

## Zwei Grenzwerte, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist

O. Stolz,

c. M. k. Akad.

Das obere Integral lässt sich als besonderer Fall der nachstehenden Grenzwerte betrachten, die wir, um eine bestimmte Annahme vor uns zu haben, für die Punkte einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit erklären wollen.

1. Erster Grenzwert. »In jedem Punkte  $xy$  des im Endlichen gelegenen Systems  $f$  (dessen Punkte also sämtlich innerhalb eines bestimmten Rechtecks liegen, dessen Seiten zu den Coordinatenachsen parallel sind) sei eine reelle Function  $f(x, y)$  eindeutig definiert, und zwar sei sie endlich, d. h. es gibt zwei Zahlen  $A$  und  $B$  derart, dass, mag  $xy$  was immer für ein Punkt des Systems  $f$  sein,

$$A < f(x, y) < B \quad (1)$$

ist. Über das Punktsystem  $f$  wird eine Schaar oder ein Netz von einfachen geradlinig-begrenzten Vielecken mit den Zahlen  $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$  in der Weise ausgebreitet, dass zu jedem von ihnen Punkte von  $f$  gehören und umgekehrt jeder Punkt von  $f$  mindestens in einem vorkommt. Diese  $\tau_r$  sind entweder sämtlich positiv oder negativ. Beschränkt man den Punkt  $xy$  auf alle zum Vielecke  $\tau_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) gehörigen Systempunkte, so sei  $g_r$  die obere Grenze von  $f(x, y)$ .

Dann hat die Summe

$$\sum_1^n g_r \tau_r \quad (2)$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme eines jeden Vielecks  $\tau_r$  nach den beiden Dimensionen der Ebene einen endlichen Grenzwert  $G$ , d. h. jeder positiven Zahl  $\varkappa$  entspricht eine andere  $\lambda$  so, dass

$$\left| \sum_1^n g_r \tau_r - G \right| < \varkappa \quad (3)$$

ist, wenn nur der Durchmesser<sup>1</sup> ( $D_r$ ) eines jeden der Vielecke  $\tau_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) kleiner als  $\lambda$  ist.« Diese Beziehung wird kurz durch die Formel

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^n g_r = G \quad (I)$$

angedeutet.<sup>2</sup>

Beweis. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.  $f(x, y)$  nimmt für die Punkte des Systems  $\mathfrak{f}$  negative Werthe nicht an; es ist also dafür  $f(x, y) \geq 0$ , somit  $g_r \geq 0$  und

$$\sum_1^n g_r \tau_r \geq 0. \quad (4)$$

Auch ist jetzt  $B > 0$ .

Zunächst betrachten wir nur eine unbegrenzte Reihe  $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \dots \mathfrak{I}_m \dots$  solcher Schaaren von Vielecken in der  $xy$ -Ebene, dass der Durchmesser eines jeden zur Schaar  $\mathfrak{I}_m$  gehörigen Vielecks  $\tau_{m,n}$  kleiner als eine beliebige vorgegebene Zahl  $\lambda$  ausfällt, wenn nur  $m$  gross genug ist und dabei keines von ihnen in zwei benachbarten, dem System  $\mathfrak{I}_{m-1}$  zugehörigen Vielecken liegt. Von den Vielecken der Schaar  $\mathfrak{I}_m$  kommen zunächst alle jene in Betracht, zu denen mindestens je ein Punkt von  $\mathfrak{f}$  gehört. Diese seien

$$\tau_{m,1} \tau_{m,2} \dots \tau_{m,n_m} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

<sup>1</sup> Unter Durchmesser eines einfachen Vielecks wird der grösste Abstand irgend zweier Punkte seines Umfanges verstanden.

<sup>2</sup> Für das Punktsystem auf einer Geraden lässt sich der Satz genau nach dem Verfahren zeigen, welches der Verfasser seinen »Grundzügen der Differential- und Integralrechnung«, I, S. 353 eingeschlagen hat, um die Existenz des oberen Integrals einer Function einer Veränderlichen nachzuweisen.

