©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement

Emil Waelsch,
o. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. März 1897.)

Die Tangenten an eine Schaar S geodätischer Linien einer Fläche F bilden ein Normalensystem, das ausser F noch eine Schale F_1 der Brennfläche hat. Durch einen Punkt a von F geht eine geodätische Linie der Schaar S und die Tangente t_a dieses Punktes berührt F_1 in einem Punkte A. Sind nun die geodätischen Linien von F zu ∞^1 Schaaren S gruppirt, so gehört zu jeder dieser Schaaren ein Punkt A in der Tangentialebene T_a von F im Punkte a, und alle diese Punkte erfüllen eine Curve $\mathfrak{A}$.

Hat die Fläche F das Liouville'sche Bogenelement:

$$(U+V)(du^2+dv^2),$$

so sind ihre geodätischen Linien bekanntlich gegeben durch

$$\sqrt{V+\alpha}\,du-\sqrt{U+\alpha}\,dv=0.$$

Für jeden Werth von α ergibt sich dann ein Schaar S, und allen diesen Schaaren entspricht eine Curve $\mathfrak{A}$, welche (wie ich in einer früheren Arbeit gezeigt habe)[1] eine Strophoide ist.

Ist F speciell auf eine Rotationsfläche abwickelbar, so ist $\mathfrak{A}$ ein Kreis, der durch den Punkt a geht.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass diese Eigenschaft der Flächen mit Liouville'schem Bogenelement für diese charak-

---

S. Sur les surfaces à l'élément de Liouville etc. Comptes rend. t. 116, p. 1435. — Über Tangentencongruenzen einer Fläche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, S. 757.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

teristisch ist. Wenn also verlangt wird, dass die Curven $\mathfrak{A}$, welche einer Gruppirung der geodätischen Linien von F entsprechen, sämmtlich Strophoiden seien, so wird F dieses Bogenelement haben.

1. Bei der Bewegung des rechtwinkeligen Triëders, dessen z-Achse mit der Normale N_a der Fläche F in a übereinstimmt, und dessen x-, respective y-Axe Tangenten an die Linien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind, geben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\delta x &= dx + A du + (q du + q_1 dv) z - (r du + r_1 dv) y, \\
\delta y &= dy + C dv + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z, \\
\delta z &= dz + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x
\end{aligned}$$

die Incremente der Coordinaten x, y, z eines Punktes A, dessen relative Incremente bezüglich des Triëders dx, dy, dz sind.[1]

Es werde nun verlangt, dass der Punkt A ein Punkt der Tangentialebene T_a sei und sich relativ zu dem Triëder auf der Curve $\mathfrak{A}$ in T_a bewege.

Sind dann

$$x = x(u, v, \lambda), \; y = y(u, v, \lambda), \; z = 0$$

die Coordinaten eines Punktes dieser Curve, so folgt, (wenn $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$ gesetzt wird)

$$\begin{aligned}
\delta x &= x_u du + x_v dv + x_\lambda d\lambda + A du - (r du + r_1 dv) y \\
\delta y &= y_u du + y_v dv + y_\lambda d\lambda + C dv + (r du - r_1 dv) x .
\end{aligned}$$

Sollen ferner die Punkte $A + \delta A$ in einer Ebene E_A liegen, die durch N_a geht, so muss

$$y \delta x - x \delta y = 0$$

sein; daher folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\{Ay - r(x^2 + y^2)\} du - \{Cx + r_1 (x^2 + y^2)\} dv + (x_\lambda y - y_\lambda x) d\lambda + \\
+ (x_u y + y_u x) du + (x_v y - y_v x) dv = 0 . \qquad 1)
\end{aligned}$$

---

[1] S. Darboux, Surfaces, t. II, p. 385.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Dies ist in den Veränderlichen u, v, λ die Gleichung eines Pfaff'schen Problems, welches das Flächenelement (A, E_A) enthält, das aus dem Punkte A und aus dessen Ebene E_A besteht.

Führt man in Gleichung 1) Polarcoordinaten ein, vermöge

$$x = \rho \cos \varphi, \; y = \rho \sin \varphi,$$

so erhält man:

$$\left(A \frac{\sin \varphi}{\rho} - r\right) du - \left(C \frac{\cos \varphi}{\rho} + r_1\right) dv - d\varphi = 0, \qquad 2)$$

und dies ist die Gleichung des Pfaff'schen Problems in den Veränderlichen u, v, φ. Die Curve $\mathfrak{A}$ ist hierbei in Polarcoordinaten gegeben durch die Gleichung

$$\rho = \rho(u, v, \varphi).$$

2. Soll das Pfaff'sche Problem der Gleichung 2) integrabel sein, so muss die Identität bestehen:

$$[A_v \rho_\varphi + C\rho_u] \cos \varphi - [C_u \rho_\varphi - A\rho_v] \sin \varphi + (r_v - r_{1u}) \rho^2 + AC = 0. \qquad 3)$$

Dann ordnen sich die ∞^3 Flächenelemente des Problems zu den ∞^1 Integralflächen an, und diese sind die Schalen F_1 der obigen Brennflächen. Die geodätischen Linien auf F, deren Tangenten eine dieser Flächen F_1 berühren, bilden eine der Schaaren S.[1]

Genügt ρ als Function von u, v, φ der Identität 3), so lassen sich die geodätischen Linien der Fläche F bestimmen. Zunächst muss hiezu das vermöge 3) integrable Pfaff'sche Problem durch Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung integrirt werden. Sind dann die ∞^1 Integralflächen F_1 bestimmt, so gibt jede derselben eine Schaar S geodätischer Linien und durch Integration einer weiteren Differentialgleichung erster Ordnung findet man dann die geodätischen Linien dieser Schaar (S. l. c.)

