©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Undulationen ebener Curven C_6^4

(I. Mittheilung)

Prof. **Wilh. Binder** in Wiener-Neustadt.

(Mit 12 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Februar 1897.)

Curven mit drei reellen Doppelpunkten.

Soweit mir die Literatur der geometrischen Wissenschaft zu Gebote steht, ist mir nicht bekannt, dass vorstehendes Thema bisher näher studirt worden sei. Salmon gibt in seinem Werke[1] auf S. 43 eine allgemeine Definition einer Undulation auf höheren Plancurven und S. 268 die Anzahl derartiger Singularitäten speciell auf Curven vierter Ordnung, ohne sich eingehender darüber zu verbreiten. Ich meine, dass die Sache wichtig genug wäre, um zur vollständigen Bekanntschaft der charakteristischen Eigenschaften einer Curve vierter Ordnung mindestens im gleichen Grade beizutragen, wie solches z. B. in Bezug der Doppeltangenten oder der Inflexionselemente bis jetzt mit vielem Nutzen zur Kenntniss benannter Curven geschehen ist. Die Lücke, welche in der Theorie, insbesondere der Unicursalcurven vierter Ordnung, bisher durch die Ausserachtlassung der Undulationseigenschaften besteht, vermag ich mir nicht anders zu erklären, als dass die Grundaufgabe des Problems: »Durch drei Punkte, die nicht auf einem gegebenen Kegelschnitte liegen, an diesen vierpunktig berührende Kegelschnitte zu legen«, noch keiner Lösung entgegengeführt wurde.

---

[1] Analyt. Geom. der höh. Plancurven. Deutsche Bearb. von Dr. W. Fiedler. Leipzig 1873, bei B. G. Teubner.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Als ich im vergangenen Frühlinge während der Drucklegung meines Buches[1] mit den Correcturen desselben beschäftigt war, habe ich die Anregung zu einer Lösung des vorgelegten Problems gefunden, ohne mehr zu meinem Bedauern die Resultate derselben für den Inhalt des Buches verwerthen zu können.

Der Schwierigkeit der erwähnten Grundaufgabe gegenüber habe ich mich keineswegs verschlossen, weshalb ich vorzog, einen andern zum Ziele führenden Weg einzuschlagen: indem ich von der a priori gelösten Aufgabe zurückgreife. Diesen Gang und die damit verbundenen Ergebnisse für die Undulationselemente einer speciell unicursalen Plancurve vierter Ordnung zu zeigen, ist Zweck und Inhalt des nachstehenden Aufsatzes.

Die Curve mit einer Undulation.

1. Das Punktenquadrupel, welches eine beliebige Gerade mit einer Plancurve vom Symbole C_6^4 gemeinsam hat, kann in seinen Elementen Coincidenzen bilden, wodurch die verschiedenen Tangentenarten der Curve hervorgehen. Von diesen Tangentenarten begreift diejenige, welche im Berührpunkte einen Zusammenfall von vier Elementen anzeigt, eine »Undulation« auf der Curve. Aus dieser Definition folgt, dass eine Undulationstangente keinen Tangentialpunkt besitzen kann und dass man sich eine solche immerhin hervorgegangen aus einer Doppeltangente denken kann, auf welcher die beiden Berührpunkte zur Deckung gelangten; oder auch entstanden aus einer Wendetangente, deren Berührpunkt sich ebenfalls mit ihrem Tangentialpunkt vereinigt hat. Dabei muss eine Undulationstangente wohl unterschieden werden von einer Tangente in einem »Berührknoten« oder in einer »Schnabelspitze«, welche Singularitäten bekanntlich gleichfalls vier Punktenelemente zur Coincidenz bringen; allein hier berühren sich jedesmal zwei Äste der Curve, was in einem Undulationspunkte nicht der Fall ist, indem derselbe sich nur auf einem und demselben

[1] Theorie der unicurs. Plancurven vierter bis dritter Ordn. in synthet. Behandlung. Mit 65 Fig. im Texte und auf 2 Taf. 400 S. 8⁰. Leipzig 1896, bei B. G. Teubner.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Curvenzug befindet. Der Unterschied beider Fälle ist beiläufig demjenigen vergleichbar, wie er zwischen einer Inflexions- und einer Doppelpunktstangente stattfindet, wo auch jedesmal der eine Tangentialpunkt in den Berührpunkt hineinfällt, jedoch im Falle einer Knotentangente auf dem andern Curvenzuge gelegen ist.

2. Wird eine Curve vierter Ordnung nach den Principien einer quadratischen Verwandtschaft auf einen Grundkegelschnitt transformirt, so entspricht bekanntlich dem Tangentensysteme, dessen Enveloppe die Curve ist, ein Kegelschnittsnetz mit drei Grundpunkten, welche letzteren die bildlich entsprechenden Hauptpunkte der drei Curvendoppelpunkte sind; die Individuen dieses Netzes berühren im Allgemeinen jenen Grundkegelschnitt einfach, insoferne sie die Transformirten von einfachen Curventangenten sind, wogegen den Doppeltangenten und den Inflexionstangenten der Curve im Netze die doppelt berührenden, respective osculirenden Individuen entsprechend sind. Demgemäss wird: »eine Undulationstangente der Curve als ein Kegelschnitt des Netzes transformirt, welcher den Grundkegelschnitt in einem Punkte undulirt«, d. h. in ihm eine Berührung dritter Ordnung (vierpunktig) eingeht. Dieser Netzkegelschnitt, sowie sein Berührpunkt sind im quadratischen Sinne die Bilder der beiden »Undulationselemente« auf der Plancurve.

3. Nachdem das Vorkommen undulirender Kegelschnitte in dem vorbezeichneten Netze an ganz bestimmte Voraussetzungen gebunden sein wird, die nicht unter allen Umständen als gegeben gedacht werden können, so werden wir, um die betreffenden Eigenschaften studiren zu vermögen, zweckmässig den umgekehrten Weg einschlagen, indem wir bei den Grundannahmen einer quadratischen Beziehung zwischen einem bestimmten Grundkegelschnitt und der dadurch bedingten Curve vierter Ordnung hievon ausgehen. Behufs dessen wählen wir beliebig wo in der Ebene einen Kegelschnitt k mit einem Punkt auf ihm und einem Punkt ausser ihm; der erstere sei mit $\overline{P}_1$, der letztere mit $\overline{O}_3$ bezeichnet. Durch diese Annahmen ist ein zweiter Kegelschnitt π_1 bestimmt, welcher k in $\overline{P}_1$ undulirt und durch $\overline{O}_3$ zieht (Fig. 1).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(Bemerkung. Bekanntlich erhält man einen beliebigen Punkt von π_1 folgend: Wir fixiren zunächst die Tangente $\bar{p}_1$ in $\bar{P}_1$ an k, sowie auch den zweiten k-Schnitt $\bar{Z}$ des Strahles $|\bar{O}_3\bar{P}_1|$. Ein beliebiger $\bar{O}_3$-Strahl schneidet $\bar{p}_1$ in einem Punkte τ; zieht man die Gerade $|\bar{Z}\tau|$, so trifft sie k in einem Punkte $\bar{X}$, dessen Verbindungslinie mit $\bar{P}_1$ den $\bar{O}_3$-Strahl in einem Punkte ξ von π_1 schneidet [Fig. 2].)

Auf π_1 werden zwei Punkte $\bar{O}_1\bar{O}_2$ beliebig ausgewählt, und nun wird das Tripel $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ als das Hauptdreieck einer quadratischen Verwandtschaft so angesehen, wie ich in Art. [56][1] auseinandergesetzt habe. Darnach wird sich der Grundkegelschnitt k im Allgemeinen als eine Curve C_6^4 abbilden, die zunächst die beiden Punkte $(\bar{O}_1 \equiv) O_2$, $(\bar{O}_2 \equiv) O_1$ als Doppelpunkte besitzt; der dritte Doppelpunkt O_3 ist jener Schnitt, den man auf dem dem Dreieck umschriebenen Hauptkreise $\varkappa$ mittelst der Geraden $|\bar{O}_3 O_3| \parallel |\bar{O}_1\bar{O}_2|$ erhält, wobei die Punkte $O_3\bar{O}_3$ insbesondere noch durch die ihnen in [43] zukommende Eigenschaft als »Perspectivitätscentra« der beiden Systeme: des Grundkegelschnittes k und der Curve C_6^4 — ausgezeichnet erscheinen (Fig. 1).

(Bemerkung. Nach der Auffassung in [44] stellt $\varkappa$ eine Deckung von zwei congruenten Kreisen vor, deren jeder für sich das Bild der den beiden Systemen $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, $O_1O_2O_3$ perspectivisch gemeinschaftlichen ∞ fernen Geraden der Trägerebene dieser zwei Systeme ist.)

4. In der Weise des Art. [58] wird von einem beliebigen Punkte $\bar{X}$ des Grundkegelschnittsystems das Bild X gefunden, wenn wir ihn zunächst durch Strahlen mit den Hauptpunkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ verbinden: »Die homologen dieser Geraden treffen sich im X-Punkte«. So z. B. ziehen wir durch das Perspectivcentrum $\bar{O}_3$ eine Parallelgerade zu $|\bar{O}_1\bar{X}|$ und verbinden deren Hauptkreisschnitt mit $O_1(\equiv \bar{O}_2)$, so ist diese Verbindungslinie der homologe Strahl von $|\bar{O}_1\bar{X}|$; analog verhält sich die Sache für den Strahl $|\bar{O}_2\bar{X}|$. Hingegen bekommt man den homologen

---

[1] Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf den betreffenden Artikel meines oben citirten Buches; diejenigen in ( ) auf den damit bezeichneten Artikel der vorliegenden Abhandlung.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Strahl von $|\overline{O}_3\overline{X}|$ direct als Verbindungslinie des O_3-Centrums mit jenem Hauptkreisschnitte, den $|\overline{O}_3\overline{X}|$ auf dem Hauptkreise $\varkappa$ erzeugt (Fig. 3).

Auf diese Art ist die Curve der geometrische Ort jener X-Punkte, die wir als Bilder von entsprechenden $\overline{X}$-Punkten des Grundkegelschnittes k erhalten. Bilden wir demgemäss den in (3) bezeichneten Undulationspunkt $\overline{P}_1$ als P_1 in die Curve C_6^4 ab, so wird er daselbst seine Eigenschaft als ein Undulationspunkt beibehalten, d. h. die in ihm gehende Tangente p_1 wird vier unendlich nahe auf einander folgende Punkte der Curve vereinigen, so dass die Curve in diesem Coincidenzelemente, und zwar nur auf der einen Seite von p_1 sich viel näher anschmiegt, als solches bei irgend einer andern Tangentengattung der C_6^4 stattfindet (Fig. 1).

Die p_1-Tangente erhalten wir unmittelbar, wenn P_1 mit dem Bilde irgend eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes π_1 verbunden wird.

Anmerkung *a*. Es ist durchaus nicht nothwendig, den in (3) angenommenen und zur Erzeugung des Kegelschnittes π_1 verwendeten $\overline{O}_3$-Punkt gleichzeitig als Hauptpunkt im Hauptdreieck $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ gebrauchen zu müssen, sondern man kann auch folgend zu Werke gehen: Sind zwei in einem Punkte $\overline{P}_1$ einander undulirende Kegelschnitte $k\pi_1$ bekannt, so nehme man auf dem einen derselben, z. B. π_1, ganz beliebig die Hauptpunkte $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ an und verfahre dann, wie oben angegeben ist. In dieser Voraussetzung ist in Fig. 4 und 5 vorgegangen worden, wo der Grundkegelschnitt k den Kegelschnitt π_1 umschliesst, während in Fig. 1 das Gegentheil stattfindet.

5. In [85] und a. a. O.[1] habe ich gezeigt, dass eine C_6^4 ihre vier Doppeltangenten mit durchwegs reellen Berührpunkten besitzen kann, dass sie aber dann stets, und zwar nur ein einziges Paar reeller Inflexionselemente enthält, was vorkommen kann, gleichgiltig ob der Grundkegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist. Wir werden dabei die Beobachtung machen, dass diese reellen Inflexionspunkte, sowie auch die

---

[1] Über die Realität der Doppeltangenten etc. Zeitschr. für Math. u. Phys., XXXV. Bd., 1. Heft.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zwei Berührpunkte der einen Doppeltangente immer einander begleiten oder »adjungiren«, und zwar stets auf einem und demselben Aste oder Curvenzug, so dass sie nicht durch einen Doppelpunkt der Curve getrennt erscheinen, wogegen eine Doppeltangente von imaginären Inflexionen begleitet wird, sobald deren Berührpunkte durch einen Doppelpunkt geschieden sind.

Es ist nun ohne Schwierigkeit einzusehen, dass eine Coincidenz der Berührpunkte auf einer Doppeltangente nur in dem ersteren der beiden eben betrachteten Fälle möglich ist, wo nämlich diese Punkte durch keinen Doppelpunkt getrennt werden; findet aber dieser Coincidenzfall wirklich statt, dann geht die Doppeltangente in eine Undulationstangente über, und das betreffende adjungirte reelle Inflexionselementenpaar muss sich ebenfalls im Undulationspunkte vereinigen. Oder man kann auch sagen: dass sich die beiden stationären Tangenten mit der von ihnen adjungirten Doppeltangente decken und vereint die als zwei Elemente zählende Undulationstangente formiren.[1]

Unsere Untersuchung culminirt somit in dem Satze: »Die sechs Inflexionselemente einer ebenen C_6^4 sind paarweise den Berührelementen je einer Doppeltangente adjungirt«.

Anmerkung *b*. Wenn oben darauf [85] hingewiesen wurde, dass eine C_6^4 mit vier eigentlichen Doppeltangenten die Transformirte einer Hyperbel sein kann, so darf dieses nicht zu dem Missverständnisse leiten, als wenn eine solche Curve nicht auch von einem anderen Grundkegelschnitt abgeleitet werden könnte. Es thut nichts zur Sache, dass in Fig. 5 die Curve C_6^4, welche wirklich hier von einer Ellipse k ihre quadratische Abstammung erhält, mit drei eigentlichen Doppel- und einer Undulationstangente ausgestattet ist, denn die letztere bedeutet nur eine zufällige Eigenschaft, und man muss thatsächlich diese Curve als eine solche mit vier eigentlichen Doppeltangenten ansehen, wodurch der Satz in [84] seine Richtigkeit behält.

---

[1] Vergl. S. 268 des citirten Salmon-Fiedler'schen Werkes.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Curve mit zwei Undulationen.

6. Um eine Curve dieser Eigenschaft herzustellen, werden wir von folgenden Bedingungen auszugehen haben. Denken wir uns zunächst die Annahmen betreffend den Grundkegelschnitt k mit dem ihn in $\overline{P}_1$ undulirenden und durch $\overline{O}_3$ ziehenden Kegelschnitt π_1 conform jenen in (3). Unter den gleichen Voraussetzungen ist für einen zweiten Kegelschnitt π_2, der k in einem beliebigen Punkte $\overline{P}_2$ undulirt und durch $\overline{O}_3$ läuft, Raum gegeben. Beide Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ haben ausser $\overline{O}_3$ noch drei andere Punkte $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{S}$ gemeinschaftlich, von denen wir $\overline{O}_1\overline{O}_2$ im Vereine mit $\overline{O}_3$ als Ecken des Hauptdreiecks annehmen und dem letzteren den Hauptkreis $\varkappa$ umschreiben. Mittelst der zu $|\overline{O}_1\overline{O}_2|$ parallelen Geraden, die durch $\overline{O}_3$ zieht, erhält man auf $\varkappa$ den Punkt O_3. Alles Andere bleibt jetzt den Ausführungen in (3) gleich, so dass also der Grundkegelschnitt k als eine Curve C_6^4 mit den Doppelpunkten $O_1(\equiv\overline{O}_2)$, $O_2(\equiv\overline{O}_1)$, O_3 abgebildet erscheint, welche in den Bildpunkten P_1P_2 zwei Undulationen besitzt; sie kann demnach höchstens nur mehr zwei eigentliche Doppeltangenten haben, von denen nach dem Satze (5) bloss die eine ein Paar reelle Inflexionen adjungirt hat, weil von den sechs möglichen je ein Paar durch die Punkte P_1P_2 absorbirt werden (Fig. 6).