Wir bezeichnen ferner die obere Grenze der Werthe von  $f(x, y)$  zu den dem System  $f$  angehörigen Punkten von  $\tau_{m,u}$  mit  $g_{m,u}$  und setzen

$$\sum_1^{n_m} g_{m,u} \tau_{m,u} = \Sigma_m. \quad (6)$$

Beim Übergange von der Schaar  $\mathfrak{T}_m$  zu  $\mathfrak{T}_{m+1}$  zerfällt jedes Vieleck  $\tau_{m,u}$  in mehrere Theile, von denen jene, zu welchen keine Punkte von  $f$  gehören, in die Schaar  $\mathfrak{T}_{m+1}$  nicht aufzunehmen sind. Da  $g_{m,u} \geq 0$  ist, so wird  $\Sigma_m$  bei Weglassung der diesen Theilen  $\tau'_{m+1,u}$  der  $\tau_{m,u}$  entsprechenden Producte  $g_{m,u} \tau'_{m+1,u}$  nicht vergrößert. Der Rest von  $\Sigma_m$  ist, wie leicht zu sehen, nicht kleiner als  $\Sigma_{m+1}$ . Wir gelangen demnach zur Beziehung

$$\Sigma_m \geq \Sigma_{m+1}. \quad (7)$$

$\Sigma_m$  nimmt also mit wachsendem  $m$  nicht zu und hat daher bei  $\lim m = +\infty$  einen Grenzwert, und zwar, weil  $\Sigma_m$  nach (4) nicht negativ ist, einen nicht negativen endlichen, den wir mit  $G$  bezeichnen. Dabei ist

$$\Sigma_m \geq G (= \lim_{m \rightarrow +\infty} \Sigma_m). \quad (8)$$

Somit lässt sich jedem  $\varkappa > 0$  ein  $\mu > 0$  so zuordnen, dass wenn nur  $m > \mu$  ist,

$$0 \leq \Sigma_m - G < \frac{1}{2}\varkappa \quad \text{oder} \quad \Sigma_m < G + \frac{1}{2}\varkappa \quad (9)$$

ist.

Wir können ferner zeigen, dass wie immer auch die Vielecke  $\tau_1 \dots \tau_n$  gewählt werden mögen,

$$(S =) \sum_1^n g_r \tau_r \geq G \quad (10)$$

ist. Zufolge der Beziehungen (9) und (10) ist also  $G$  die untere Grenze für alle Werthe, welche die Summe (2) überhaupt annehmen kann. Um die Ungleichung (10) zu erweisen, bemerken wir, dass nach (8)

$$G - S \leq \Sigma_m - S \quad (11)$$

ist, und zeigen, dass sich jedem  $\varepsilon > 0$  ganze Zahlen  $m$  so zuordnen lassen, dass

$$\Sigma_m - S < \varepsilon \quad (12)$$

ist. Dann hat man nach (11)  $G - S < \varepsilon$ , also in der That  $G \leq S$ .

Umständlicher ist der Beweis der Formel (12). Wir denken uns in der  $xy$ -Ebene die gegebenen Vielecke  $\tau_1 \dots \tau_n$  gezeichnet und darüber die Schaar  $\Sigma_m$  von Vielecken  $\tau_{m,u}$ , wobei  $m$  zunächst nur so gross sein soll, dass jedes  $\tau_{m,u}$  kleiner ist als das kleinste unter den  $\tau_1 \dots \tau_n$ . Es kann also kein  $\tau_r$  ganz in einem  $\tau_{m,u}$  liegen. Unter den in  $\Sigma_m$  erscheinenden Vielecken  $\tau_{m,u}$ , d. i. den Vielecken (5), gibt es keines, das nicht mindestens mit einem  $\tau_r$  wenigstens einen Punkt gemein hätte, weil sonst nicht jeder Punkt von  $f$  zu einem oder mehreren der Vielecke  $\tau_r$  gehören würde. Daher zerfallen diese Vielecke (5) in zwei Classen, und zwar 1) solche, welche innerhalb je eines  $\tau_r$  liegen oder wenigstens über je ein  $\tau_r$  nicht hinausragen, 2) solche, welche mit dem Rande eines oder mehrerer  $\tau_r$  mindestens je einen Punkt gemein haben, ohne ganz in einem von ihnen zu liegen. Die Summen der den  $\tau_{m,u}$  dieser beiden Classen entsprechenden Glieder von  $\Sigma_m$  seien beziehungsweise mit  $\Sigma'_m$ ,  $\Sigma''_m$  bezeichnet, so dass

$$\Sigma_m = \Sigma'_m + \Sigma''_m \quad (13)$$

ist. Da nach (1)  $g_{m,u} \leq B$  ist, so hat man

$$\Sigma''_m \leq B \Sigma'' \tau_{m,u}, \quad (14)$$

wo die Summe  $\Sigma''$  sich eben auf alle Vielecke der 2. Classe erstreckt. Fassen wir zunächst alle jene unter ihnen, welche mit dem Umfange ( $P_r$ ) eines und desselben  $\tau_r$  mindestens je einen Punkt gemein haben, ins Auge. Man kann eine solche Länge  $K_r$  angeben,<sup>1</sup> dass wenn der grösste unter den Durch-

