Über einen asymptotischen Ausdruck

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

In den folgenden Zeilen soll die Aufgabe behandelt werden: Es ist eine positive binäre quadratische Form

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

von negativer Determinante

$$-\Delta = b^2 - ac$$

gegeben; es soll der asymptotische Ausdruck der über alle Paare ganzer Zahlen x, y ausser 0, 0, für welche

$$f(x, y) \leqq n$$

ausfällt, zu erstreckenden Summe

$$\Theta(n) = \Sigma \frac{1}{f}$$

für grosse Werthe von n ermittelt werden.

Es wird $n > 4a$ angenommen.

1.

Bezeichnet man mit Legendre die grösste in einer Grösse z enthaltene ganze Zahl mit $E(z)$ und setzt

$$E\left(\frac{na}{\Delta}\right) = \eta,$$

so kann y der Gleichung

$$af = (ax + by)^2 + \Delta y^2$$

zufolge nur einen der Werthe

$$-\eta, -\eta+1, -\eta+2, \ldots -1, 0, 1, \ldots \eta-1, \eta$$

haben, wenn $f \leqq n$ ausfallen soll. Fasst man daher alle Glieder von $\Theta(n)$, in welchen y einen und denselben Werth hat, in je eine Theilsumme zusammen und setzt zu diesem Ende für alle nicht negativen Werthe von y

$$x_1 = E\left(\frac{-by+\sqrt{an-\Delta y^2}}{a}\right)$$

$$x_2 = E\left(\frac{by+\sqrt{an-\Delta y^2}}{a}\right),$$

so wird

$$\Theta(n) = S(0)+S(1)+S(-1)+S(2)+S(-2)+\ldots+S(\eta)+S(-\eta)$$

und

$$S(y) = \sum_{-x_2}^{x_1} \frac{1}{f(x, y)}$$

$$S(-y) = \sum_{-x_1}^{x_2} \frac{1}{f(x, -y)},$$

wo $y \geqq 0$ angenommen wird. Da aber

$$S(-y) = \sum_{-x_1}^{x_2} \frac{1}{f(-x, y)} = \sum_{x_1}^{-x_2} \frac{1}{f(x, y)}$$
$$= S(y)$$

ist, so wird einfacher

$$\Theta(n) = S(0)+2S(1)+2S(2)+\ldots+2S(\eta). \tag{1}$$

2.

Da

$$S(0) = \frac{2}{a}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{x_1^2}\right)$$
$$= \frac{2}{a}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots \text{in inf.}\right)$$
$$-\frac{2}{a}\left(\frac{1}{(x_1+1)^2}+\frac{1}{(x_1+2)^2}+\ldots\right)$$

und

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{(x_1+1)^2}+\frac{1}{(x_1+2)^2}+\ldots<\frac{2}{x_1+1}$$

$$x_1+1=1+E\left(\sqrt{\frac{n}{a}}\right)>\sqrt{\frac{n}{a}}$$

ist, so hat man

$$\left|S(0)-\frac{\pi^2}{3a}\right|<\frac{4}{\sqrt{an}}.$$

Wird daher eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kurz mit $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ bezeichnet, so ergibt sich

$$S(0)=\frac{\pi^2}{3a}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

3.

Ist $y>0$, so sei

$$\sum_{x=-\infty}^{x=\infty}\frac{1}{f}=\varphi(y)$$

$$\sum_{1+x_1}^{\infty}\frac{1}{f}=\psi_1(y)$$

$$\sum_{1+x_2}^{\infty}\frac{1}{f(-x,y)}=\psi_2(y).$$

Es wird dann

$$S(y)=\varphi(y)-\psi_1(y)-\psi_2(y).$$

Setzt man

$$\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{a}=\alpha\qquad\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{a}=\beta,$$

so ist identisch

$$\frac{1}{f}=\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{\alpha y-x}+\frac{1}{\beta y+x}\right)$$

und daher

$$\varphi(y)=\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha y-x}+\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta y+x}.$$