7 Vorerst wollen wir noch jene Verhältnisse ins Auge fassen, welche gleichzeitig für die den Doppeltangenten Δ entsprechenden, den Grundkegelschnitt k doppelt berührenden Kegelschnitte δ stattfinden.

Jeder δ-Kegelschnitt, als Individuum des Fundamentalnetzes (2) hat mit dem Grundkegelschnitte eine Berührsehne $\bar{p}$ gemeinsam, die jedoch nicht etwa als »Bild« einer Undulationstangente p verwechselt werden darf. Wir erhalten die vier Sehnen $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3\bar{p}_4$ nach dem Constructionsschema in [82] oder [83], je nachdem die betreffenden Verzweigungspaare $\overline{V}\overline{V}'$ oder die Nachbarpunktenpaare $\overline{A}\overline{A}'$ reell oder imaginär sind. Setzen wir z. B. reelle $\overline{V}\overline{V}'$-Paare voraus, so gestaltet sich das bezügliche Schema (Fig. 7):

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(|\overline{V}_1\overline{V}_2|, |\overline{V}'_1\overline{V}'_2|) \equiv \zeta_3;\ (|\overline{V}_1\overline{V}'_2|, |\overline{V}'_1\overline{V}_2|) \equiv \zeta'_3 \text{ auf } \bar{o}_3 \equiv |\overline{O}_1\overline{O}_2|;$$
$$(|\overline{V}_1\overline{V}_3|, |\overline{V}'_1\overline{V}'_3|) \equiv \zeta_2;\ (|\overline{V}_1\overline{V}'_3|, |\overline{V}'_1\overline{V}_3|) \equiv \zeta'_2 \text{ auf } o_2 \equiv |\overline{O}_1\overline{O}_3|;$$
$$(|\overline{V}_2\overline{V}_3|, |\overline{V}'_2\overline{V}'_3|) \equiv \zeta_1;\ (|\overline{V}_2\overline{V}'_3|, |\overline{V}'_2\overline{V}_3|) \equiv \zeta'_1 \text{ auf } o_1 \equiv |\overline{O}_2\overline{O}_3|;$$

Im andern Falle: Bei reellen Nachbarpunktenpaaren $\overline{A}\overline{A}'$ wird folgende Construction auszuführen sein. Z. B.: Wir projiciren das auf der Hauptlinie $\bar{o}_1$ in Fig. 8 vorkommende Paar $\overline{A}_1\overline{A}'_1$ auf den Hauptkreis $\varkappa$ nach $\overline{A}_I\overline{A}'_I$, und zwar aus dem Hauptpunkte $\overline{O}_1$. Durch die Verbindungslinie $|\overline{A}_I\overline{A}'_I|$ entsteht auf $\bar{o}_1$ ein Schnittpunkt W, von welchem an $\varkappa$ ein Paar Tangenten ziehen. Projicirt man die Berührpunkte der letzteren aus $\overline{O}_1$ auf $\bar{o}_1$, so ergeben sich daselbst die Punkte $\zeta_1\zeta'_1$ etc.

Die drei gefundenen $\zeta\zeta'$-Paare liegen tripelweise auf je einer der vier $\bar{p}$-Geraden, und die letzteren treffen als Sehnen den Grundkegelschnitt k in den Berührpunktenpaaren $\overline{B}\overline{B}'$ der doppelt berührenden Kegelschnitte δ. In unseren zwei Beispielen (4), (6) finden wir jedoch eine, respective zwei der $\bar{p}$-Sehnen als Tangenten des Grundkegelschnittes, bei welchen in dem jeweiligen Berührpunkte $\overline{P}$ die Elemente eines $\overline{B}\overline{B}'$-Paares zur Coincidenz gelangt sind, was abermals die analogen Beziehungen auf der Curve C_6^4 in einem Undulationspunkte P illustrirt.

8. Die Verbindungslinie $|\overline{P}_1\overline{P}_2|$, sowie der Punkt ζ'_3 unserer Fig. 6 sind für die Kegelschnittstrias $\pi_1 k \pi_2$ gemeinschaftlich polar; demzufolge schneidet die Gerade $|\overline{P}_1\overline{P}_2$ diese drei Kegelschnitte in ihren gemeinsamen Berührpunkten $\overline{P}_1\overline{P}_2$ und speciell noch die zwei Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ in je einem der Punkte $\overline{Q}_1\overline{Q}_2$, deren Strahlen $\bar{q}_1\bar{q}_2$ aus dem ζ'_3-Pole für $\pi_1\pi_2$ einfache, während — den ursprünglichen Annahmen gemäss — die aus ζ'_3 durch $\overline{P}_1\overline{P}_2$ laufenden Geraden $\bar{p}_1\bar{p}_2$ für die Paare $\pi_1 k$, $\pi_2 k$ gemeinsame Tangenten sind.

Oben wurde $\overline{S}$ als vierter Schnittpunkt der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ notirt. Dieser Punkt kann sehr einfach linear gefunden werden. Die Gerade $|\overline{O}_3\overline{S}|$, sowie die Hauptlinie $\bar{o}_3$ sind Strahlen des ζ'_3-Poles und gemeinschaftliche Secanten der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$; ein Paar anderer solcher Secanten sind die Gerade $|\overline{O}_2\overline{S}|$ und die Hauptlinie $\bar{o}_2$, die sich beide auf der Berührsehne $\overline{P}_1\overline{P}_2|$ in einem Punkte ψ treffen; somit die Construction:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(|\bar{O}_3\zeta_3'|, |\bar{O}_2\psi|) \equiv \bar{S}.$$

Endlich möge angemerkt bleiben, dass der Pol Ω_3 der Hauptlinie $\bar{o}_3$ in Bezug des Grundkegelschnittes k der Schnitt zwischen den zwei Geraden $|\bar{O}_3\bar{S}|$, $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ ist, was zur Folge hat, dass die Secante $|\bar{O}_3\bar{S}|$ zu $\bar{o}_3$ harmonisch conjugirt betreffs der Strahlen $\bar{p}_1\bar{p}_2$ ist. Bestimmt man das Bild S von $\bar{S}$, so müssen aus vorstehenden Gründen in demselben die Tangenten p_1p_2 der zwei Curvenundulationen P_1P_2 einander begegnen.

9. Liegt die Berührsehne $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ in Fig. 9 auf einem $\bar{O}_3$-Strahle, so ergeben sich einige bemerkenswerthe Eigenschaften. Zunächst ist das Punktenpaar $\zeta_3\zeta_3'$ auf der Hauptlinie $\bar{o}_3$ ausgezeichnet; es treffen sich nämlich in ζ_3 nicht nur die zwei Sehnengeraden $\bar{p}_3\bar{p}_4$, sondern auch die Sehne $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$, wogegen durch ζ_3', ausser dem Sehnenpaare $\bar{p}_1\bar{p}_2$, das aber jetzt als ein Tangentenpaar $\bar{p}_1\bar{p}_2$ des Grundkegelschnittes, und zwar in den Undulationspunkten $\bar{P}_1\bar{P}_2$ auftritt, noch die Gerade $|\bar{O}_3\zeta_3'|$ läuft. Diese letztere Gerade ist im Jetztfalle eine den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$ im $\bar{O}_3$-Punkte gemeinschaftliche Tangente und der Hauptlinie $\bar{o}_3$ in Bezug des Tangentenpaares $\bar{p}_1\bar{p}_2$ harmonisch zugeordnet. Aus dieser Eigenschaft folgt eine Vereinfachung der Construction für die Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2$, indem die Hervorrufung des einen der beiden Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ erspart wird.

Schliesslich ist leicht einzusehen, dass die in (7) gefundenen $\zeta\zeta'$-Paare im vorliegenden Beispiele unmittelbar hervorgehen, weil die Geraden $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{p}_1\bar{p}_2$ ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck durch die Geraden: $|\bar{O}_3\zeta_3'|$, $|\bar{O}_3\bar{P}_1\bar{P}_2|$, $\bar{o}_3 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_2|$ repräsentirt ist.

10. Der Hauptkreis $\varkappa$, welcher dem Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ umschrieben wurde, enthält mit jedem der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ noch je einen der Punkte $\bar{U}_1\bar{U}_2$. Da diese Punkte nach [76] die Asymptotenpunkte der Undulationstangenten p_1p_2 auf der Curve C_6^4 abbilden, so werden diese Tangenten daselbst sofort nach Bestimmung ihrer Berührpunkte P_1P_2 fixirt erscheinen.[1] Bei dieser Gelegenheit sei nochmals auf [76], sowie auch auf [78] hingewiesen, wo uns das Mittel in die Hand gegeben

[1] Vergl. den Schlusssatz in (4).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wird, in jedem beliebigen Falle einer C_6^4 ihre »Asymptoten« der Richtung und Lage nach festzustellen (Fig. 9).

11. Aus der Beziehung in (9) entnehmen wir, dass sich für den Grundkegelschnitt k der Hauptpunkt $\bar{O}_3$ und die Hauptlinie $\bar{o}_3$ dort einander polar gegenüberstehen, weshalb auch [72] das »Verzweigungselementenpaar« $\bar{V}_3\bar{V}_3'$ auf $\bar{o}_3$ selbst situirt sein muss. Aus diesem Grunde ist im Beispiele (9) nach [134] der Doppelpunkt O_3 ein Inflexionsknoten und kann die Curve nur mehr zwei eigentliche Doppeltangenten Δ [136] besitzen. Wir finden in der That dieses Gesetz durch das Sehnenpaar $\bar{p}_3\bar{p}_4$ bestätigt, dessen Elemente reelle Berührpunktenpaare $\bar{B}_3\bar{B}_3'$, $\bar{B}_4\bar{B}_4'$ der zwei doppelt berührenden Kegelschnitte $\delta_3\delta_4$ auf dem Grundkegelschnitte k anzeigen (Fig. 9).

Der Umstand, dass das Paar $\bar{P}_1\bar{P}_2$ auf einem $\bar{O}_3$-Strahle angenommen wurde, ist Ursache, dass die beiden Undulationspunkte P_1P_2 ebenfalls einem Strahle des Inflexionsknotens O_3 angehören. Der weitere Umstand, als sich das Tangentenpaar $\bar{p}_1\bar{p}_2$ im Punkte ζ_3' auf der Hauptlinie o_3 trifft, begründet auch den Schnitt der zwei Undulationstangenten p_1p_2 in einem Punkte Z_3 auf der Hauptlinie $o_3 \equiv \bar{o}_3$, und man findet diesen Punkt mit Hilfe jenes O_3-Strahles, der den Hauptkreisschnitt, den die Gerade $|\bar{O}_3\zeta_3'|$ erzeugt, verbindet.

Die Eigenschaft des O_3-Punktes als Inflexionsknoten involvirt ferner die gesammten harmonischen Beziehungen, welche in [§. 15, II. Th.] zur Entwicklung gelangen. Demzufolge wird auch insbesondere stattfinden, dass sich die zwei Doppeltangenten $\Delta_3\Delta_4$ in einem Punkte auf o_3 ebenso schneiden, wie sich die Sehnengeraden $\bar{p}_3\bar{p}_4$ im Punkte ζ_3 auf $\bar{o}_3 \equiv o_3$ treffen und dass dieser Schnittpunkt wieder wie vorhin mit Hilfe desjenigen O_3-Strahles aufgesucht wird, der dem Strahle $|\bar{O}_3\zeta_3|$ homolog ist, d. i. die Gerade $|O_3P_1P_2|$ etc.

12. Einiges Interesse dürfte die Annahme erwecken, wo der Grundkegelschnitt ein Kreis k ist und die Gerade $|\bar{O}_3\bar{P}_1\bar{P}_2|$ durch das Centrum desselben hindurchgeht. Diesfalls coincidiren [191] die Punkte $\bar{O}_3O_3$, sowie auch die Geraden $|\bar{O}_3\bar{P}_1\bar{P}_2|$, $|O_3P_1P_2|$; die Curve C_6^4 ist circular und symmetrisch für die Axe $|P_1O_3P_2|$; die Undulationstangenten p_1p_2 schneiden sich in $\zeta_3'\infty$, sie laufen also so wie die Tangenten $\bar{p}_1\bar{p}_2$ mit

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der Hauptlinie $o_3 \equiv \bar{o}_3$ parallel und stehen zur Symmetrieaxe normal; die Doppeltangenten $\Delta_3\Delta_4$ endlich begegnen einander wie auch die Sehnen $\bar{p}_3\bar{p}_4$ identisch im ζ_3-Punkte. Es ist selbstverständlich, dass in diesem Falle die Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ mit dem Grundkreise homothetisch und die Berührpunkte $\bar{P}_1 P_2$ derselben, wie auch der dann nothwendig ebenfalls stattfindende Berührpunkt $\bar{O}_3(\equiv O_3)$ zwischen $\pi_1\pi_2$ Scheitel dieser Kegelschnitte sind, welche Verhältnisse wesentlich die Eigenschaft der Symmetrie sowohl im Systeme des Grundkreises k, als auch der Curve C_6^4 zum Ausdrucke gelangen lassen.

Die Curve mit drei Undulationen.

13. Wenn man vor die Aufgabe gestellt ist: »Man bestimme diejenigen Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt unduliren und durch drei nicht auf ihm liegende Punkte gehen«, so würde deren Lösung erheblichen Schwierigkeiten begegnen. Der Grund dessen ist darin zu erblicken, als die Möglichkeit dieser Aufgabe überhaupt eine bedingungsweise ist und dass es nur bei ganz bestimmten Annahmen in Bezug der Angabebedingungen reelle Lösungen geben kann. Wir werden auch deshalb jetzt einen ähnlichen Weg einschlagen müssen, wie er in den vorausgegangenen Beispielsfällen beobachtet wurde, indem man, von der Lösung selbst ausgehend, auf die Problemannahme zurückschliesst.

Dementsprechend legen wir uns eine Curve C_6^4 vor, in welcher eine Kreisverwandtschaft mit dreiaxiger Symmetrie verbunden ist, was ich in [§. 27] bei circularen Hypocycloiden mit drei Doppelpunkten nachgewiesen habe.

14. Zur Annahme gelangt ein gleichseitiges Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, welchem der Hauptkreis $\varkappa$ umschrieben ist. Bringen wir dieses System, wie bei den vorher behandelten Aufgaben, durch das Deckdreieck $O_1O_2O_3$ in eine quadratische Beziehung, so wissen wir (12), dass die Perspectivitätscentra $\bar{O}_3 O_3$ in Coincidenz sind (Fig. 10).

Alle im Mittelpunkte des Hauptkreises concentrischen Kreise transformiren sich jetzt jeder für sich als eine Hypocycloide oben bezeichneter Art mit den drei Doppelpunkten $O_1O_2O_3$. Dieselben sind verlängert oder verkürzt [188], je

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nachdem der betreffende Grundkreis die Seiten $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ des Hauptdreiecks in reellen oder in imaginären Punktenpaaren schneidet, wobei als Übergangsfall der dem Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ eingeschriebene Grundkreis sich in die dreispitzige Steiner'sche Hypocycloide C_3^4 transformirt.

Bestimmen wir nach (7) das Geradenquadrupel $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3\bar{p}_4$, so bildet zunächst das Tripel $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3$ ein ebenfalls gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ auf den bezüglichen Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ liegen, welches mit dem Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ perspectivisch ist. Bekanntlich drückt sich diese Eigenschaft dadurch aus, dass die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken der Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2O_3$, $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ gemeinschaftlich im Centrum der Perspectivität zusammentreffen: vorliegendenfalls im Mittelpunkte $\bar{P}_4$ der zwei concentrischen Kreise $k\varkappa$.