<sup>1</sup> Wenn man zu jeder Seite eines Vielecks  $M_1 M_2 \dots M_k$ , dessen Umfang  $P$  sich selbst nicht schneidet, sowohl ausserhalb, als auch innerhalb des Vielecks im nämlichen Abstände  $H$  eine Parallele zieht, so bilden die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender äusserer Parallelen, sowie die je zweier aufeinanderfolgender innerer Parallelen ein neues Vieleck und der von den Umfängen dieser beiden Vielecke eingeschlossene Ring hat den Inhalt  $2HP$ . Nur darf, damit keiner von ihnen sich selbst schneide,  $H$  nicht grösser sein als der

messern der soeben bezeichneten Vielecke  $\tau_{m,n}$  — er sei  $\Delta_{m,r}$  —  $K_r$  nicht überschreitet, alsdann ihre Summe nicht grösser als  $2\Delta_{m,r}P_r$  ist. Wenn dann der grösste unter den Durchmessern aller der Schaar  $\mathfrak{Z}_m$  angehörigen Vielecke  $\tau_{m,n}$  überhaupt,  $\Delta_m$ , höchstens die kleinste unter den Längen  $K_1K_2\dots K_n$  erreicht, so geht die soeben erwähnte Summe nicht über  $2\Delta_mP_r$  hinaus. Lassen wir hier  $r$  nacheinander die Werthe 1. . .  $n$  durchlaufen und addiren die bezüglichen Ungleichungen, so finden wir, dass sicherlich

$$\Sigma''\tau_{m,n} \leq 2\Delta_m \sum_1^n P_r \quad (15)$$

ist. Mithin haben wir

$$\Sigma_m'' \leq 2B\Delta_m \sum_1^n P_r. \quad (16)$$

Aus den Formeln (14) und (16) ergibt sich dann, dass

$$\Sigma_m \leq \Sigma_m' + 2B\Delta_m \sum_1^n P_r \quad (17)$$

ist.

In der Summe  $S$  ersetzen wir jedes  $\tau_r$  durch die Summe der Theile, in welche es durch die Einzeichnung der  $\tau_{m,n}$  in die mit den Vielecken  $\tau_1$  . . .  $\tau_n$  bereits bedeckte Ebene zerfällt, und lösen die Producte  $g_r\tau_r$  auf. Die so aus  $S$  erhaltenen Glieder theilen wir ebenfalls in zwei Gruppen; die erste bestehe aus jenen, deren zweiter Factor der Inhalt eines  $\tau_{m,n}$  der ersten unter den obigen beiden Classen ist, also eines solchen, das ganz innerhalb eines  $\tau_r$  liegt, die zweite wird von allen übrigen

Abstand des Punktes  $O_r$ , wo die Halbirungslinien der Winkel  $M_r$  und  $M_{r+1}$  des vorgelegten Vielecks sich treffen, von der Seite  $M_rM_{r+1}$ , und zwar bei jeder der Nummern  $r = 1, 2, \dots k$ . Wendet man diese Bemerkung auf das Vieleck  $\tau_r$  i. T. an und denkt sich den Durchmesser sämmtlicher  $\tau_{m,n}$ , welche mit  $\tau_r$  mindestens einen Punkt gemein haben, nicht grösser als den kleinsten der soeben erwähnten Abstände im Vielecke  $\tau_r$ ,  $K_r$ , so kann keines von ihnen über die ringförmige Fläche, deren äusserer und innerer Rand vom Umfange von  $\tau_r$  überall den Abstand  $K_r$  hat, hinausragen und somit ihre Summe die Zahl  $2K_rP_r$  nicht überschreiten.

