgesehen, alle Punkte des Gebietes g_0 die Anfangszustände solcher Systeme darstellen, die noch zweimal nach endlicher Zeit wieder durch Punkte des Anfangsgebietes g_0 dargestellt werden. Ebenso kann der Beweis der dreimaligen und einer eine beliebige endliche Zahl mal wiederholten Wiederkehr geliefert werden.

An dem Massstabe des Gesagten können wir nun die Ausführungen Herrn Zermelo's messen. Derselbe macht von dem Satze, den wir den Satz B nannten, gar keinen Gebrauch. Er bezeichnet mit G den Inbegriff aller Zustände, die künftig einmal in endlicher Zeit (sagen wir bis zur Zeit T) aus solchen hervorgehen, die zur Zeit t im Gebiete g lagen, und mit Γ und γ die Ausdehnungen der Gebiete G und g. Die nun folgenden Ausführungen Herrn Zermelo's waren mir nicht verständlich. Aber es sind nur zwei Fälle möglich.

Fall 1. Er denkt sich die Ausdehnung jedes Theiles des Gebietes G in der Ausdehnung Γ so oftmal gezählt, als dieser Theil während der Zeit $T-t$ von Zuständen der Systeme durchstrichen wird. Dann kann Γ mit wachsendem T beliebig weit wachsen. Denkt man sich dann T constant, aber t wachsend, so kann allerdings Γ nur abnehmen; allein der Schluss Herrn Zermelo's l. c. S. 488, dass aus der Gleichung $\gamma =$ const. und $\Gamma \geqq \gamma$ folgt, dass Γ constant sein müsse, wird falsch. Denkt man sich aber beide Zeiten t und T wachsend, so dass $T-t$ constant bleibt, so ist allerdings Γ constant, aber dann wird wieder der Schluss hinfällig, dass Γ nur abnehmen könne.

Fall 2 wäre nun der, dass man die Ausdehnung jedes Theiles des Gebietes G, selbst wenn dasselbe beliebig oftmal von den Zuständen der Systeme durchstrichen wird, nur einmal in die Ausdehnung Γ zählt. Dann kann das Gebiet G nicht grösser als das von mir oben mit H bezeichnete werden, seine Ausdehnung muss also mit wachsendem T sich einer endlichen Grenze nähern, und wenn T so gross ist, dass wir dieser schon genügend nahe sind, so kann Γ auch, wenn T und t gleichzeitig so wachsen, dass $T-t$ constant bleibt, nur abnehmen; anderseits ist dann auch der Schluss, dass bei solchem gleichzeitigen Wachsthume von T und t Γ constant bleiben muss, gerechtfertigt. Allein dann kann jeder Theil dieses Gebietes von jedem Zustande beliebig oftmal durchlaufen werden, und da Herr Zermelo von dem Satze B keinen Gebrauch macht, so hat er keinen Beweis geliefert, dass dies nicht für Gebiete, die den Anfangszustand keines der betrachteten Systeme enthalten, öfter als eine bestimmte endliche Zahl von Malen geschehen kann, bevor irgend eines dieser Systeme zu einem Zustande des Anfangsgebietes zurückgekehrt ist. Er kann daher auch keine obere Grenze für die Zeit angeben, nach welcher irgend eines der betrachteten Systeme zu einem solchen Zustande zurückkehren muss, und hat keinen Beweis geliefert, dass nicht jedes der Systeme erst nach einer unendlichen Zeit zu einem solchen Zustande zurückkehrt, der durch einen Punkt des Anfangsgebietes dargestellt ist. Zu dem letzteren Beweis ist durchaus der Satz, den wir den Satz B nannten, unentbehrlich, und dessen Consequenz, dass wenn zwei beliebige von den Gebieten, welche wir mit $g_0, g_1, g_2, .$ bezeichnet haben, einen Theil gemein haben, dann auch eines dieser Gebiete mit dem Anfangsgebiete g_0 einen Theil von gleicher Ausdehnung gemein haben muss.

Da der Poincaré'sche Satz selbst richtig ist, so kann natürlich kein Zweifel sein, dass sich der Beweis Herrn Zermelo's ergänzen lässt; aber ich glaube, dass jeder Mathematiker meiner Meinung sein wird, dass man sich gerade bei Schlussfolgerungen, wie die in Rede stehenden, vollkommen präcise ausdrücken und kein wesentliches Glied als selbstverständlich mit Stillschweigen übergehen soll.

Praktisch zeigt sich dies darin, dass sich an der Hand der Ausführungen des Herrn Zermelo allein eine numerische obere Grenze für die Zeit der Rückkehr in einem bestimmten Falle, wie ich sie z. B. in der citirten Abhandlung berechnet habe, nicht angeben lässt, da in denselben der Begriff der Zeit τ, nach welcher sämmtliche Zustände der N Systeme aus dem Anfangsgebiete g_0 ausgetreten sind, vollkommen fehlt. Unter alleiniger Benutzung der Schlüsse des Herrn Zermelo kann diese obere Grenze noch beliebig gross, also auch unendlich sein.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Boltzmann Ludwig

Artikel/Article: Über einen mechanischen Satz P oincaré's. 12-20