Die Seiten der erwähnten beiden perspectivischen Dreiecke treffen sich ausserdem — weil sie entsprechend einander gleichlaufen — in dem Punktentripel $\zeta_1'\infty\,\zeta_2'\infty\,\zeta_3'\infty$, welches bekanntlich die Gerade $\bar{p}_4\infty$ verbindet. Hieraus folgt [186], dass eine circulare Hypocycloide die unendlich ferne Gerade $g\infty \equiv \bar{p}_4\infty \equiv \Delta_4\infty$ als eine isolirte Doppeltangente perspectivisch mit dem Grundkreise gemeinsam hat. Schliesslich bemerken wir uns noch die Eigenschaft der Polarität, welche in Bezug des Grundkreises k zwischen der Geraden $\bar{p}_4\infty$ und dem vorhin bezeichneten Centrum $\bar{P}_4$ stattfindet.

15. Wir haben in (14) die Steiner'sche C_3^4 als eine Übergangsform bezeichnet; eine andere Übergangsform sowohl bei den verlängerten, als auch eine solche bei den verkürzten Hypocycloiden C_6^4 — jedoch bei unverminderter Classe — findet statt, wenn wir den Radius des Grundkreises seiner Grösse nach verändern. An diesem Orte will ich nur auf den letzteren Fall hingewiesen haben, welcher ein hervorragendes Interesse für unsere Betrachtungen dann gewinnt: »sobald der Grundkreis k dem Dreiecke $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ eingeschrieben ist«.

Diese Voraussetzung folgert, dass jede Gerade des Tripels $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3$ zur Tangente an den Grundkreis wird, deren Berührpunkte $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ uns jedesmal einen den Grundkreis undulirenden Kegelschnitt $\pi_1\pi_2\pi_3$ anzeigen, welcher dem Fundamentalnetz (2) angehört. Diese Kegelschnitte π können der Lagenverhältnisse

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wegen nichts Anderes als drei congruente gleichseitige Hyperbeln sein, von denen jede auf dem einen Ast zwei der Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ und den einen der Undulationspunkte $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ enthält, während ihr zweiter Ast durch den dritten Hauptpunkt zieht. Als Resultat der gemachten Annahmen ergibt sich: »eine circulare dreiaxig symmetrische Hypocycloide C_6^4 mit drei isolirten Doppelpunkten und drei nur reellen Undulationen«.

Diese Curve spielt unter den Hypocycloiden mit isolirten Doppelpunkten $O_1O_2O_3$ eine sozusagen »ausgezeichnete« Rolle, weil sie, wie schon oben bemerkt wurde, die einzige dieser Species ist, welche drei Undulationspunkte $P_1P_2P_3$ nachweisen lässt.

Es ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass die Tangenten $p_1p_2p_3$ in den Undulationspunkten entsprechend den Hauptlinien $o_1o_2o_3$ parallel gehen. Um diese Eigenschaft einzusehen, erinnern wir uns der in (10) bezeichneten $\bar{U}$-Punkte. Betrachten wir beispielsweise den Kegelschnitt π_1, welcher nach der obigen Bemerkung jene gleichseitige Hyperbel ist, die — als retroverses Bild der in P_1 laufenden Curventangente p_1 — auf dem einen ihrer beiden Äste das Punktentripel $\bar{O}_2\bar{P}_1\bar{O}_3$ enthält, während der andere Ast durch $\bar{O}_1$ geht. Wegen der stattfindenden Symmetrieverhältnisse erkennt man ohne Schwierigkeit die Punkte $\bar{O}_1\bar{P}_1$ als Hyperbelscheitel, weshalb die Scheiteltangente in $\bar{O}_1$ mit der in diesem Punkte laufenden Hauptkreistangente identisch und also auch der Grundkreistangente $\bar{p}_1$ parallel sein muss. Es vereinigt sich demnach in $\bar{O}_1$ ein Punkt $\bar{U}_1$, d. i. gewissermassen wie in (10) jener Schnitt zwischen der Hyperbel π_1 und dem Hauptkreise $\varkappa$. Denkt man sich also nach diesem $\bar{U}_1 \equiv \bar{O}_1$-Punkte den Hauptstrahl für $\bar{O}_3$ gezogen, so ist dieser Strahl wegen (4) identisch seinem homologen: die Hauptlinie $o_1(\equiv \bar{o}_2)$, welche uns nach (10) die Asymptotenrichtung der p_1-Tangente für den Undulationspunkt P_1 der Curve anzeigt etc.

16. Es wird sich jetzt darum handeln, die Curvenspecialität des vorigen Artikels so zu verallgemeinern, dass wir jederzeit eine beliebige C_6^4-Curve — ohne dass also damit die Eigenschaften der Kreisverwandtschaft und Symmetrie verknüpft sind — mit drei Undulationselementen zu erzeugen, in der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Lage sind. Dass hiebei der betreffende Grundkegelschnitt k stets dem Dreiecke $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ eingeschrieben bleiben muss, ist nach unseren vorausgegangenen Ableitungen als eine conditio sine qua non für die Lösung des Problems aufzufassen. Allein man darf nicht ausser Acht lassen, dass erstlich einem Dreiecke viererlei Kreise angehören, dessen Seiten von diesen berührt werden; und weiters müssen wir voraussetzen dürfen, dass das Dreieck $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ an und für sich ein beliebiges wird sein können, so dass auch dasjenige der Curvendoppelpunkte ein vom gleichseitigen verschiedenes Dreieck wird.

Um nun die Gesetze für die Verallgemeinerung zu gewinnen, gehen wir zunächst wieder von unserem betrachteten Specialfall aus. Die sich im Centrum $\overline{P}_4$ treffenden Geraden $|\overline{O}\zeta|$ schneiden den Grundkreis k, ausser in dem bezüglichen $\overline{P}$-Punkte, nochmals je in einem Punkte $\overline{Z}$. Wir projiciren diesen $\overline{Z}$-Punkt jedesmal aus den beiden übrigen ζ-Punkten abermals auf k, wo wir ihn dann mit dem zugehörigen $\overline{P}$-Punkte durch zwei Strahlen verbinden, welche durch jene $\overline{O}$-Punkte laufen, deren Verbindungslinie diejenige Hauptlinie $\overline{o}$ ist, auf der ζ liegt. Z. B.: Es trifft die Gerade $|\overline{O}_1\zeta_1|$ den Grundkreis k ausser in $\overline{P}_1$ noch in $\overline{Z}_1$; die Projectionen von $\overline{Z}_1$ aus ζ_2 und ζ_3 auf k sind die Punkte $\overline{Z}_{12}\overline{Z}_{13}$; die Verbindungsgerade $|\overline{P}_1\overline{Z}_{12}|$ enthält den Punkt $\overline{O}_3$ und die Gerade $|\overline{P}_1\overline{Z}_{13}|$ den Punkt $\overline{O}_2$ etc. (Fig. 11).

Nach diesem Vorgange erkennen wir jetzt das Hauptdreieck $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ als fixirt. Damit ist aber allen Bedingungen Rechnung getragen, die nun auch für jeden beliebigen Grundkegelschnitt k eine Curve C_6^4 erzeugen lassen, welche drei Undulationen $P_1P_2P_3$ enthält, ohne dass also dieser Curve die Specialeigenschaft der Kreisverwandtschaft und der Symmetrie anhaftet, von der wir ursprünglich ausgegangen sind.

Den allgemeinen Fall demonstrirt die Fig. 12, wo dem beliebigen Grundkegelschnitte k ein beliebiges Dreieck $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ umschrieben ist. Ausser der oben bezeichneten Beziehung kann man noch eine Reihe anderer Beziehungen aufstellen, die uns das Hauptdreieck $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ festlegen lassen, welche einfach auf den Perspectivitätseigenschaften von in der Fig. 11 vorkommenden Dreiecken beruhen. In theilweiser Wiederholung des oben Angeführten notiren wir hauptsächlich zweierlei

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Constructionsfälle. Wir projiciren also zuerst das Tripel $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ der Berührungspunkte des Tangentendreiecks $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ aus den Gegenecken dieses Dreiecks auf k, wodurch das Dreieck $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3$ entsteht; sodann werden diese Punkte $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3$ in obiger Weise aus den nicht gleich indextirten ζ-Punkten abermals auf k projicirt, womit die Paare $\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{13}$, $\bar{Z}_{21}\bar{Z}_{23}$, $\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{32}$ entstehen. Die beiden Constructionsfälle für das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3 \equiv \bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ kommen nun dadurch zum Ausdrucke, dass wir entweder direct wie oben die Ecken $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ bestimmen oder: wir suchen das auf der Geraden $\bar{p}_4$ situirende Punktentripel $\zeta_1'\zeta_2'\zeta_3'$, dessen Elemente mit den ihnen conjugirten (gleich indextirten) des gegebenen Tripels $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ auf den entsprechenden Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ liegen; z. B.:

I. Es begegnen einander im $\bar{O}_1$-Punkte die Verbindungslinien:

$$|\bar{P}_1\zeta_1|,\ |\bar{P}_2\bar{Z}_{23}|,\ |\bar{P}_3\bar{Z}_{32}|.$$

II. Es treffen sich auf der $\bar{o}_1$-Geraden im ζ_1'-Punkte die Verbindungslinien:

$$|\zeta_2\zeta_3|,\ |\bar{P}_2\bar{P}_3|,\ |\bar{Z}_2\bar{Z}_3$$

Zahl und Realität der Undulationen.

17 Salmon gibt auf S. 268 des citirten Werkes an: »Eine Curve vierter Ordnung kann vier reelle Undulationspunkte haben, wie man aus der Gleichungsform

$$x_1x_2x_3x_4 = S^2$$

ersieht, in welcher $S = 0$ einen von den vier Geraden

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

berührten Kegelschnitt darstellt«.

Dieses Resultat kann nur für eine Curve vierter Ordnung ohne sonstige Singularitäten giltig sein. Meine synthetischen Untersuchungen gelangen zu dem Satze: »Eine unicursale Plancurve vierter Ordnung besitzt höchstens drei nur reelle Undulationen«.

Das bereits Vorausgegangene, sowie die nachfolgenden Discussionen sollen die Richtigkeit dieses Satzes erläutern.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

18. Zunächst wollen wir uns die Frage vorlegen: »Kann es eine C_6^4 mit vier Undulationen geben und welches Resultat erfolgt, sobald dem Quadrupel $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3\bar{p}_4$ der Grundkegelschnitt eingeschrieben ist?« (Fig. 13.)

Vorstehende Annahme bedingt, dass wir erstlich das gegebene $\bar{p}$-Quadrupel wie in den früheren Beispielen als vollständige Figur behandeln, in welcher das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ das Diagonaldreieck ist. Wird nun dem einfachen Viereck $\zeta_1\zeta_1'\zeta_3\zeta_3'$ ein Kegelschnitt k so eingeschrieben, dass die Verbindungslinien der gegenüberliegenden, sowie diejenigen der aufeinanderfolgenden Berührpunkte $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3\bar{P}_4$ sich in den Hauptpunkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ treffen, so muss nothwendig das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ ein in Bezug des Grundkegelschnittes k »selbstconjugirtes« sein, bei welchem bekanntlich der eine Eckpunkt innerhalb k zu liegen kommt. Eine derartige Lage bedingt aber nach [137] eine Curve C_6^4 mit zwei reellen und einem isolirten Inflexionsknoten, und man sieht sofort, dass diesfalls dem $\bar{p}$-Quadrupel nicht jene Eigenschaft anhaftet, welche zur Voraussetzung gemacht wurde. Denn nach dem Constructionsgesetze (7) gibt es nur ein einziges Paar conjugirter ζ-Punkte, und zwar auf derjenigen Hauptlinie $\bar{o}$, welche den Grundkegelschnitt in imaginären Punkten schneidet. In unserer Fig. 13 ist dieses Punktenpaar $\zeta_2\zeta_2'$ auf $\bar{o}_2$ gelegen. Man darf also dieses $\zeta_2\zeta_2'$-Paar nicht mit den oben bezeichneten zwei Paaren $\zeta_1\zeta_1'$, $\zeta_3\zeta_3'$, welche auf den beiden Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_3$ liegen, die durch den im Inneren von k situirenden Hauptpunkt $\bar{O}_2$ ziehen, gleichstellen. In Folge dessen besitzt auch die Curve C_6^4 nur isolirte Doppeltangenten, was nach (5) wieder die Eigenschaft nach sich zieht: dass sie keine Undulationen haben kann.

19. Der Satz (5) spricht aus: »Jedes Inflexionselementenpaar ist dem Berührpunktenpaare einer Doppeltangente adjungirt«. Da wir nun im vorigen Artikel gesehen haben, dass in der betrachteten C_6^4 die Doppelpunkte insgesammt als Inflexionsknoten erscheinen, ein solcher Knoten aber auf einer C_6^4 niemals eine Undulation vorzustellen im Stande ist, weil er sonst in jeder seiner Tangenten mehr als vier Elemente vereinigen müsste, was vermöge der Ordnungszahl einer C_6^4 widersinnig ist, so finden wir weiterhin darin die Bestätigung, dass es

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

in dem vorliegenden Situationsfalle keine Undulation geben kann.

Bei dieser Gelegenheit gelangen wir zum Beweise unseres Satzes (17). Erinnern wir uns nämlich der Eigenschaft (5), wonach eine Undulation durch die Vereinigung einer Doppeltangente mit dem ihr adjungirten Wendetangentenpaare entsteht, so kann auf einer C_6^4, weil nur drei Inflexionspaare vorkommen, auch nicht öfter als dreimal eine Undulation stattfinden.

Die Connexität zwischen Doppel- und Inflexionstangenten, die wir durch das Gesetz ihrer Adjunction ausdrückten, darf jedoch nicht dahin gedeutet werden, dass es im Falle von imaginären Inflexionen oder isolirten Doppeltangenten auch imaginäre oder isolirte Undulationen geben könne: »Eine Undulation auf einer C_6^4 kann nur reell gedacht werden«. Diese Eigenschaft wird ersichtlich, wenn man sich einerseits die in (1) gegebene Definition vor Augen hält und anderseits die in (15) angeführte Charakteristik damit verbindet, wonach eine Undulation als der Übergang aus dem Reellen in das Imaginäre, also durch eine Coincidenz von reellen Elementen ausgedrückt ist.

Bemerkung. Ein Undulationspunkt lässt sich übrigens ebensogut aus der Vereinigung von zwei Berührpunkten einer isolirten Doppeltangente — also aus zwei imaginären Elementen — herleiten; es wäre jedoch ein Fehlschluss, wollte man deswegen eine derartige Coincidenz als in einem imaginären Punkte vorkommend ansehen. »Imaginäre Punkte können sich nur in einem reellen Punkte vereinigen.« Dieses wird sofort klar, wenn man beispielsweise die auf einem Kegelschnitte durch eine Gerade invitirte Involution betrachtet, deren Doppelelemente ebenfalls bei dem Übergange aus dem elliptischen in den hyperbolischen Fall und umgekehrt stets im parabolischen Falle ein immer nur reelles Coincidenz-Doppelelement bilden.

20. Die von uns behandelten Beispiele lassen in Bezug der Lage des Grundkegelschnittes gegenüber den drei reellen Hauptpunkten $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ eine weitere Charakteristik für das Vorhandensein von undulirenden Kegelschnitten und damit verbundenen Undulationselementen auf einer C_6^4 herstellen. In

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jedem dieser Beispiele sind die Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ ausserhalb des Grundkegelschnittes k befindlich. Die Ursache dieser Thatsache liegt darin, dass von zwei sich vierpunktig berührenden Kegelschnitten immer der eine den anderen umfasst, ohne ihn jemals zu schneiden, so dass niemals reelle $\bar{O}$-Punkte gleichzeitig auf beiden Seiten eines dieser beiden Kegelschnitte vorkommen können.