Gliedern gebildet. Bezeichnen wir die Summen der in die erste Gruppe eingereihten Glieder mit  $S'$ , die der zur zweiten gehörigen mit  $S''$ , so ist

$$S = S' + S''. \quad (18)$$

Da hier  $g_r \geq 0$ , also  $S'' \geq 0$  ist, so finden wir nach (18)

$$S \geq S'. \quad (19)$$

Aus (17) und (19) folgt dann, dass

$$\Sigma_m - S \leq (\Sigma'_m - S') + 2B\Delta_m \sum_1^n P_r \quad (20)$$

ist.  $\Sigma'_m - S'$  kann, da für die einander entsprechenden Glieder von  $\Sigma'_m$  und  $S'$   $g_{m,u} \leq g_r$  ist, nicht positiv sein, d. h. es ist

$$\Sigma'_m - S' \leq 0. \quad (21)$$

Wir gewinnen demnach aus (20) die Formel

$$\Sigma_m - S \leq 2B\Delta_m \sum_1^n P_r. \quad (22)$$

Da es nun freisteht,  $m$  noch so weit zu vergrössern, dass

$$\Delta_m < \varepsilon : 2B \sum_1^n P_r$$

ist, so ergibt sich aus (22) unmittelbar die Beziehung (12).

Die Ungleichung (22) reicht übrigens zum Beweise der Formel (I), d. i. der Beziehung (3) auf S. 454 in dem in Rede stehenden Falle aus. Wir setzen

$$\sum_1^n g_r \tau_r - G = (\Sigma_m - G) + \left( \sum_1^n g_r \tau_r - \Sigma_m \right) \quad (23)$$

und geben  $m$  einen so grossen Werth, dass für die Differenz  $\Sigma_m - G$  die Ungleichung (9) besteht. Um für

$$\sum_1^n g_r \tau_r - \Sigma_m$$

eine obere Grenze zu erhalten, brauchen wir bloss im Vorstehenden das System der Vielecke (5) auf S. 454 mit dem System  $\tau_1 \dots \tau_n$  zu vertauschen. Bedeutet  $D$  den grössten unter den Durchmessern der Vielecke  $\tau_r$ , welcher von vorneherein nicht grösser als alle wie die  $K_r$  zu bestimmenden Längen  $K_{m,1} \dots K_{m,n_m}$  anzunehmen ist, und  $P_{m,u}$  den Umfang des Vielecks  $\tau_{m,u}$ , so folgt aus (22), dass

$$\sum_1^n g_r \tau_r - \Sigma \leq 2BD \sum_1^{n_m} P_{m,u} \quad (24)$$

ist. Lassen wir nun

$$D < \kappa : 4B \sum_1^{n_m} P_{m,u} \quad (25)$$

sein, so ist nach (24)

$$\sum_1^n g_r \tau_r - \Sigma_m < \kappa \cdot 2.$$

Mithin haben wir nach (23) zufolge der Beziehungen (9) und (10)

$$0 \leq \sum_1^n g_r \tau_r - G < \kappa,$$

wenn nur  $D$  kleiner als die rechte Seite der Ungleichung (25) ist. Damit ist unser Satz im ersten Falle bewiesen.

Wir wenden zunächst dieses Ergebniss auf die Function  $f(x, y) = 1$  an. Alsdann finden wir, dass

$$\sum_1^n \tau_r,$$

wenn wir den Durchmesser  $D_r$  eines jeden  $\tau_r$  zur Null convergiren lassen, einen nicht negativen endlichen Grenzwert hat, den wir mit  $A$  bezeichnen. Es ist also

$$\lim_{\tau_r \rightarrow 0} \sum_1^n \tau_r = A \quad (26)$$

und dabei nach (10)

$$\sum_1^n \tau_r \cong A. \quad (27)$$

Zweiter Fall.  $f(x, y)$  nimmt in den Punkten des Systems  $\mathfrak{f}$  entgegengesetzt bezeichnete Werthe an. Bezeichnet alsdann  $k$  die endliche untere Grenze der Werthe von  $f(x, y)$  für alle diese Punkte, so ist  $f(x, y) - k \geq 0$ . Für die Function  $f(x, y) - k$  ist die obere Grenze in den dem Vielecke  $\tau_r$  angehörigen Systempunkten  $g_r - k$ ; also hat

$$\sum_1^n (g_r - k) \tau_r$$

nach dem beim ersten Falle Bemerkten bei  $\lim \tau_r = 0$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) einen endlichen Grenzwert  $G_0$ . Wir haben aber

$$\sum_1^n g_r \tau_r = \sum_1^n (g_r - k) \tau_r + k \sum_1^n \tau_r,$$

mithin mit Rücksicht auf (26)

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^n g_r \tau_r = G_0 + kA.$$

Es ist also unser Satz auch im zweiten Falle bewiesen.