Die hier auftretenden Reihen sind mittelst der Formel

$$\frac{2\pi}{e^{2\pi u}-1}=-\pi+\frac{1}{u}+\frac{2u}{u^2+1^2}+\frac{2u}{u^2+2^2}+$$

$$=-\pi+i\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{iu+m}$$

summirbar. Es wird

$$i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha y-x}=\pi+2\pi\frac{e^{2\pi i\alpha y}}{1-e^{2\pi i\alpha y}}$$

$$i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta y+x}=\pi+2\pi\frac{e^{2\pi i\beta y}}{1-e^{2\pi i\beta y}}$$

und man hat demnach

$$\varphi(y)=\frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}}+\frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}}\,\frac{e^{2\pi i\alpha y}}{1-e^{2\pi i\alpha y}}+\frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}}\,\frac{e^{2\pi i\beta y}}{1-e^{2\pi i\beta y}}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$x+\beta y=v \qquad x-\alpha y=w,$$

so ist für alle über x_1 liegenden Werthe von x

$$|v|=|w|=\sqrt{\frac{f}{a}}>1$$

und daher

$$\log(1+v)-\log v=\log\left(1+\frac{1}{v}\right)$$

$$=\frac{1}{v}-\frac{1}{2v^2}+\frac{1}{3v^3}-\ldots$$

$$\log(1+w)-\log w=\log\left(1+\frac{1}{w}\right)$$
$$=\frac{1}{w}-\frac{1}{2w^2}+\frac{1}{3w^3}-\dots$$

Hienach wird

$$\frac{1}{f}=\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)$$
$$=\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{1+v}{1+w}\right)-\log\frac{v}{w}\right)+U, \qquad (2)$$

wo

$$U=\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{w^2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{w^3}\right)+\dots\right).$$

U lässt sich in folgender Weise abschätzen. Es ist

$$\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v^m}-\frac{1}{w^m}\right)=$$
$$=\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{v^{m-1}}+\frac{1}{v^{m-2}w}+\dots+\frac{1}{w^{m-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{f}\left(\frac{1}{v^{m-1}}+\frac{1}{v^{m-2}w}+\dots+\frac{1}{w^{m-1}}\right)$$

und daher

$$\left|\frac{i}{2my\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v^m}-\frac{1}{w^m}\right)\right|\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{mf}\left(\left|\frac{1}{v}\right|^{m-1}+\left|\frac{1}{v}\right|^{m-2}\left|\frac{1}{w}\right|+\dots+\left|\frac{1}{w}\right|^{m-1}\right)$$
$$<\frac{1}{f}\left(\sqrt{\frac{a}{f}}\right)^{m-1}$$

Hieraus folgt

$$|U|<\frac{1}{f}\left(\sqrt{\frac{a}{f}}+\left(\sqrt{\frac{a}{f}}\right)^2+\dots\right)$$
$$<\frac{\sqrt{a}}{f(\sqrt{f}-\sqrt{a})};$$

da aber $n > 4a$ angenommen wurde und hier nur über n liegende Werthe von f in Betracht kommen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{f}-\sqrt{a}} < \frac{2}{\sqrt{f}}$$

und es ergibt sich

$$|U| < \frac{2\sqrt{a}}{f^{3/2}}.$$

Weiter ist

$$\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}} =$$

$$= \frac{2\,\Delta y^2 \left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)}{\sqrt{f(x,y)}\sqrt{f(x+1,y)}\left((a(x+1)+by)\sqrt{f(x,y)}+(ax+by)\sqrt{f(x+1,y)}\right)}$$

$$\begin{aligned}(a(x+1)+by)\sqrt{f(x,y)}+(ax+by)\sqrt{f(x+1,y)} &= \\ = \left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)&\left(\sqrt{f(x,y)}+\sqrt{f(x+1,y)}\right) \\ &-\frac{1}{2}a\left(\sqrt{f(x+1,y)}-\sqrt{f(x,y)}\right).\end{aligned}$$

Für Werthe von x, welche über x_1 liegen, hat man aber

$$\begin{aligned}f(x+1,y)-f(x,y) &= 2\left(ax+by+\frac{1}{2}a\right) \\ &> 0 \\ 3f(x,y)-f(x+1,y) &= f(x,y)-2a+f(x-1,y) \\ &> 0,\end{aligned}$$

und es wird demzufolge

$$\begin{aligned}&(a(x+1)+by)\sqrt{f(x,y)}+ \\ &\quad+(ax+by)\sqrt{f(x+1,y)} < 2\left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)\sqrt{f(x+1,y)}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}} &> \frac{\Delta y^2}{f(x+1,y)\sqrt{f(x,y)}} \\ &> \frac{\Delta y^2}{3f^{3/2}}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|U| < \frac{6\sqrt{a}}{\Delta y^2}\left(\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}}\right) - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}}\Bigg)$$

und man hat nach (2)

$$\left|\frac{1}{f} - \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{1+x+\beta y}{1+x-\alpha y}\right) + \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\log\frac{x+\beta y}{x-\alpha y}\right|$$
$$< \frac{6\sqrt{a}}{\Delta y^2}\left(\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}}\right).$$