Anders verhält sich die Sache, wenn wir den grundlegenden $\bar{O}_3$-Punkt unserer Ableitungen innerhalb von k verlegen. Man erhält dann z. B. in dem Falle der Annahme in (6), wo zwei Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ den Grundkegelschnitt k unduliren und dieser als Ellipse vorliegt, jene $\pi_1\pi_2$ als zwei Ellipsen, die sich innerhalb k in zwei reellen Punkten schneiden, deren einer $\bar{O}_3$ ist; der zweite Schnittpunkt $\bar{S}$ (6) dürfte für den Fall einer unicursalen Curve vierter Ordnung nicht als Hauptpunkt des Grundkegelschnittsystems gewählt werden, sondern die beiden übrigen Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_3$ müssen als die imaginären Doppelelemente einer elliptischen Punkteninvolution gelten, die sich auf der ideellen Secante $\bar{o}_3$ der zwei Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ befindet und nach (8) gefunden wird. Diese elliptische Involution auf $\bar{o}_3$ ist aber durch den Pol Ω_3 von $\bar{o}_3$ bezugs k vollkommen bestimmt.

Demzufolge würde vorstehende Situation die Grundlage bilden für eine C_6^4 mit einem reellen Doppelpunkte im Bilde O_3 und zwei imaginären Doppelpunkten auf $o_3 \equiv \bar{o}_3$, eine Specialität, die ich in [§. 35] behandelt habe und auf die ich — weil sie diesfalls mit zwei Undulationen verbunden ist — in selbständiger Betrachtung in einer II. Mittheilung zurückzukommen gedenke.

Die Directionscurve D_4^6.

21. Man kann in der Methode, um über das Wesen und Vorkommen von Undulationen auch ihrer Zahl nach in einer C_6^4 vollkommene Klarheit zu schaffen, mit Vortheil »das System der Tangentialpunkte«, das ich in meinem Lehrbuche [§. 12, II. Th.], sowie a. a. O.[1] entwickelt habe, studiren. Dieses System

---

Über absolute Elementensysteme auf ebenen Unicursalcurven etc Zeitschr. für Math. und Phys., XXXVI. Jahrg., II. Heft.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ist ein symmetrisches vierten Grades und seine Directionscurve im Allgemeinen vom Symbole D_4^6.

Die $\bar{x}$-Tangenten, welche die Directionscurve einhüllen, erhalten wir nach der diesbezüglichen Anleitung [69] durch eine Linearconstruction: »Ein beliebiger $\bar{X}$-Punkt des Grundkegelschnittes k wird aus den Hauptpunkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ auf diesen Kegelschnitt nach $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ projicirt und die Axe $\bar{x}$ der zwei perspectivischen Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ aufgesucht«. Diese $\bar{x}$-Gerade ist für die D_4^6 eine Tangente und schneidet, nebenbei gesagt, den Grundkegelschnitt in zwei Punkten $\bar{X}'X''$, welche die Tangentialpunkte $X'X''$ derjenigen Tangente abbilden, die im Bildpunkte X der Curve C_6^4 angehört (Fig. 14).

22. Die Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ sind für die Directionscurve D_4^6 Doppeltangenten [105], und letztere durchsetzt die Hauptlinien ausserdem [106] in jenen Punktenpaaren $\bar{A}\bar{A}'$, welche diese mit dem Grundkegelschnitt (reell oder imaginär) gemeinsam haben. Den Grundkegelschnitt aber selbst durchsetzt die D_4^6 in denjenigen Punkten $\bar{T}$, deren jeder [107] sich als das Bild des freien Tangentialpunktes einer Wendetangente auf der Curve C_6^4 darstellt. Endlich besitzt die D_4^6 noch mit dem Grundkegelschnitt gemeinschaftliche Tangentenpaare, deren Berührpunkte $\overline{BB'}$ [104] auf dem letzteren die Berührpunkte BB' einer Doppeltangente Δ in der C_6^4 abbilden (Fig. 1).

Die vorstehend citirten Haupteigenschaften einer Directionscurve D_4^6 erfahren in dem Falle, wo eine C_6^4 mit Undulationen gegeben ist, dementsprechende Modificationen, welche in dem Satze gipfeln: »Der Grundkegelschnitt k berührt die Directionscurve D_4^6 so oftmals in $\bar{P}$-Punkten, als die Curve C_6^4 Undulationspunkte P enthält, welche letzteren als Bilder der ersteren Punkte erscheinen«.

23. Das Zustandekommen der Eigenschaft, welche in dem vorigen Artikel ausgesprochen wird, stimmt mit dem in (19) Gesagten überein. Bei einer C_6^4 mit z. B. durchwegs reellen Inflexionselementen ist die Directionscurve D_4^6 so beschaffen, dass sie mit je einem ihrer drei Curvenzüge den Grundkegelschnitt k in einem Paare $\overline{TT'}$-Punkten durchsetzt. Die in (21) bezeichnete $\bar{x}$-Tangente in einem dieser $\bar{T}$-Punkte trifft k in jenem $\bar{I}$-Punkte, der das Bild eines Inflexionspunktes I von C_6^4

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ist, während die in I an C_6^4 gehende stationäre Tangente den Bildpunkt T von $\overline{T}$ zum Tangentialpunkte hat. Anderseits kommen bei einer derartig mit reellen II'-Paaren vorausgesetzten C_6^4 ebensoviele eigentliche Doppeltangenten Δ mit reellen BB'-Berührpunktenpaaren vor, denen wir in (5) die Eigenschaft der Adjunction mit den II'-Paaren zugesprochen haben. Wie schon oben erwähnt wurde, sind die in den Bildpunkten $\overline{BB'}$ ziehenden Grundkegelschnittstangenten gleichzeitig dem $\bar{x}$-Systeme der D_4^6 angehörig.

Stellen wir uns nun mit Salmon vor, dass eine Undulation auf einer C_6^4 durch die Coincidenz der Tangenten in den, wie wir sagen: »adjungirten Paaren II', BB'« entstanden ist und verfolgen wir dabei den bezüglichen Vorgang auch am Grundkegelschnitte, so ergibt sich: In dem Maasse, als die beiden Elemente eines $\overline{II'}$-Paares sich einander nähern, rücken die Punkte eines $\overline{TT'}$-Paares zusammen; gleichzeitig erfolgt aber ein Sichnähern der $\overline{BB'}$-Elemente einer $\bar{p}$-Sehne, und in dem Momente, wo in einem $\overline{P}$-Punkte die Coincidenz der bezeichneten drei Elementenpaare eintritt, ist die $\bar{p}$-Sehne zur Tangente des Grundkegelschnittes geworden, wobei sich die beiden $\bar{x}$-Geraden der Paare $\overline{TI}$, $\overline{T'I'}$ in ihr vereinigten. Mit anderen Worten: »Der Grundkegelschnitt k wird in dem Coincidenzpunkte $\overline{P}$ von der Directionscurve D_4^6 einfach berührt« (Fig. 1 und 9).

Weil nun auf einer C_6^4 nur drei Paare von Inflexionspunkten stattfinden können, so kann auch der eben beschriebene Vorgang nicht öfter als dreimal eintreten, wodurch abermals die Richtigkeit unseres Satzes in (17): »dass eine C_6^4 nicht mehr wie drei nur reelle Undulationen haben kann«, zur Evidenz nachgewiesen erscheint (Fig. 12).

24. Nachdem eine Curve sechster Ordnung mit einem Kegelschnitte $2\ 6 = 12$ Punkte gemein hat, die sich auch in sechs Berührpunkte gestalten können, so dürfte darüber ein Zweifel entstehen, ob der Grundkegelschnitt in Bezug der Directionscurve wirklich ein nur dreimal berührender ist? Dieser Zweifel wird jedoch sofort wegfallen, wenn wir uns der in (22) bemerkten Thatsache erinnern, dass eine D_4^6 auch noch die drei Paare reellen oder imaginären Schnittpunkte, welche

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zwischen dem Grundkegelschnitte k und den Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ vorkommen, eigenthümlich hat. Dieses ist auch Ursache der Eigenschaft, dass eine C_6^4 mit sechs reellen Inflexionen oder statt derselben: mit drei Undulationen, stets wenigstens eine isolirte Doppeltangente besitzt, welche [186] bei einer circularen C_6^4 die ∞ ferne Gerade ihrer Ebene ist, in der die imaginären Kreispunkte die Berührelemente sind.

25. Der Vollständigkeit wegen wollen wir noch die betreffenden Directionscurven in den anderen vorher durchgeführten Beispielen einer kurzen Besprechung unterziehen.

In dem zuerst behandelten Falle der Curve C_6^4 mit nur einer Undulation ist die Directionscurve D_4^6 eine den Grundkegelschnitt k in P_1 berührende und, soferne die Hauptlinie $\overline{o}_3$ mit k ein reelles Punktenpaar $\overline{A}_3\overline{A}_3'$ gemeinsam hat, durchsetzt sie k in diesen Punkten, um jedesmal im Inneren von k eine Spitze zu formen; jener Zweig, der den $\overline{P}_1$-Punkt enthält und von den Hauptlinien $\overline{o}_1\overline{o}_2$ einfach, von $\overline{o}_3$ aber doppelt berührt wird, trägt ebenfalls zur Formirung der beiden Spitzen bei und schneidet den Grundkegelschnitt noch in zwei $\overline{T}\overline{T}'$-Punkten. Mit dem Grundkegelschnitt hat D_4^6 nur mehr zwei in $\overline{B}\overline{B}'$-Punkten gemeinschaftliche Tangentenpaare. Für die transformirte C_6^4 mit dem Doppelpunkte O_3 und den unter allen Umständen isolirten Doppelpunkten O_1O_2 bedingen die eben aufgezählten Eigenschaften: die Undulation in P_1, zwei Inflexionspunkte I_1I_2 und ein Doppeltangentenpaar $\Delta_2\Delta_3$ mit reellen Berührpunkten, während eine dritte Doppeltangente eventuell isolirt ausfällt (Fig. 1).

26. Würde die Hauptlinie $\overline{o}_3 \equiv |\overline{O}_1\overline{O}_2|$ von dem Grundkegelschnitte k tangirt, so entsteht bekanntlich eine transformirte C_5^4 mit O_3 als Spitzenpunkt. In diesem Falle ist die Directionscurve eine geschlossene, dem Dreiseit $\overline{o}_1\overline{o}_2\overline{o}_3$ einbeschriebene Curve, in welcher bloss die $\overline{o}_3$ Doppeltangente ist. Da sie nur eine einzige Spitze besitzt, degenerirt ihr Symbol in D_3^4. Weil sie ferner ausser der Hauptlinie $\overline{o}_3$ als Doppeltangente nur noch in $\overline{P}_1$ eine mit dem Grundkegelschnitte gemeinschaftliche Tangente hat, so enthält die transformirte C_5^4 keine eigentliche Doppeltangente, wohl aber zwei Inflexionspunkte I_1I_2 und die Undulation in P_1.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

27. Für das Beispiel in (9), wo die erzeugte C_6^4 mit den beiden Undulationen $P_1 P_2$ nach (11) in O_3 einen Inflexionsknoten und in $O_1 O_2$ isolirte Doppelpunkte hat, ist die Directionscurve wieder vom Symbole D_4^6, und der Grundkegelschnitt ist für sie in den Punkten $\overline{P}_1 \overline{P}_2$ ein doppelt berührender. Sie besitzt abermals zwei Spitzen, die sich mit den Berührpunkten $\overline{A}_3 \equiv \overline{V}_3$, $\overline{A}_3' \equiv \overline{V}_3'$ auf $\bar{o}_3$ der aus $\overline{O}_3$ an k gezogenen Tangenten identificiren. Durch dieses Verhältniss der Formung eines Rückkehrpunktes in jedem $\overline{A}_3 \equiv \overline{V}_3$-Elemente zeigt die Directionscurve ungemein ersichtlich die gleichzeitige Coincidenz mit dem einen der $\overline{I}$-, respective $\overline{T}$-Punkte und daher die Entstehung der Singularität eines Inflexionsknotens in O_3 (Fig. 9).

Dieserart ist $\bar{o}_3$ eigentlich als eine dreifache Tangente für die D_4^6 zu bezeichnen, während die zwei Hauptlinien $\bar{o}_1 \bar{o}_2$ Doppeltangenten sind. Mit dem Grundkegelschnitt kommen auf D_4^6 noch zwei Paare gemeinschaftliche Tangenten vor, weshalb es auch auf der Transformirten C_6^4 zwei eigentliche Doppeltangenten gibt.

Schliesslich wäre noch für den Fall in (12), wo das Erzeugniss C_6^4 eine einaxige Symmetrie in sich begreift, zu bemerken, dass dieses die analoge Eigenschaft für die hiehergehörige Directionscurve ausdrücken müsste.

28. Wir gelangen endlich zur Aufgabe in (18), welche uns die wichtige Frage über die Anzahl der Undulationen auf einer unicursalen Curve vierter Ordnung zur definitiven Entscheidung brachte. Die Directionscurve zeigt sich in diesem Beispiele ausschliesslich innerhalb des angenommenen geschlossenen Grundkegelschnittes und enthält in jenen vier Punkten, wo der letztere von den Hauptlinien $\bar{o}_1 \bar{o}_3$ geschnitten wird, reelle Spitzen, während die dritte Hauptlinie $\bar{o}_2$ in isolirter Lage zwei imaginäre Spitzenpunkte zum Ausdruck bringt. Nachdem bekanntlich eine Rückkehrtangente in ihrem Berührpunkte drei Elemente vereinigt, jede Hauptlinie aber zwei Spitzen enthält, so müssen die drei Hauptlinien $\bar{o}_1 \bar{o}_2 \bar{o}_3$ wie in (27) als dreifache Tangenten gelten (Fig. 13).

Jedes Spitzenpaar einer Hauptlinie zeigt in der C_6^4 den bezüglichen Doppelpunkt als Inflexionsknoten. Da die Directionscurve D_4^6 mit dem Grundkegelschnitt k keinerlei Tangenten

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gemein hat, so besitzt auch die Erzeugnisscurve C_6^4, wie schon in (18) hervorgehoben wurde, weder Undulationen, noch Doppeltangenten.

29. Bei dieser Gelegenheit scheint es mir angezeigt, auf einen interessanten Specialfall der im vorigen Artikel besprochenen Directionscurve hinzuweisen. Denkt man sich nämlich den Grundkegelschnitt als Kreis k gegeben und das Hauptdreieck $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ so angenommen, dass der Mittelpunkt von k einen Hauptpunkt vorstellt, so müssen die beiden anderen Hauptpunkte auf der ∞ fernen Geraden liegen, soferne wir die in (18) bezeichnete Eigenschaft des Hauptdreiecks als »selbstconjugirtes« beachten. Natürlicherweise bilden dann die ∞ ferne Gerade im Vereine mit zwei im Grundkreismittelpunkte rechtwinkeligen Durchmessern die Seiten des Hauptdreiecks (Fig. 15).

Die Construction einer $\bar{x}$-Tangente nach (21) vereinfacht sich jetzt ungemein wegen der vorwaltenden symmetrischen Anordnung, und wir erhalten als Eingehüllte der $\bar{x}$-Geraden: eine vierspitzige, vieraxig symmetrische Curve D_4^6«. Die Spitzen dieser Curve sind wie in (28) die Durchschnittspunkte zwischen dem Grundkreise k und den zwei erwähnten normalen Durchmesserhauptlinien. Diese letzteren bilden gleichzeitig das eine Paar Symmetrieaxen, während das andere Symmetrieaxenpaar mit jenem einen $\sphericalangle 45°$ einschliesst.