2. Zweiter Grenzwert. »Bedeutet  $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{n'}$  unter den Vielecken  $\tau_1, \dots, \tau_n$  diejenigen, deren Punkte sämmtlich Punkte des Systems  $\mathfrak{f}$  sind, und  $g'_r$  ( $r = 1, \dots, n'$ ) die obere Grenze von  $(f(x, y))$  für die Punkte von  $\tau'_r$ , so hat auch die Summe

$$\sum_1^{n'} g'_r \tau'_r \quad (28)$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme der Durchmesser aller Vielecke  $\tau_1, \dots, \tau_n$  einen endlichen Grenzwert  $G'$ , d. h. jedem  $\epsilon > 0$  entspricht ein  $\lambda < 0$  so, dass

$$\left| G' - \sum_1^{n'} g'_r \tau'_r \right| < \varkappa$$

ist, wenn nur der Durchmesser ( $D_r$ ) eines jeden der Vielecke  $\tau_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) kleiner als  $\lambda$  ist.« Wir schreiben also auch hier

$$G' = \lim_{\tau_r=0} \sum_1^{n'} g'_r \tau'_r. \quad (\text{II})$$

»Gibt es unter den  $\tau_1 \dots \tau_n$  gar keine von der soeben erwähnten Beschaffenheit, so setze man  $G' = 0$ .«

Die Existenz des Grenzwertes  $P'$  wird ganz ähnlich wie die des Grenzwertes  $G$  in Nr. 1 gezeigt. Nur tritt in den Beziehungen (7) und (10) an Stelle von  $\geq \leq$ , so dass es jetzt heisst

$$\sum_1^{n'} g'_r \tau'_r \leq G'. \quad (29)$$

Wenn  $f(x, y)$  für die Punkte des Systems  $\mathfrak{f}$  negative Werthe nicht annimmt, so ist die Summe (28) nicht grösser als die Summe (2), somit ist auch  $G' \leq G$ .

3. Die äussere und innere Flächenzahl. Die Formel (26) habe zuerst ich für ein beliebiges Punktsystem in der Ebene aufgestellt und auf ähnliche Art, wie die allgemeine (I), bewiesen.<sup>1</sup> Später hat sie C. Jordan gebracht,<sup>2</sup> aber zugleich mit der Formel, welche aus (II) bei der Annahme  $f(x, y) = 1$  hervorgeht, d. i. wenn wir den ihr entsprechenden Grenzwert mit  $A'$  bezeichnen,

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^{n'} \tau'_r = A'. \quad (30)$$

Dabei ist  $0 \leq A' \leq A$ . Wenn  $A = A'$  ist, so heisst ihr gemeinsamer Werth die Zahl oder der Inhalt des Punkt-

<sup>1</sup> Math. Annal., Bd. 23 (1884), S. 152 f.

Vergl. Journal de Mathém. 1892, p. 76. Cours d'Analyse, éd. I, No. 36.

systems  $\mathfrak{f}$ . Sollte aber  $A > A'$  sein, so wird  $A$  die äussere,  $A'$  die innere Flächenzahl dieses Punktsystems genannt. Die Unterscheidung dieser beiden Zahlen, somit die völlige Einsicht in die Natur der Flächenzahl verdankt man indess G. Peano.<sup>1</sup> Er erklärt die erstere als die untere Grenze aller Summen

$$\sum_1^n g_r \tau_r$$

[vergl. Formel (10)], die letztere als die obere Grenze aller Summen

$$\sum_1^{n'} g'_r \tau'_r$$

[vergl. (29)].

Wenn  $A = 0$  ist, so ist auch  $A' = 0$ . Das endliche Punktsystem  $\mathfrak{f}$  hat dann den Inhalt Null und wird nach Harnack als discret bezeichnet.<sup>2</sup>

Es mögen nun noch einige Beispiele von Flächenzahlen Erwähnung finden, wobei indess nur vollständige Punktsysteme, d. h. solche, zu denen auch ihre Grenzpunkte gehören,<sup>3</sup> berücksichtigt werden. Um solche Punktsysteme in der Ebene zu bilden, denken wir uns auf der Abscissenaxe ein vollständiges endliches Punktsystem gegeben und in jedem dazu gehörigen Punkte auf der positiven Seite dieser Axe ein Loth von der Länge 1 errichtet. Unser System möge dann aus allen Punkten eines jeden dieser Lothe bestehen. Als solches hat es zu Flächenzahlen die Längenzahlen des auf der  $x$ -Axe gegebenen Systems, so dass nur diese zu ermittelt werden brauchen.