Wird diese Ungleichung nach x von $x = 1+x_1$ bis $x = \infty$ summirt, so ergibt sich für $x = \infty$

$$\log\frac{1+x+\beta y}{1+x-\alpha y} = 0$$

$$\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} = \sqrt{\frac{af(x+1,y)-\Delta y^2}{f(x+1,y)}} = \sqrt{a}$$

und man erhält

$$\left|\psi_1(y) - \frac{1}{2iy\sqrt{\Delta}}\log\frac{1+x_1+\beta y}{1+x_1-\alpha y}\right| < \frac{6a}{\Delta y^2}\left(1 - \frac{a(x_1+1)+by}{\sqrt{af(x+1,y)}}\right).$$

Nun ist

$$1+x_1 = \frac{-by+\sqrt{an-\Delta y^2}}{a} + \varepsilon,$$

wo $0 < \varepsilon \leqq 1$, und daher

$$1+x_1+\beta y = \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{a} + \varepsilon$$
$$= \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{a}\left(1+\frac{\varepsilon}{n}(\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta})\right)$$

$$1+x_1-\alpha y = \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}{a} + \varepsilon$$
$$= \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}{a}\left(1+\frac{\varepsilon}{n}(\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta})\right)$$

$$\log\frac{1+x_1+\beta y}{1+x_1-\alpha y}=$$

$$=\log\frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}+\log\frac{1-\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}}{1+\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}};$$

da aber

$$\log\frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}=2i\operatorname{arctg}\frac{y\sqrt{\Delta}}{\sqrt{an-\Delta y^2}}$$

$$=2i\arcsin y\sqrt{\frac{\Delta}{an}}$$

$$\left|\log\frac{1-\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}}{1+\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}}\right|<\log\frac{1+\dfrac{y\sqrt{\Delta}}{n}}{1-\dfrac{y\sqrt{\Delta}}{n}}$$

$$<\frac{2y\sqrt{\Delta}}{n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\Delta y^2}{n^2}}$$

$$<\frac{2y\sqrt{\Delta}}{n-a}$$

ist, so folgt

$$\left|\frac{1}{2iy\sqrt{\Delta}}\log\frac{1+x_1+\beta y}{1+x_1-\alpha y}-\frac{1}{y\sqrt{\Delta}}\arcsin y\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right|<\frac{1}{n-a}.$$

Überdies ist

$$1-\frac{a(x_1+1)+by}{\sqrt{af(x_1+1,y)}}=1-\sqrt{\frac{f(x_1+1,y)-\dfrac{\Delta y^2}{a}}{f(x_1+1,y)}}$$

$$=\frac{\Delta y^2}{a}\,\frac{1}{\sqrt{f(x_1+1,y)}\left(\sqrt{f(x_1+1,y)}+\sqrt{f(x_1+1,y)-\dfrac{\Delta y^2}{a}}\right)}$$

$$<\frac{\Delta y^2}{af(x_1+1,y)}<\frac{\Delta y^2}{an}.$$

Man hat also

$$\left|\psi_1(y) - \frac{1}{y\sqrt{\Delta}} \arcsin y \sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right| < \frac{1}{n-a} + \frac{6}{n}.$$

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich

$$\left|\psi_2(y) - \frac{1}{y\sqrt{\Delta}} \arcsin y \sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right| < \frac{1}{n-a} + \frac{6}{n}.$$

Hienach wird

$$S(y) = \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i\alpha y}}{1-e^{2\pi i\alpha y}} + \frac{e^{2\pi i\beta y}}{1-e^{2\pi i\beta y}}\right)$$

$$-\frac{2}{y\sqrt{\Delta}} \arcsin y \sqrt{\frac{\Delta}{an}} + \delta,$$

wo

$$\delta < \frac{12}{n} + \frac{2}{n-a}.$$

4.