In (28) wurde hervorgehoben, dass die D_4^6 auf derjenigen Hauptlinie, welche den Grundkegelschnitt in imaginären Punkten trifft, diese letzteren als ein Paar imaginäre Spitzen enthält, wegen welcher Eigenschaft eben sich auch der isolirte Doppelpunkt der Transformationscurve C_6^4 als solcher mit zwei imaginären Inflexionen vereint abbildet. Diese Beziehung bleibt in dem jetzt betrachteten Falle auf der ∞ fernen Geraden erhalten, aus welchem Grunde die D_4^6 »bicircular« ist; in Folge dessen gelangen wir zu dem bemerkenswerthen Resultate:

»Die vieraxig symmetrische Directionscurve D_4^6 ist eine bicirculare vierspitzige Hypocycloide: die Astroide.«

Bei einer derartigen Hypocycloide ist bekanntlich der Radius des Rollkreises $\frac{r}{4}$ des Basiskreises; dieser letztere

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

aber ist identisch unserem Grundkreise k. Diese Curve nimmt unter den bicircularen Plancurven vierter Classe mit drei Doppeltangenten — weshalb sie in diesem Sinne als »unicursal« anzusehen ist — einen ausgezeichneten Platz in Anspruch; man kann sie in dieser Beziehung so einreihen, wie etwa die Steiner'sche dreispitzige Hypocycloide unter die circularen Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten gestellt ist.

Undulationen auf einer C_6^4 mit einem Coincidenz-Doppelpunkte.

30. Die Bedingungen, welche bei den Grundannahmen erforderlich sind, um eine sogenannte »Contactcurve« C_6^4 mit einem Berührknoten oder einer Schnabelspitze zu erzeugen, habe ich im Art. [194] auseinandergesetzt. Soll eine solche Curve mit einer Undulation verbunden sein, dann wird man in nachstehender Weise verfahren müssen.

In der Ebene werden in einem Punkte $\bar{P}_1$ zwei undulirende Kegelschnitte $k\pi_1$ festgesetzt. Auf π_1 wählt man zwei beliebige Punkte $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ und bestimmt in $\bar{O}_{13}$ die Tangente $\bar{o}_2$ in Bezug π_1. Die Construction der letzteren geschieht linear, wenn wir die harmonischen Beziehungen (9) in Erinnerung bringen und die in $\bar{P}_1$ für beide Kegelschnitte $k\pi_1$ gemeinschaftliche Tangente $\bar{p}_1$ mit der Polaren von $\bar{O}_{13}$ bezüglich k in einem Punkte ζ_2 schneiden. Die Verbindungslinie $|\bar{O}_{13}\zeta_2|$ ist die verlangte Tangente $\bar{o}_2$. Über der Sehne $\overline{\bar{O}_{13}\bar{O}_2}$ wird ein Kreis $\varkappa$ geschlagen, welcher gleichfalls die Linie $\bar{o}_2$ in $\bar{O}_{13}$ berührt (Fig. 16 und 17).

Nun lässt sich nach dem Situationsfalle [46, c] das Linienpaar $|\bar{O}_{13}\bar{O}_2| \equiv \bar{o}_{13}, \bar{o}_2$ mit den Punkten $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ als Elemente eines degenerirten Hauptdreiecks ansehen, in welchem $\bar{O}_{13}$ ein Coincidenz-Hauptpunkt und $\bar{o}_{13}$ eine Coincidenz-Hauptlinie sind und $\varkappa$ der Hauptkreis ist.

31. In dem Hauptdreiecks-Systeme $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ wird k als Grundkegelschnitt angenommen und quadratisch in eine Curve C_6^4 transformirt, welche $O_{13} \equiv \bar{O}_2$ als einen Coincidenz-Doppelpunkt hat, während $O_2 \equiv \bar{O}_{13}$ ein einfacher Knoten oder ein isolirter Doppelpunkt ist. Die Gerade $o_{13} \equiv o_{13}$, sowie die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Hauptkreistangente o_2 im Punkte O_{13} repräsentiren die Seiten des ebenfalls degenerirten Doppelpunktdreiecks im Curvensysteme C_6^4.

Ein beliebiger Punkt $\overline{X}$ des Grundkegelschnittes k wird folgend in sein quadratisches Bild X übersetzt: »Durch $\overline{X}$ werden die Hauptstrahlen der Punkte $\overline{O}_2\overline{O}_{13}$ gezogen; jene Gerade, welche $\overline{O}_2$ mit dem Hauptkreissschnitte des Strahles $|\overline{O}_{13}\overline{X}|$ verbindet, schneidet sich in X mit der durch $\overline{O}_{13}$ zu dem Strahle $|\overline{O}_2\overline{X}|$ parallelen Geraden« (Fig. 18).

Die Curve C_6^4 formt in O_{13} einen »Berührknoten«, in welchem zwei Curvenäste reell oder imaginär gegenseitig, und zwar nur auf einer Seite der Contacttangente o_2 eine Tangention begehen, je nachdem die Hauptlinie $\overline{o}_{13}$ den Grundkegelschnitt k als eigentliche oder als isolirte Secante schneidet; ist aber $\overline{o}_{13}$ eine Tangente von k, dann haben wir in O_{13} den Fall einer »Schnabelspitze«, für welche o_2 die Tangente ist. Diese Tangente o_2 vereinigt in beiden Fällen in ihrem Berührpunkte O_{13} jedesmal vier Punktenelemente der Curve, ohne etwa, wie schon in (1) gesagt ist, mit einer Undulation gleichbedeutend zu sein. Das Symbol einer Schnabelcurve degenerirt auf C_5^4 (Fig. 16 und 17).

Eine Schnabelspitze kann nur reell gedacht werden, weil in dem Falle einer bicircularen Curve eine Coincidenz der ∞ fernen imaginären Kreispunkte der Ebene als Curvendoppelpunkte — was unbedingt vorauszusetzen wäre — nicht möglich ist, denn: ein isolirter Punkt ist immer reell (vergl. Bemerkung in (21)).

32. In unseren Beispielen der Fig. 16, 17 stellt das Bild P_1 von $\overline{P}_1$ eine Undulation vor. Die Undulationstangente p_1 kann wieder durch Abbildung beliebiger Punkte des Kegelschnittes π_1 fixirt werden, von denen insbesondere auch ihr Asymptotenpunkt $U_1\infty$ hervorzuheben ist. Dieser letztere entspricht bildlich wie in (10) dem ausser den Hauptpunkten $\overline{O}_{13}\overline{O}_2$ noch übrig bleibenden Schnitte $\overline{U}_1$ der Kegelschnitte $\varkappa\pi_1$. In (10) ist auch weiters noch auf die Construction der Curvenasymptoten und ihrer Tangentialpunkte aufmerksam gemacht, was für unser vorliegendes Beispiel mit unwesentlichen Modificationen analog wie dort Anwendung findet.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

In Bezug von Doppeltangenten Δ einer Contactcurve ist nach [198] zu erinnern, dass höchstenfalls deren nur zwei möglich sind, weil die Contacttangente o_2 schon ein Paar derselben zur Vereinigung bringt. Ist nun auf der Curve C_6^4 eine Undulation vorhanden, so ist im Zusammenhange mit (1) auf einer solchen Curve nur mehr eine einzige Doppeltangente möglich. Wir finden das auch in unseren Fig. 16, 17 bestätigt, wo es auf der Hauptlinie $\bar{o}_2$ nur einen freien Punkt ζ_2 gibt, weil der zweite mit $\bar{O}_{13}$ coincidirt. Im Bildpunkte von ζ_2 müssen also conform mit (11) wieder die Doppeltangente Δ_2 mit der Undulationstangente p_1 zusammentreffen, was durch den Parallelstrahl $|\bar{O}_2\zeta_2|$, der durch den Doppelpunkt O_2 gezogen wird, zur Anzeige kommt. Wenn aber der Contactpunkt O_{13} einer Curve vom Symbole C_5^4 einen Schnabel formirt, dann enthält diese Curve überhaupt keine eigentlichen Doppeltangenten, was aus den angestellten Betrachtungen von selbst hervorgeht.

33. »Eine Contactcurve C_6^4 kann nicht mehr als zwei Undulationen enthalten.« Der Beweis dessen ist in den Erörterungen des vorigen Artikels einbezogen, womit gleichzeitig zur Aussprache gelangt, dass eine derartige Curve auch keine Doppeltangenten haben kann. Man wird ferner ohne Schwierigkeit einsehen, dass solche Curven stets isolirte Doppelpunkte — den Contactpunkt mitinbegriffen — besitzen, somit auch niemals der Fall einer Spitze oder eines Schnabels vorkommen kann, indem die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ nur eine isolirte Secante für den Grundkegelschnitt sein kann.

Soll eine Contactcurve mit zwei Undulationen construirt werden, so verbinden wir die Annahmen in (30) mit jenen in (9) folgendermassen: Auf einem Grundkegelschnitt k werden zwei beliebige Punkte $\bar{P}_1\bar{P}_2$ und auf der Verbindungslinie derselben ausserhalb k ein dritter Punkt $\bar{O}_{13}$ gewählt. In Bezug des letzteren Punktes bestimmen wir die beiden, jeweilig in einem der $\bar{P}_1\bar{P}_2$-Punkte den Kegelschnitt k undulirenden Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$. Diese berühren sich gegenseitig einfach in $\bar{O}_{13}$ und schneiden sich überdies in zwei Punkten $\bar{O}_2\bar{S}$, von welchen einer als Hauptpunkt $\bar{O}_2$ angenommen wird (Fig. 19).

Aus ähnlichen Gründen wie in (9) ist die Verbindungslinie der zwei zuletzt erwähnten Schnittpunkte die Polare von

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$\bar{O}_{13}$ in Bezug k, weshalb durch den Schnittpunkt ζ_2 der zwei $\bar{p}_1\bar{p}_2$-Tangenten dieselbe laufen muss und also die Gerade $|\bar{O}_{13}\zeta_2| \equiv \bar{o}_2$ die den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$ gemeinschaftliche Tangente ist. Die weiteren Beziehungen bei der Einrichtung einer quadratischen Verwandtschaft zwischen dem Grundkegelschnitte k und der aus ihm transformatorisch hervorgehenden Curve vierter Ordnung mit den zwei Undulationen in P_1P_2 etc. sind denen in (30) und (31) gleich zu halten.

34. In (8), sowie im vorigen Artikel ist dessen Erwähnung gethan, dass sich die Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ noch in einem von $\bar{O}_2$ verschiedenen Punkte $\bar{S}$ schneiden. Dieser Punkt ist insoferne von Interesse, als sich in seinem Bilde S die beiden Undulationstangenten p_1p_2 der Curve C_6^4 treffen müssen. Ist im Systeme des Grundkegelschnittes die Anordnung der Punkte $\bar{P}_1\bar{P}_2$ eine symmetrische, was dann der Fall sein wird, sobald diese Punkte Scheitel des Grundkegelschnittes k sind und die Gerade $|\bar{O}_{13}\bar{P}_1\bar{P}_2|$ die Symmetrale ist, so liegt ζ_2 unendlich fern, und sowohl die den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$ gemeinsame Tangente $\bar{o}_2$ in $\bar{O}_{13}$, als auch das Tangentenpaar $\bar{p}_1\bar{p}_2$ am Grundkegelschnitte sind zur Symmetralen $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ normal. Aus diesem Grunde ist der Schnitt $\bar{S}$ symmetrisch conjugirt dem $\bar{O}_2$-Punkte und mit einem $\bar{U}$-Punkte in (10) auf dem Hauptkreise $\varkappa$ liegend, was wieder zur Folge hat, dass die Undulationstangenten p_1p_2 — weil sie durch das Bild S von $\bar{S}$ ziehen müssen — gleichfalls dem Paare $\bar{p}_1\bar{p}_2$ parallel laufen (vergl. 12).

35. Man beachte, dass eine Contactcurve C_6^4 mit zwei Undulationen dann ovalförmig, in sich geschlossen (elliptischer Fall) verläuft, wenn Grundkegelschnitt und Hauptkreis sich nur in imaginären Punkten schneiden, weil diese nach (10) die Asymptotenpunkte der Curve abbilden. Dieser Fall findet statt, wenn die Hauptpunkte $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ ausserhalb des Grundkegelschnittes liegen. Im Allgemeinen kann eine Contactcurve C_6^4 vier oder zwei reelle Asymptoten enthalten (hyperbolischer Fall), weil sich die zwei Kegelschnitte $k\varkappa$ in vier oder zwei Punkten schneiden. Nur in dem Ausnahmsfalle, wo zwischen $k\varkappa$ eine einfache oder doppelte Berührung oder auch eine Osculation gebildet wird, ist die ∞ ferne Gerade selbst eine dementsprechende Asymptote (parabolischer Fall). Die beiden

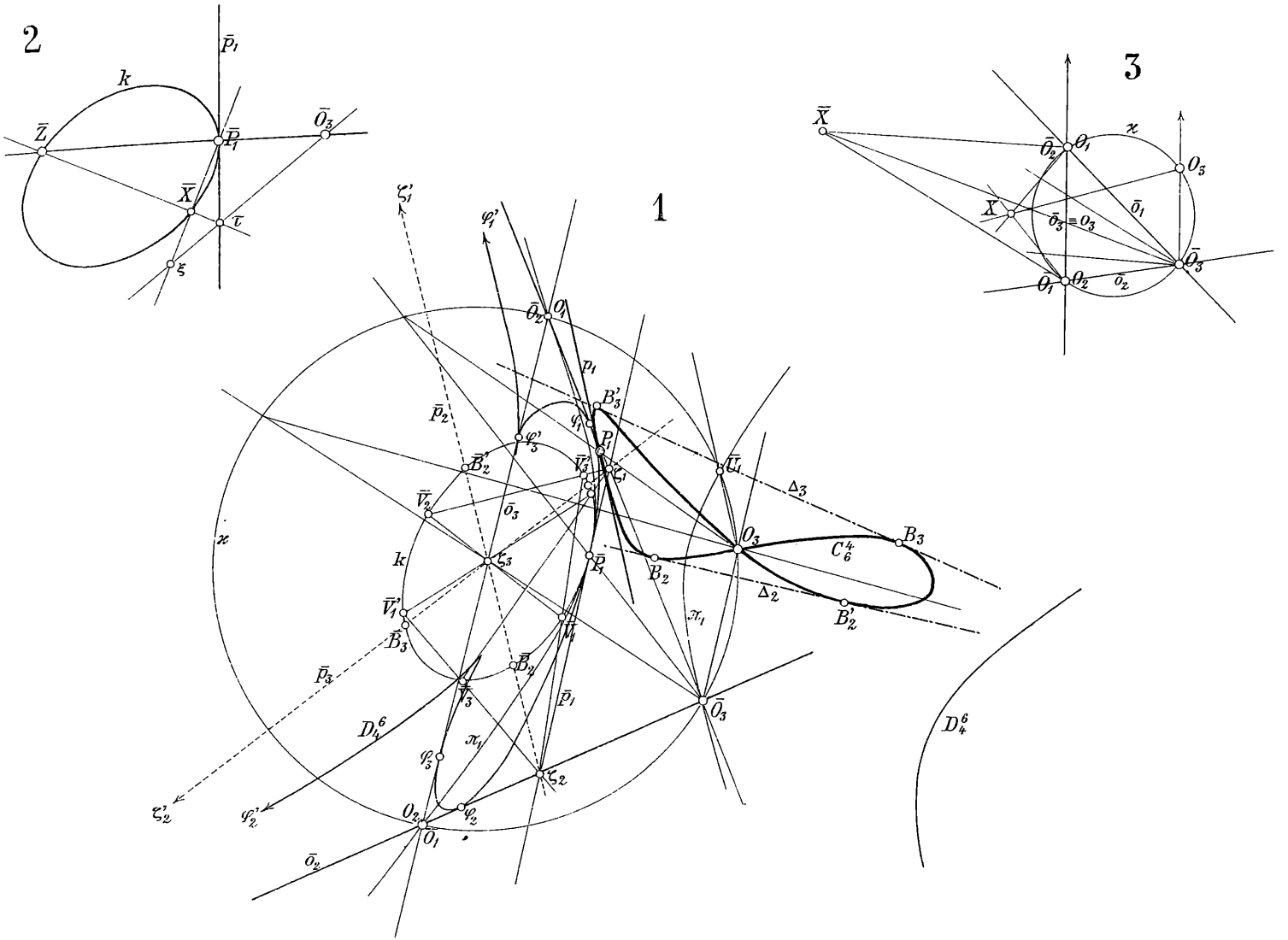
©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

letzteren Fälle, in denen die ∞ ferne Gerade zur Doppel- oder zur Inflexionstangente werden könnte, sind in einer Contactcurve C_6^4 mit zwei Undulationen unmöglich, weil nach (33) eine solche Curve überhaupt weder Doppel-, noch Wendetangenten haben kann (Fig. 19).