1. Ein vollständiges endliches Punktsystem auf der  $x$ -Axe, dessen äussere und innere Länge von einander verschieden

Vergl. dessen *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, 1887, p. 152.

<sup>2</sup> Math. Annal., Bd. 19, S. 238.

<sup>3</sup> Nach C. Jordan's »parfait«, das von G. Cantor, welcher Punktmengen, die mit ihrer Ableitung identisch sind, perfect nennt (Math. Ann., Bd. 21, S. 575), entlehnt ist.

sind, bilden die Gesammtheit aller endlichen echten Decimalbrüche mit ungeradem Zähler nebst den Zahlen 0 und 1 und die Gesammtheit aller unendlichen echten Decimalbrüche, rational oder irrational, welche nicht von einer bestimmten Stelle an lauter gerade Ziffern (0, 2, 4, 6, 8) besitzen. Da dieses System in der Umgebung gar keines Punktes der Strecke (0, 1) stetig ist, so ist seine innere Länge  $A' = 0$ . Seine äussere Länge  $A$  ist aber 1.

## 2. Das System der Punkte

$$x = 0 \quad x = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots, \text{d. i. jeder natürlichen Zahl}) \quad (31)$$

ist vollständig und discret.<sup>1</sup>

## 3. Fügt man zu den Punkten (31) alle Punkte $x$ :

$$0 > x \geq -1,$$

so hat man ein unstetiges System, dessen äussere und innere Länge 1 ist.

4. Fügt man aber die nämlichen Punkte zu dem unter 1. beschriebenen System, so erhält man eines, wofür die äussere Länge  $A = 2$ , die innere  $A' = 1$  ist.

Unter welcher Bedingung stetige Punktsysteme in der Ebene die nämliche äussere und innere Flächenzahl besitzen, werden wir sogleich erfahren.

## 5. Über die Gleichheit der Grenzwerte (I) und (II). Das obere Doppelintegral.

Es ist leicht zu zeigen, dass wenn die äussere und innere Flächenzahl des Systems  $\mathfrak{f}$  zusammenfallen, alsdann auch die Grenzwerte (I) und (II) einander gleich sind. — Bezeichnet man nämlich mit  $\tau_1'' \dots \tau_n''$  unter

<sup>1</sup> Ein anderes Beispiel ist das von G. Cantor (a. a. O. S. 590) angegebene System aller Zahlen

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_n}{3^n} + \dots,$$

wo die Coëfficienten  $c_n$  nach Belieben die Werthe 0 oder haben dürfen und die Reihe endlich oder unendlich sein kann. Das System ist zugleich perfect.

den Vielecken  $\tau_1$ . diejenigen, zu welchen sowohl Punkte des Systems  $f$ , als auch solche, die nicht in  $f$  vorkommen, gehören, und mit  $g_r''$  die obere Grenze der Werthe von  $f(x, y)$  für die in  $\tau_r''$  vorhandenen Punkte von  $f$ , so hat man natürlich

$$\sum_1^n g_r \tau_r - \sum_1^{n'} g_r' \tau_r' = \sum_1^{n''} g_r'' \tau_r'' \quad (32)$$

Nun ist der Betrag der rechten Seite von (32) nicht grösser als

$$C \sum_1^{n''}$$

wenn wir unter  $C$  die grössere von den Zahlen  $|A|$  und  $|B|$  aus (1) verstehen. Ist

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^n \tau_r'' = 0, \quad (33)$$

d. h. fallen äussere und innere Flächenzahl des Systems  $f$  zusammen, so hat also auch die linke Seite der Gleichung (32) bei  $\lim \tau_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) den Grenzwert Null, d. i. es besteht die Gleichung

$$G - G' = 0.$$

Die Gleichung (33), d. i.  $A = A'$  gilt für jedes stetige<sup>1</sup> Punktsystem, welches geometrisch in der  $xy$ -Ebene durch eine