Da in der Gleichung 2) des Pfaff'schen Problems r und r_1 nur von dem Bogenelement der Fläche F abhängen, folgt

---

[1] Vergl. meine Arbeit: Über Flächen constanter Krümmung. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, S. 1317.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nebenbei: Ist das Pfaff'sche Problem, das zu den angenommenen Curven $\mathfrak{A}$ gehört, integrabel, so bleibt es integrabel, wenn man die Curven $\mathfrak{A}$ bei einer Deformation der Fläche unverändert mitnimmt.

Es werde nun vorausgesetzt, dass die Curve $\mathfrak{A}$ eine Strophoide sei, dass also sei

$$\rho = \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{a\cos\varphi + c\sin\varphi}, \tag{4}$$

wo a und c Functionen von u, v sind.

Bestimmt man hieraus ρ_u, ρ_v, ρ_φ und setzt diese in die Identität 3), so ergibt sich eine in $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ homogene Form 4ten Grades, deren 5 Coëfficienten für sich verschwinden müssen. So erhält man die 5 Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} A_v a + ACa^2 &= 0 \\ C_u c + ACc^2 &= 0 \\ Ac_v + A_v c - 2ACac &= 0 \\ Ca_v + Ca_u - 2ACac &= 0 \\ Aa_v + Cc_u - AC(a^2+c^2) - (r_v - r_{1u}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus den ersten der beiden Identitäten folgt:

$$a = -\frac{A_v}{AC}, \quad c = -\frac{C_u}{AC} \tag{6}$$

und hiernach ist die letzte der Identitäten 5) von selbst erfüllt, da sie nichts anderes ist, als der Ausdruck des Krümmungsmasses

$$K = \frac{r_v - r_{1u}}{AC}$$

(Die Formel 6) zeigen nebenbei, dass die Krümmungskreise der Strophoide im Punkte a respective durch die geodätischen Krümmungsmittelpunkte des Punktes a der Coordinatenlinien $u =$ const., $v =$ const. gehen.)

Die 3. und 4. der Identiäten 5) geben ferner:

$$(Ca)_u - 2ACac = 0, \quad (Ac)_v - 2ACac = 0,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

woraus sich vermöge 6) ergibt, wenn

$$lA = \alpha, \quad lC = \gamma \tag{7}$$

gesetzt wird:

$$\alpha_{uv} + 2\,\alpha_v \gamma_u = 0, \quad \gamma_{uv} + 2\,\alpha_v \gamma_u = 0. \tag{8}$$

Da also

$$\alpha_{uv} = \gamma_{uv}$$

ist, so folgt:

$$\gamma = \alpha + lU + lV \text{ oder } C = AUV \tag{9}$$

Daher ergibt sich aus der ersten Gleichung 8):

$$(l\alpha_v)_u = -2\,(\alpha_u + [lU]_u)$$

und hieraus hintereinander:

$$\begin{aligned} l\alpha_v &= -2\,(\alpha + lU) + lV_1, \\ \alpha_v &= A^{-2}\,U^{-2}\,V_1, \\ (A^2)_v &= 2\,U^{-2}\,V_1, \\ A^2 &= U^{-2}\,V_1 + U_2. \end{aligned}$$

Nach 9) ist nun:

$$C^2 = (U^{-2}\,V_1 + U_2)\,U^2 V^2. \tag{10}$$

Daher hat das Bogenelement von F die Gestalt:

$$(V_1 + U_2 U^2)\,\{U^{-2} du^2 + V^2 dv^2\}. \tag{11}$$

Werden jetzt die neuen Veränderlichen u_1, v_1 durch die Gleichungen

$$U^{-1} du = du_1, \quad U dv = dv_1$$

eingeführt, so erhält dieses Bogenelement die Liouville'sche Form.

Hiermit ist der Eingangs erwähnte Satz über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement bewiesen.[1]

---

[1] Für eine Fläche 2ter Ordnung, deren Bogenelement bekanntlich die Liouville'sche Form hat und deren confocale Flächen die obigen Flächen F_1 sind, folgt demnach: Der Ort des Punktes A, in welchem eine zu F confocale

4. Wird in Gleichung 4) $c = 0$ gesetzt, zerfällt also die Strophoide in den Kreis mit der Gleichung

$$a\rho = \sin\varphi,$$

so folgt aus der 2. Gleichung 6) $C_u = 0$, demnach muss im Element 11)

$$C^2 = (V_1 + U_2 U^2)\, V^2$$

von u unabhängig, also $U_2 U$ eine Constante sein. Das Bogenelement wird dann das einer auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Fläche.

Fläche F_1 von einer Tangente des Punktes a der Fläche F berührt wird, ist eine Strophoide; diese Curve schneidet die Focalcurven und hat in a die Hauptkrümmungstangenten zu Doppelpunkttangenten etc.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Waelsch Emil

Artikel/Article: Über Flächen mit Liouvilleschem Bogenelement. 323-328