Setzt man die gefundenen Werthe von $S(0)$ und $S(y)$ in (1) ein, so ergibt sich

$$\Theta(n) = \frac{\pi^2}{3a} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + . \quad + \frac{1}{\eta}\right)$$

$$+ \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i\alpha}}{1-e^{2\pi i\alpha}} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i\alpha}}{1-e^{4\pi i\alpha}} + \quad + \frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i\alpha}}{1-e^{2\eta\pi i\alpha}}\right)$$

$$+ \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i\beta}}{1-e^{2\pi i\beta}} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i\beta}}{1-e^{4\pi i\beta}} + . \; . + \frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i\beta}}{1-e^{2\eta\pi i\beta}}\right)$$

$$-\frac{4}{\sqrt{\Delta}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{\Delta}{an}} + \frac{1}{2}\arcsin 2\sqrt{\frac{\Delta}{an}} + \ldots + \frac{1}{\eta}\arcsin\eta\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Nun ist bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\eta}$ oder $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\eta}=\log\eta+\mathfrak{C}$$

$$=\log\sqrt{\frac{an}{\Delta}}+\mathfrak{C}$$

$$\frac{e^{2\pi i\alpha}}{1-e^{2\pi i\alpha}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i\alpha}}{1-e^{4\pi i\alpha}}+\ldots+\frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i\alpha}}{1-e^{2\eta\pi i\alpha}}=$$

$$=-\log\prod_{1}^{\infty}(1-e^{2m\pi i\alpha})$$

$$=\frac{\pi i\alpha}{12}-\log\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$\frac{e^{2\pi i\beta}}{1-e^{2\pi i\beta}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i\beta}}{1-e^{4\pi i\beta}}+\ldots+\frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i\beta}}{1-e^{2\eta\pi i\beta}}=$$

$$=-\log\prod_{1}^{\infty}(1-e^{2m\pi i\beta})$$

$$=\frac{\pi i\beta}{12}-\log\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\alpha}{3}\right),$$

wo $\mathfrak{C}$ die Euler'sche Constante bezeichnet und

$$\vartheta_1(x,\omega)=-i\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{(2m+1)^2 i\pi\omega+(2m+1)i\pi x}$$

ist. Ferner wird

$$\frac{1}{m}\arcsin m\sqrt{\frac{\Delta}{an}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\Delta}{an}}+\frac{1}{2}\,\frac{m^2}{3}\left(\frac{\Delta}{an}\right)^{3/2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{m^4}{5}\left(\frac{\Delta}{an}\right)^{5/2}+\ldots;$$

da aber

$$1+2^{2k}+3^{2k}+\ldots+\eta^{2k}=\frac{\eta^{2k+1}}{2k+1}+\gamma\eta^{2k}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{an}{\Delta}}-\gamma_1$$

ist, wo γ, γ_1 nicht negative echte Brüche bezeichnen, so folgt

$$(1+2^{2k}+\ldots+\eta^{2k})\left(\frac{\Delta}{an}\right)^{k+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\left(1-\gamma_1\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right)^{2k+1}}{2k+1}+\gamma\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\left(1-\gamma_1\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\gamma'\sqrt{\frac{\Delta}{an}},$$

wo $|\gamma'|<1$ ist, und man hat bis auf eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\arcsin\sqrt{\frac{\Delta}{an}}+\frac{1}{2}\arcsin 2\sqrt{\frac{\Delta}{an}}+\ldots+\frac{1}{\eta}\arcsin\eta\sqrt{\frac{\Delta}{an}}=$$

$$1+\frac{1}{2}\;\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\;\frac{1}{5^2}+\ldots \text{in inf.}$$

$$=\int_0^1 \arcsin x\,\frac{dx}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cot\varphi\,d\varphi$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi\log 2}{2}.$$

Hienach lautet der gewünschte asymptotische Ausdruck:

$$\Theta(n)=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log n+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\mathfrak{C}-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log 4\Delta$$

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\alpha}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\beta}{3}\right)}{3\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Derselbe leistet in der Theorie der singulären Moduln ähnliche Dienste wie die Kronecker'sche Formel.[1]

[1] Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885 und 1889.