<sup>1</sup> Analytisch wird ein stetiges Punktsystem von zwei Dimensionen nach Weierstrass auf folgende Art erklärt: 1. Die zu sämtlichen Punkten des Systems gehörigen Werthe von  $x$  und  $y$  liegen zwischen zwei endlichen Grenzen. Das System ist vollständig. 3. Unter den Systempunkten soll es Innenpunkte (S. 466) geben. 4. Bedeuten  $A \equiv (a, b)$  und  $A' \equiv (a', b')$  irgend zwei Punkte des Systems und ist eine beliebige gegebene positive Zahl, so lässt sich zwischen  $A$  und  $A'$  eine aus Innenpunkten des Systems in endlicher Anzahl  $A_1 \dots A_m$  gebildete Kette in der Art einschalten, dass  $A_1$  zur Umgebung  $\varepsilon$  von  $A$ ,  $A_2$  zur Umgebung  $\varepsilon$  von  $A_1$ ,  $\dots$ ,  $A_m$  zur Umgebung  $\varepsilon$  von  $A_{m-1}$  und endlich  $A'$  zur Umgebung  $\varepsilon$  von  $A_m$  gehört. Dabei wird unter Umgebung eines Punktes  $x_0 y_0$  die Gesamtheit aller Punkte  $xy$  verstanden, wofür  $x$  irgend einen Werth zwischen  $x_0 - \varepsilon$  und  $x_0 + \varepsilon$ ,  $y$  irgend einen zwischen  $y_0 - \varepsilon$  und  $y_0 + \varepsilon$  bedeutet. Natürlich darf man als Umgebung  $\varepsilon$

von einer endlichen Anzahl gewöhnlicher Ränder begrenzte Fläche  $f$  dargestellt wird. Dabei wird unter einer gewöhnlichen Curve eine solche verstanden, welche sowohl mit jeder Parallelen zur  $x$ -Axe, als auch mit jeder Parallelen zur  $y$ -Axe höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein hat.<sup>1</sup> Da wir bereits wissen, dass für jedes ebene Punktsystem

$$\lim_{r=0} \sum_1^{n''} \tau_r'' = A - A'$$

ist, so können wir  $A - A'$  schon dadurch ermitteln, dass wir nur eine unbegrenzte Reihe von Schaaren solcher Vielecke, deren Durchmesser sämmtlich kleiner als irgend eine gegebene Zahl werden können, berücksichtigen. Wir wählen als solche die Quadrate von der Seite  $\delta$ , welche in der  $xy$ -Ebene auftreten, wenn ein System von Parallelen zur  $x$ -Axe, wovon je zwei aufeinanderfolgende den Abstand  $\delta$  haben, und das ähnliche System von Parallelen zur  $y$ -Axe construirt werden. Dann lassen wir  $\delta$  zur Null convergiren. Nun ist die Summe aller solcher Quadrate, welche mit einem und demselben Rande von  $f$  mindestens einen Punkt gemein haben, kleiner als <sup>2</sup>

$$\{2p(b' - b) + 4q(a' - a)\} \delta, \quad (34)$$

worin  $2p$  die grösste Anzahl der Punkte, welche dieser Rand mit einer Parallelen zur  $x$ -Axe,  $2q$  die grösste Anzahl der Punkte, welche er mit einer Parallelen zur  $y$ -Axe gemein hat, bedeutet und  $a$  die kleinste,  $a'$  die grösste unter den Abscissen der Punkte ebendesselben Randes,  $b$  die kleinste,  $b'$  die grösste unter ihren Ordinaten bedeutet. Der Ausdruck (34) ist nun kleiner als irgend eine gegebene Zahl, wenn nur  $\delta$  hinlänglich klein gewählt wird. Wiederholt man diesen Schluss an jedem

von  $x_0 y_0$  mit C. Jordan (Cours d'Anal. 2. ed., I., Nr. 31) auch die Gesamtheit aller die Ungleichung (35) i. T. erfüllenden Punkte  $xy$  betrachten. Sie bilden ein Quadrat, dessen Mittelpunkt der Punkt  $x_0 y_0$  und dessen Diagonalen von der Länge  $2\varepsilon$  in den Coordinatenaxen liegen.

<sup>1</sup> In diese Anzahl sind im Falle, dass die Curve und eine solche Gerade eine Strecke gemein haben, bloss die beiden Endpunkte derselben aufzunehmen.

Vergl. auch E. Picard, Traité d'Analyse, I, p. 96.

der Ränder von  $\mathfrak{f}$ , so erkennt man, dass die Summe aller jener unter den in Rede stehenden Quadraten, welche mit der Begrenzung von  $\mathfrak{f}$  mindestens einen Punkt gemein haben, zugleich mit  $\delta$  zur Null convergirt. Somit ist für jede Fläche  $\mathfrak{f}$  von der oben angegebenen Beschaffenheit  $A - A' = 0$ .