Ist endlich die Curve C_6^4 eine »Kreisverwandte« (circular), so besitzt sie in der Regel nur zwei reelle Asymptotenpunkte, weil sich die beiden Kreise $k\varkappa$ in bloss zwei Punkten reell treffen (Fig. 17).

36. Eine Undulation verleiht der Form einer Plancurve einen ausgesprochen eigenthümlichen Charakter, indem sich die Curve an einer derartigen Stelle längs der betreffenden Tangente abflacht und sozusagen platt gedrückt erscheint, welcher Charakter erst wieder in der Nähe der darauf folgenden Verzweigungspunkte — wo in der Regel eine stärkere Krümmung stattfindet — verloren geht. Es muss somit dem Vorkommen von Undulationstangenten bei Beurtheilung der gestaltlichen Verhältnisse einer unicursalen Plancurve vierter Ordnung die gleiche Berücksichtigung zu Theil werden, welche man längst den Eigenschaften der Doppel- und Wendetangenten zuerkannt hat, wie ich bereits eingangs dieses Aufsatzes zu bemerken die Gelegenheit nahm.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

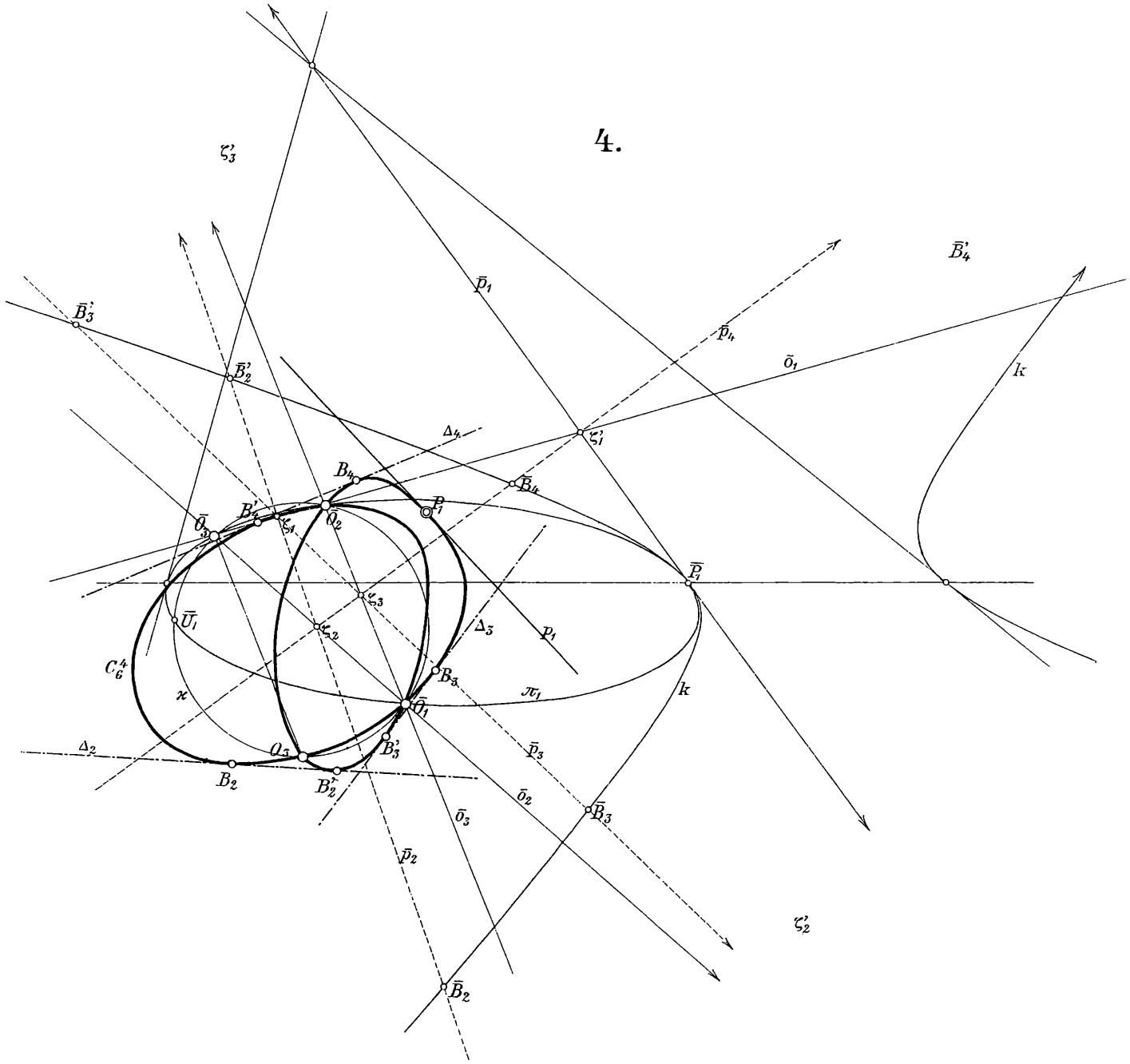


Autor del

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

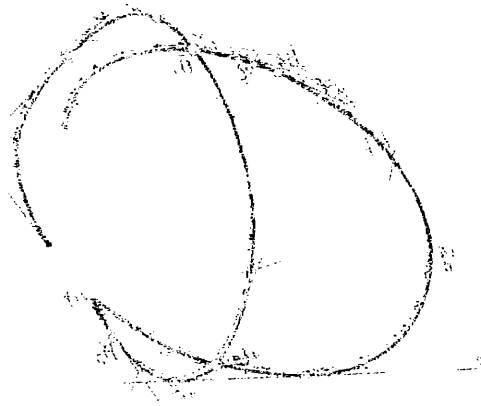
©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at



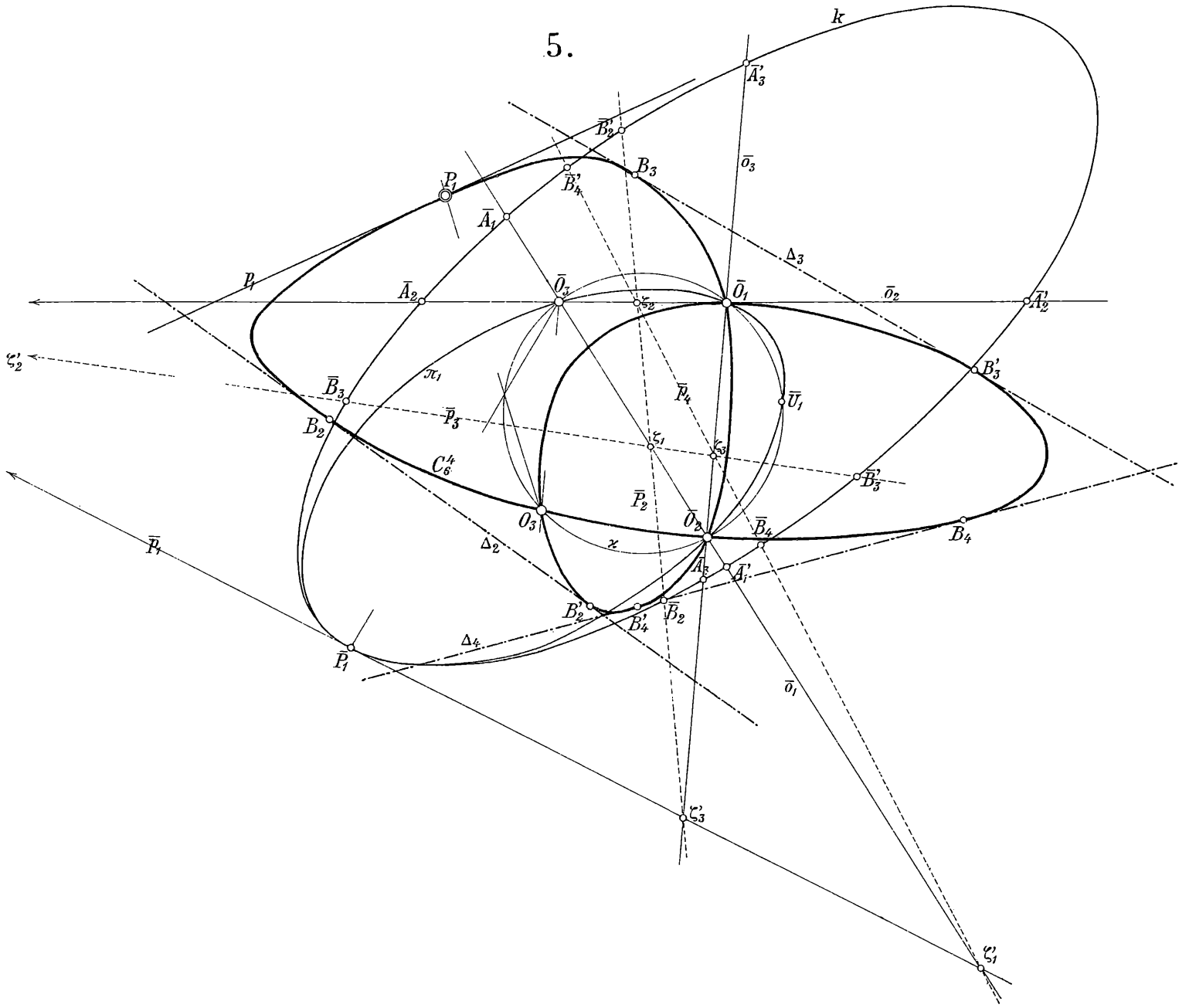
Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at



©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

5.



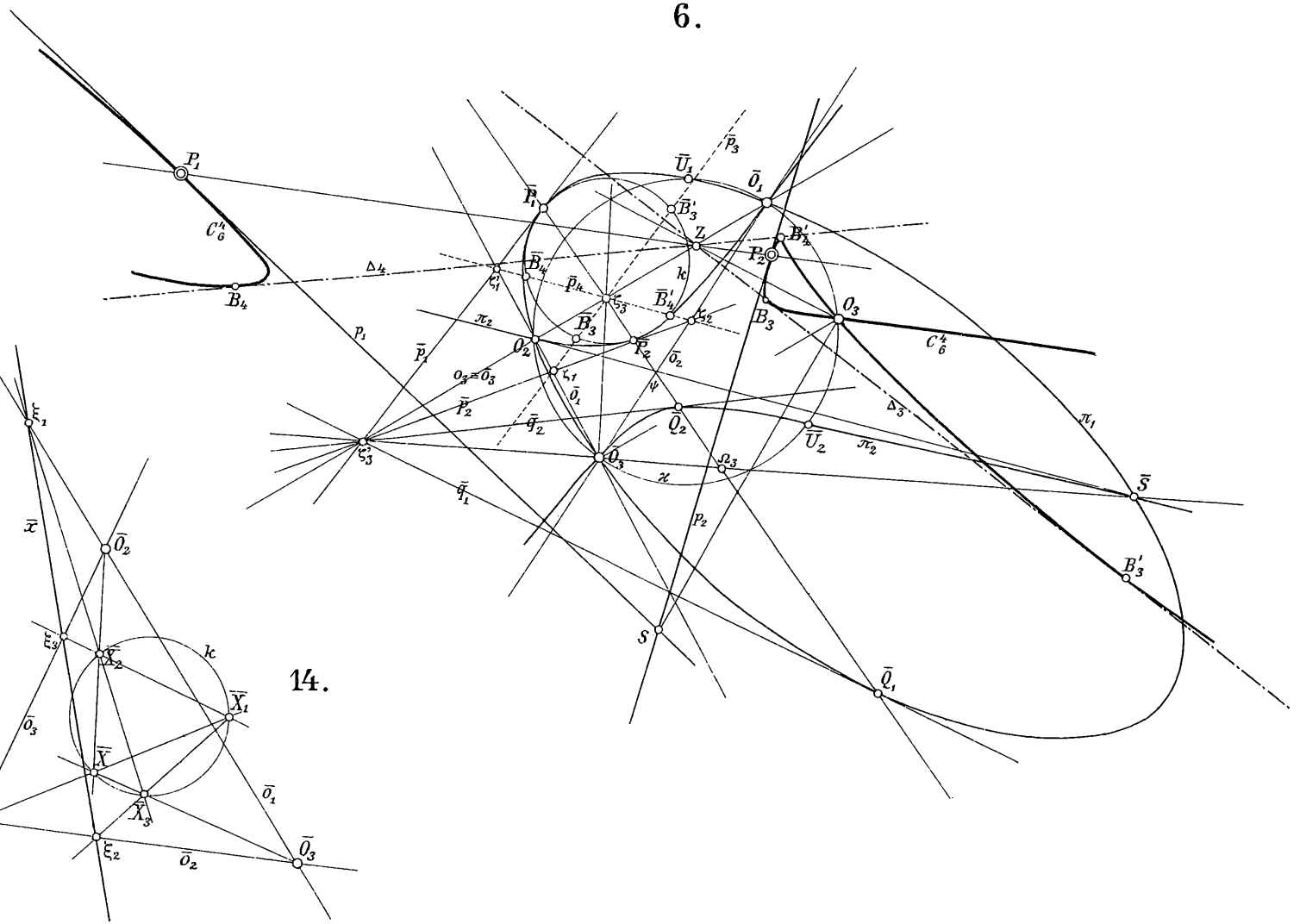
Autor del.

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

6.