Der soeben bewiesene Satz lässt sich unmittelbar ausdehnen auf ein Punktsystem, das aus den Punkten einer endlichen Anzahl von stetigen Flächen der gerade beschriebenen Art besteht.

C. Jordan<sup>1</sup> nennt Domäne ein vollständiges Punktsystem, zu dem auch Innenpunkte gehören. Innenpunkt heisst ein Punkt  $x_0, y_0$  des Systems, dem eine positive Zahl  $\varepsilon$  sich so zuordnen lässt, dass alle Punkte  $xy$ , wofür

$$|x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon \quad (35)$$

ist, dem System angehören. Fallen für eine Domäne die äussere und innere Flächenzahl zusammen, so besteht dafür auch die Gleichung  $G = G'$ . Der gemeinsame Werth von  $G$  und  $G'$  heisst nach C. Jordan<sup>2</sup> das obere Doppelintegral (intégrale par excès) der Function  $f(x, y)$  über diese Domäne. Es ist indess nicht einzusehen, was die Ausdehnung des Integralbegriffes auf ein Punktsystem, wie das auf S. 463 unter 3. beschriebene, für einen Zweck haben soll. Bleiben wir daher dabei, die von Volterra und Pasch eingeführte Bezeichnung »oberes Integral« für den gemeinsamen Werth von  $G$  und  $G'$  nur dann zu gebrauchen, wenn das Punktsystem  $\mathfrak{f}$  ein stetiges ist oder aus einer endlichen Anzahl stetiger Systeme besteht.

5. Selbstverständlich entsprechen auch dem unteren Doppelintegral zwei Grenzwerte. Wir erhalten sie, indem wir in der Formel (I) an Stelle der oberen Grenze  $g_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) die untere Grenze  $k_r$ , der Werthe von  $f(x, y)$  für die im Vielecke  $\tau_r$  vorhandenen Punkte des Systems  $\mathfrak{f}$  und in (II) an Stelle von  $g'_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n'$ ) die untere Grenze  $k'_r$  der Werthe von  $f(x, y)$  für die im Vielecke  $\tau'_r$  vorhandenen Punkte dieses Systems setzen.

<sup>1</sup> Cours d'Analyse, 2. éd., I, Nr. 24.

<sup>2</sup> Journal de Mathém. 1892, p. 84. Cours d'Analyse, II, p. 34.

6. Die in Nr. 1, 2 und 5 vorgeführten Sätze lassen sich ohne Schwierigkeit auf Punktsysteme im Raume von drei und mehr Dimensionen ausdehnen.

Was den Euklid'schen Raum von drei Dimensionen anlangt, so brauchen wir, da schon das Volum des Tetraëders bloss als Grenzwert (beziehungsweise als obere oder untere Grenze) einer Prismensumme erklärt werden kann, uns unter  $\tau_1 \dots \tau_n$  lediglich Prismen vorzustellen. Dann tritt an Stelle des in der Note auf S. 456 erwähnten Satzes die Formel für den Inhalt des Körpers der von zwei Prismen-Oberflächen begrenzt wird, welche die eines gegebenen Prismas von aussen und von innen umgeben und davon überall den nämlichen Abstand haben. Aus dem Ausdrucke (34) leitet man ferner unmittelbar den analogen für die Summe aller jener Prismen her, welche mindestens je einen Punkt mit der Begrenzung eines stetigen Punktsystems von drei Dimensionen gemein haben.

Ähnliches gilt für die Punktsysteme in einem Raume von mehr als drei, etwa  $n$  Dimensionen. Nur kann man sich darauf beschränken, die  $\tau_r$  Körper sein zu lassen vom Typus: Gesammtheit aller Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , deren jede Coordinate  $x_k$  alle Werthe eines gegebenen Intervalles  $(a_k, a_k + da_k)$  annehmen darf, wobei diesem Körper als Zahl zunächst das Product  $da_1 \dots da_n$  zugeordnet wird.<sup>1</sup> Als erste Anwendung der in Rede stehenden Sätze mögen dann die Inhalte der übrigen Polyeder ermittelt werden, namentlich des von  $n+1$   $n$ -dimensionalen Ebenen gebildeten Körpers.

---

Anstatt des Satzes in der Note auf S. 456 braucht man dann bloss die Entwicklung der Differenz  $(da_1 + 2H) \dots (da_n + 2H) - (da_1 - 2H) \dots (da_n - 2H)$  nach Potenzen von  $H$ .

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: [106\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: [Zwei Grenzwerte, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist. 453-467](#)