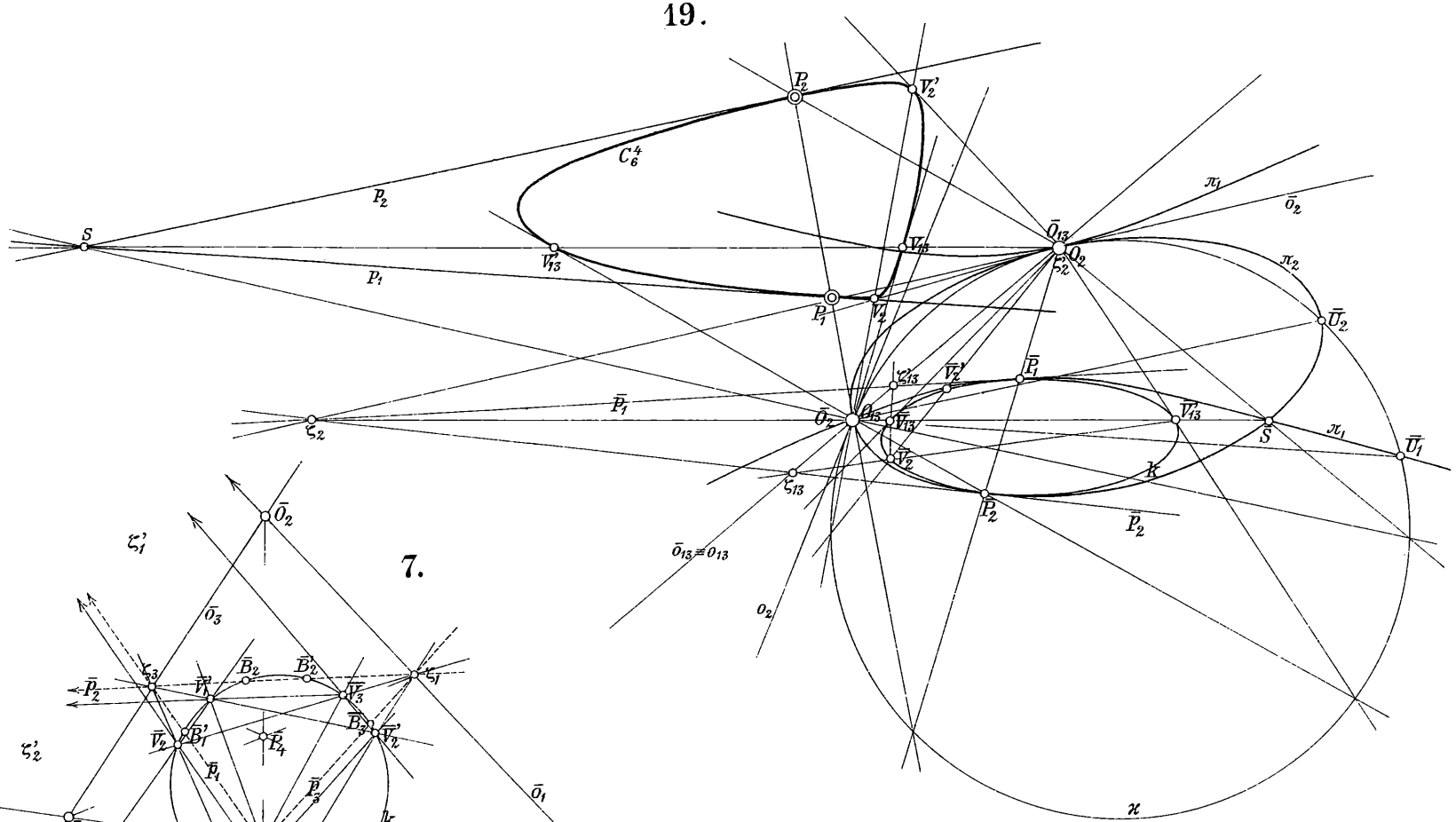
Autor del

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

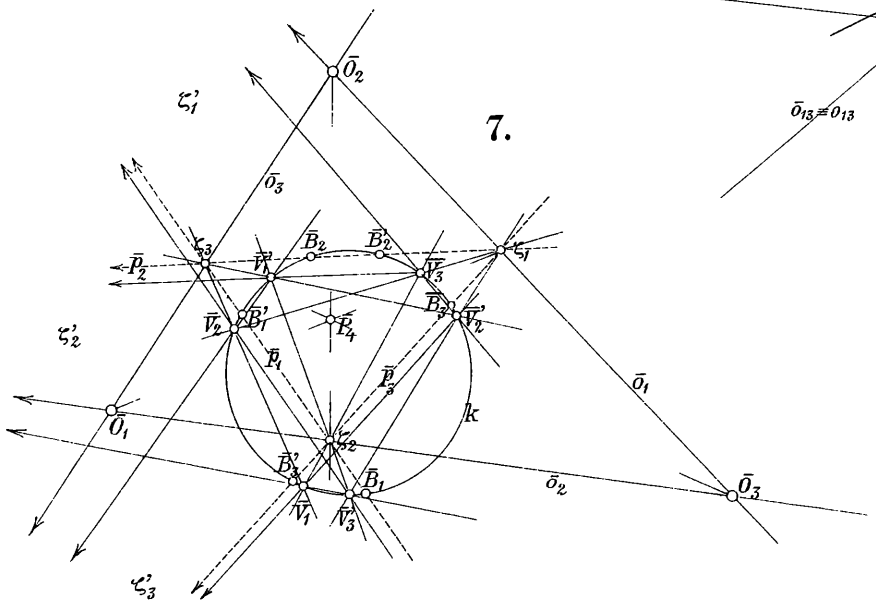
©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

19.



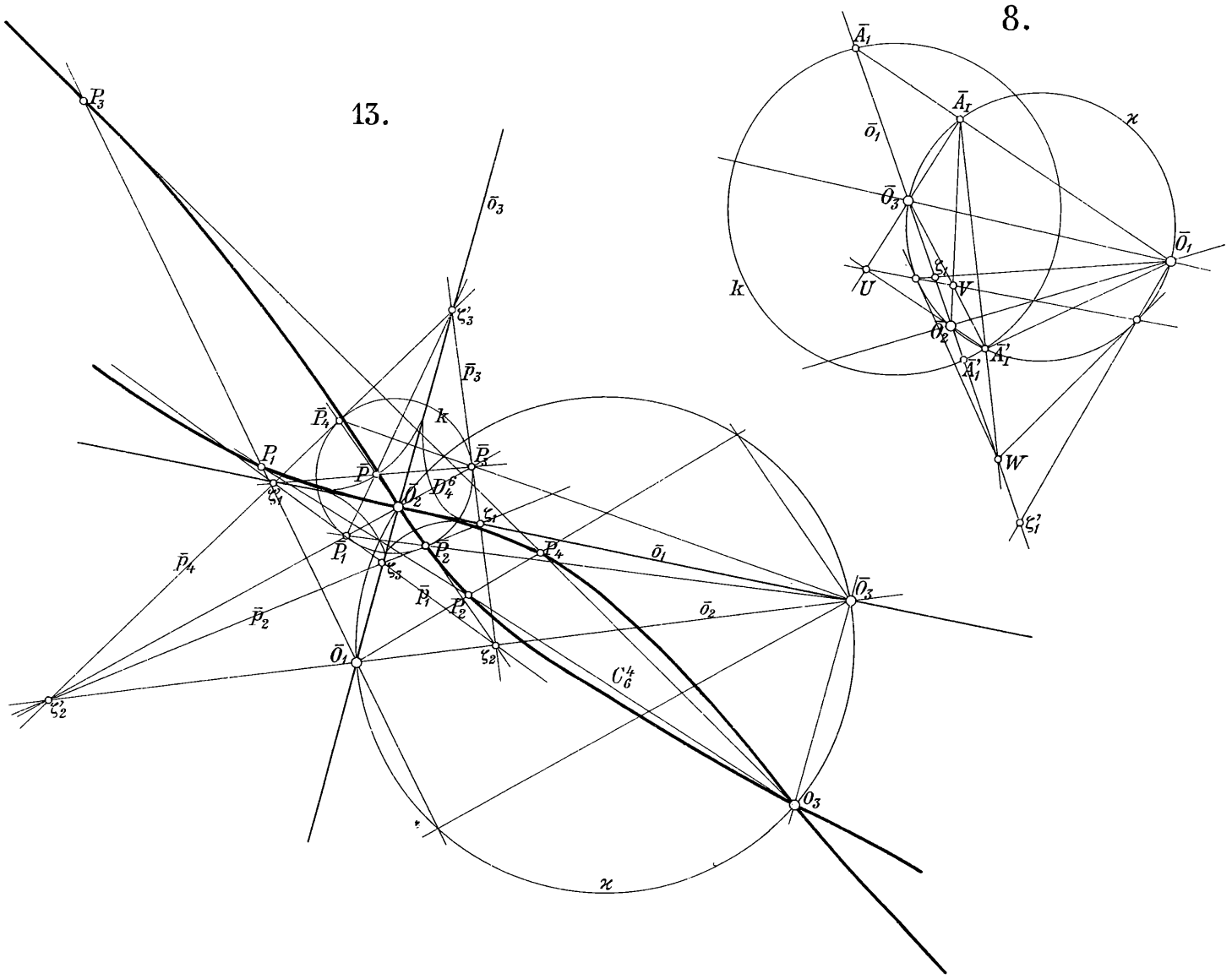
7.



Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at



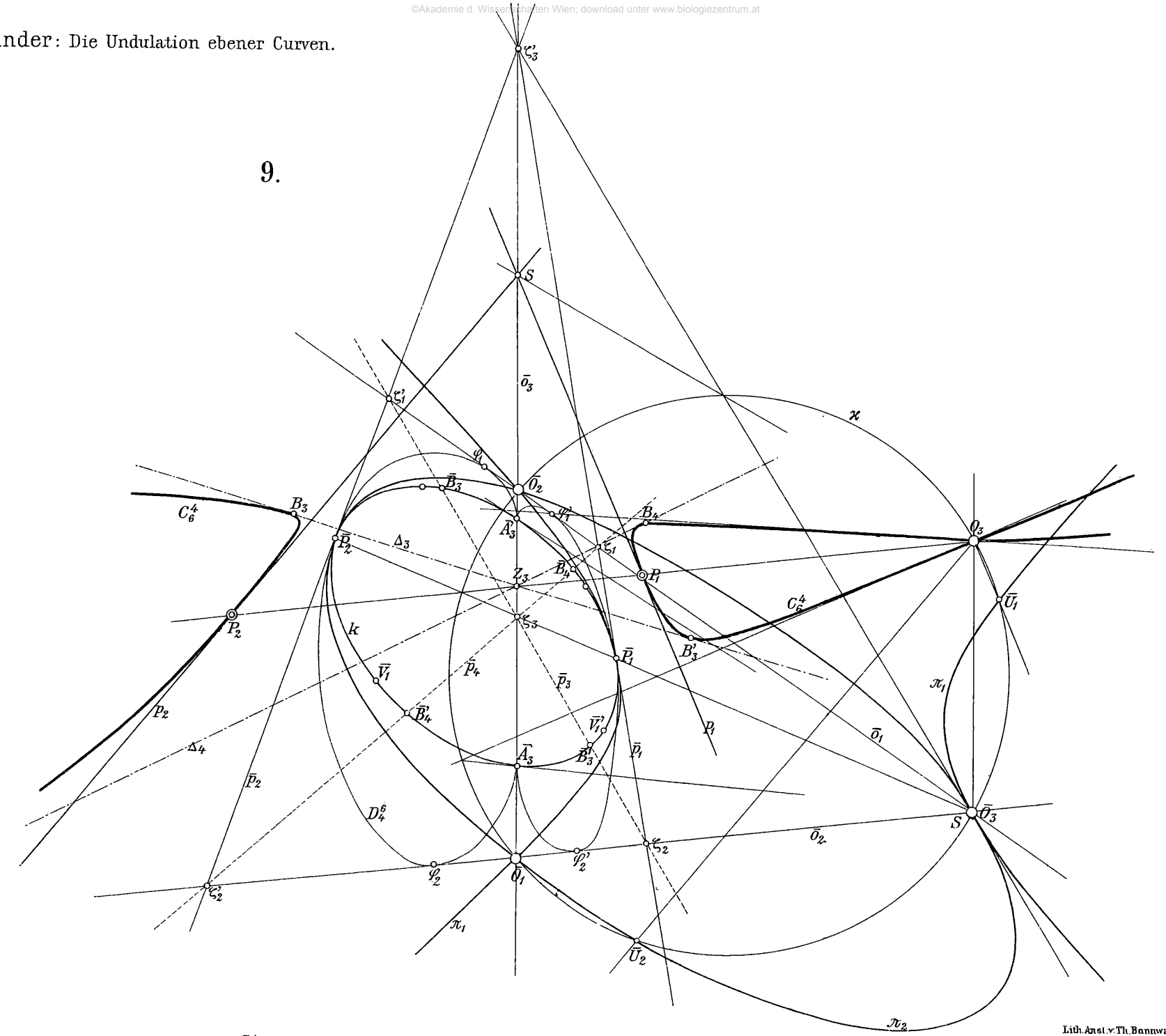
Autor del

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

9.

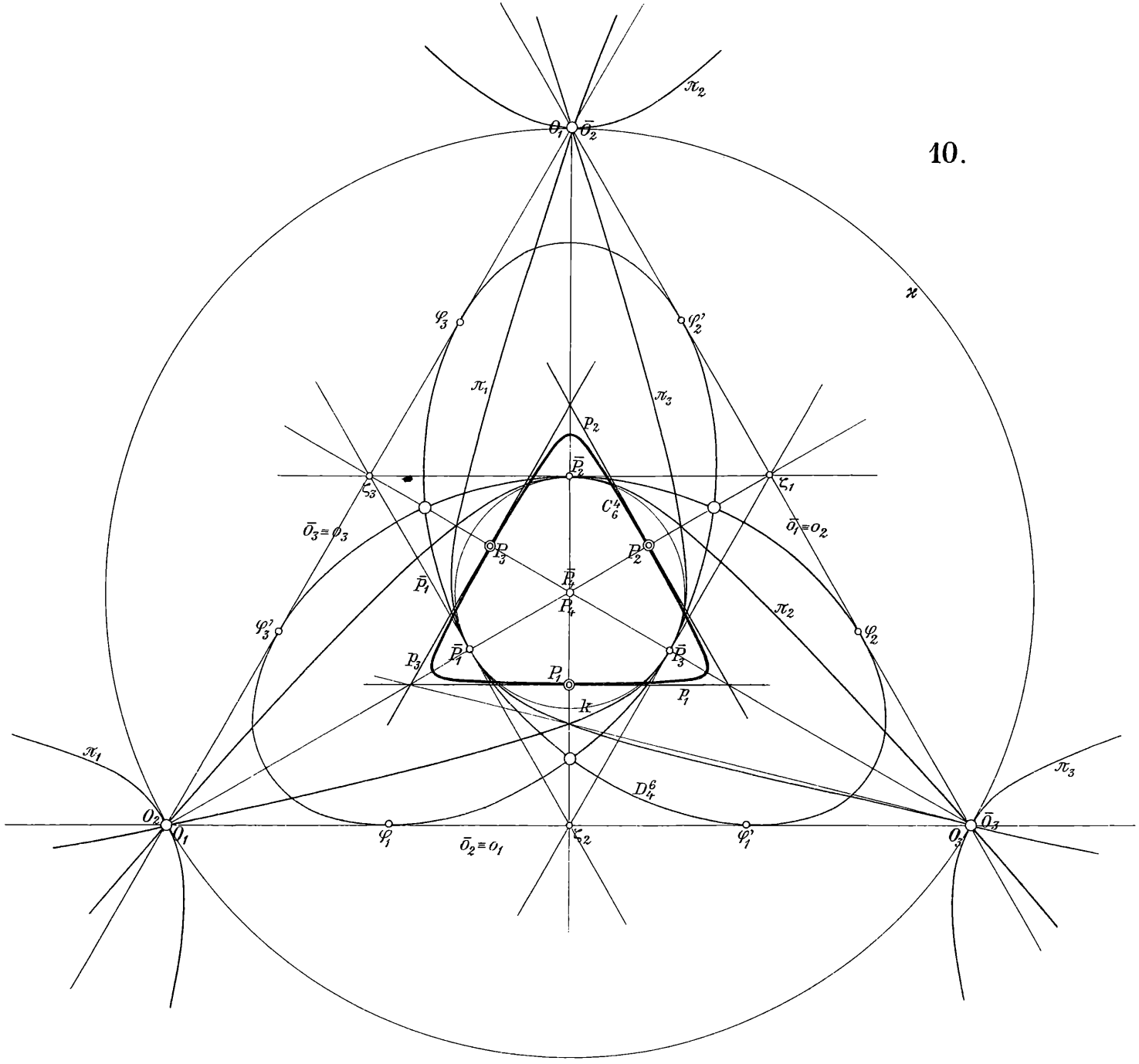


Autor del.

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

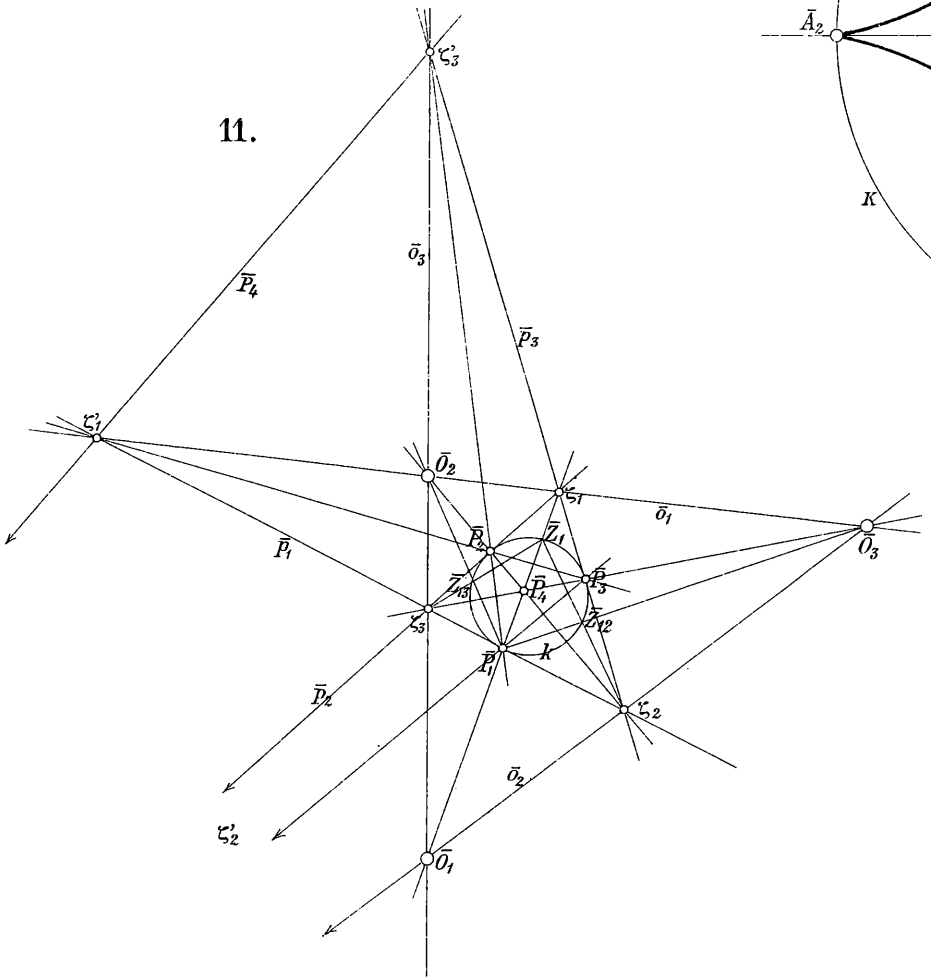


Lith. Anst v. Th. Bannwarth, Wien.

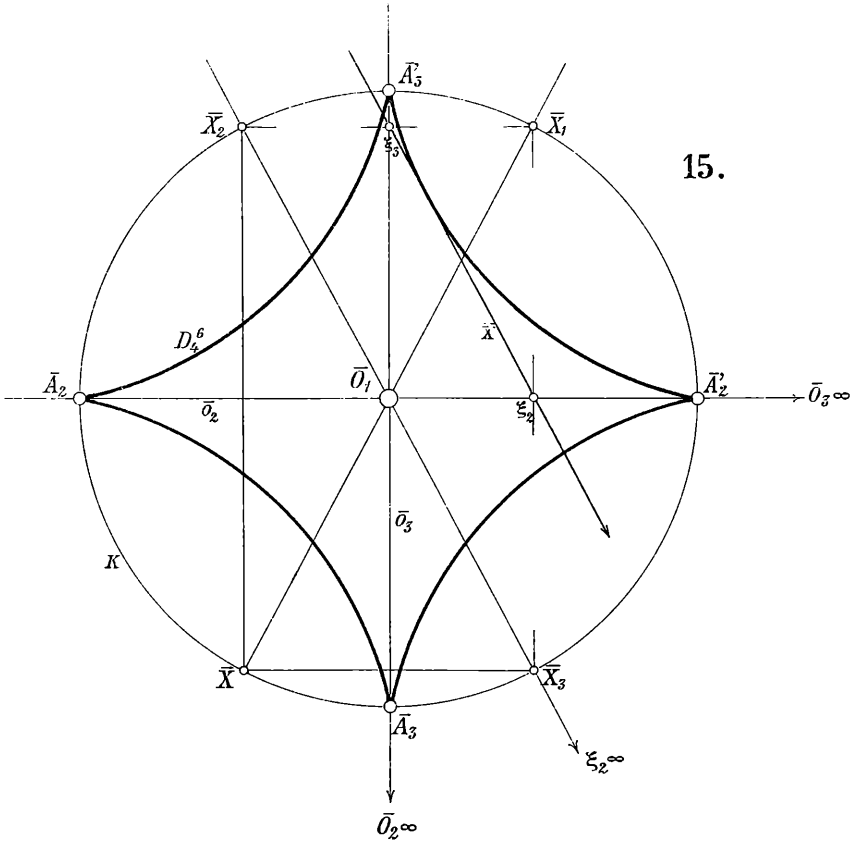
©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

11.



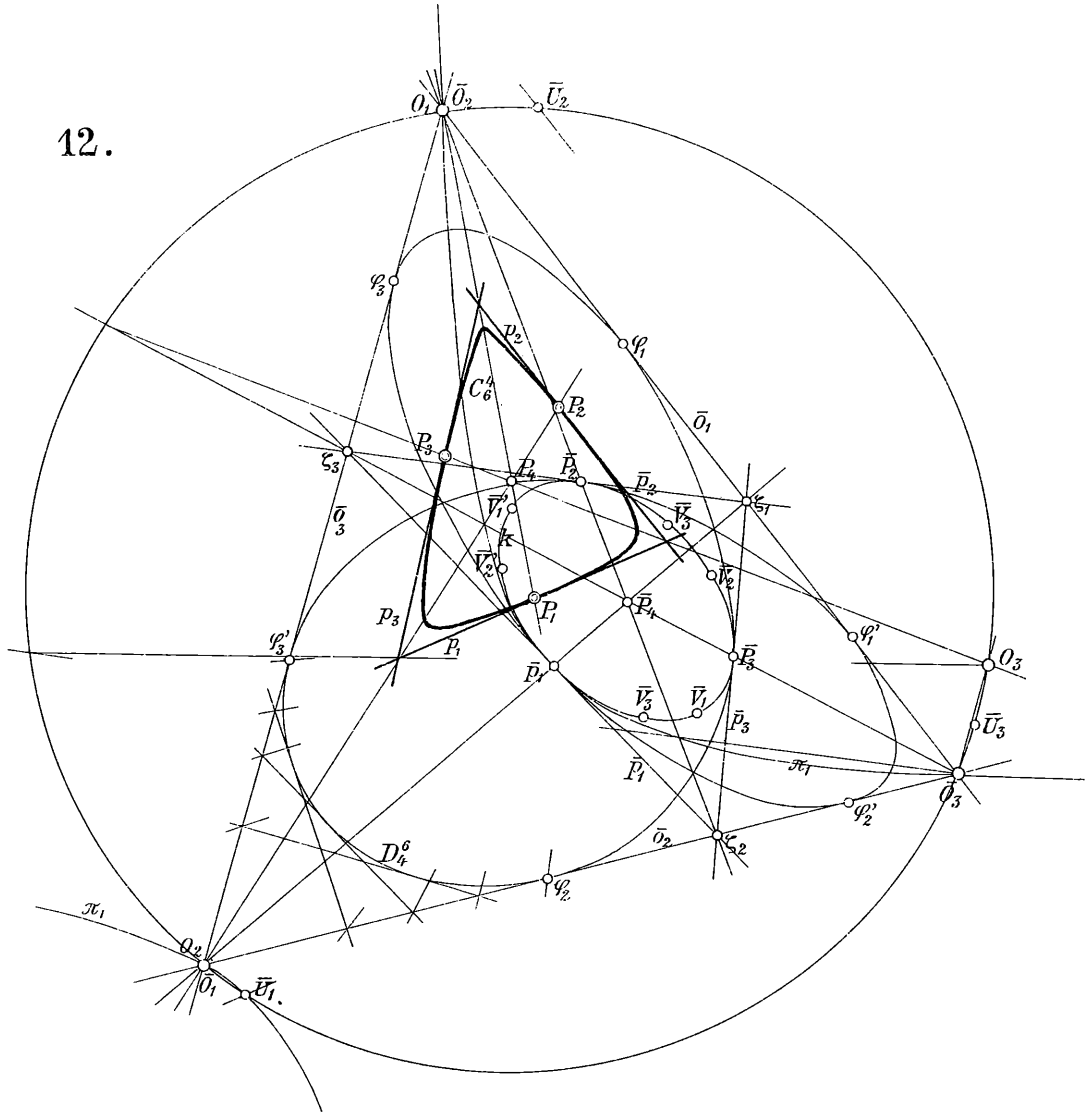
15.



©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

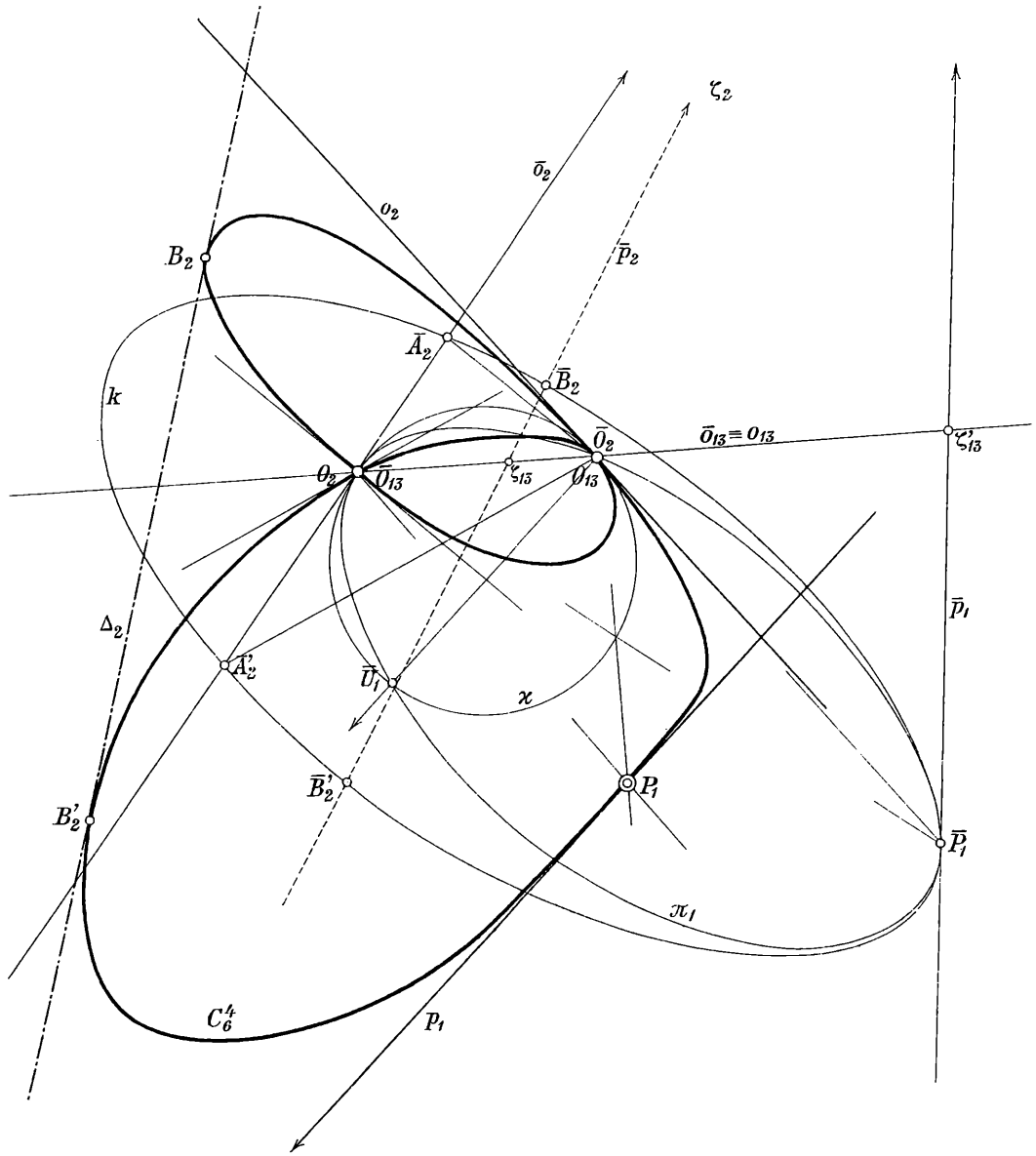
12.



©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

16.



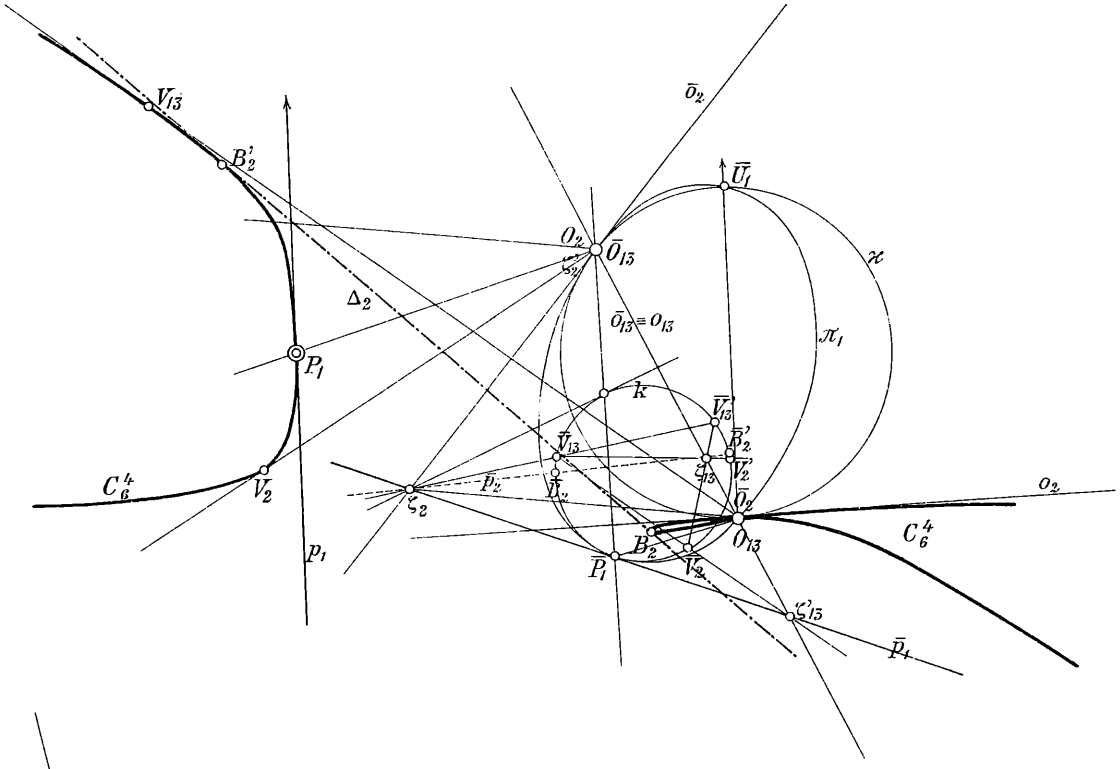
Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

Autor del.

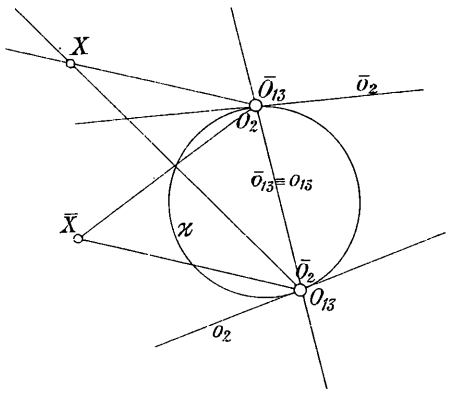
©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

17.



18.



Autor del

Lith. Anst v. Th. Bannwarth, Wien.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Binder Wilhelm

Artikel/Article: Die Undulationen ebener Curven C4 6. 295-322