wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Wulstes in sehr feine über, die unter einander parallel quer auf die Längsrichtung des Darmes verlaufen.

In den Falten des Bojanus'schen Körpers haben die Gefässe (Venen) noch grössere Durchmesser, ihre Theilung und Netzbildung geschieht auch mit einer gewissen Regelmässigkeit; und anlangend die Richtung des Blutstromes, kann ich die Ansicht von Bojanus im Wesentlichen nur bestätigen.

Nachdem ich durch diese Mittheilung bloss auf das Vorkommen von capillaren Gefässen bei der Teichmuschel aufmerksam zu machen wünschte, verweise ich wegen der weiteren Details auf die umständlichere Darstellung des Gefässsystems dieses Thieres, die ich in möglichst kurzer Zeit zu liefern hoffe.

Bemerkungen über ausgezeichnete Linien krummer Flächen.

Von **Simon Spitzer,**

Supplent der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich habe bei einigen von mir angestellten Untersuchungen über die Eigenschaften der krummen Flächen, welche durch die geometrische Construction einer Gleichung zwischen drei Coordinaten x, y, z entstehen, gefunden, dass der klaren Anschauung am allerbesten gedient sei, wenn man gewisse geometrische Elemente (ich meine krumme Linien oder isolirte Punkte von prägnanter Bedeutung, beiläufig von der Gattung derjenigen, die auf der Oberfläche der Erde unter dem Namen: Kamm, Thalweg, Krater, Spitze u. s. f. vorkommen) in das Auge fasst, dieselben so definirt, auf dass bei krummen Flächen, deren Gleichungen gegeben sind, Linien oder Punkte von ähnlicher Situation, falls sie vorhanden sind, erkannt und bestimmt werden können.

Ich gelangte bald zur Einsicht, dass all die genannten Linien in sehr naher Beziehung mit den Gipfeln der Gebirge stehen, dass namentlich die Kämme jene Linien sind, welche von den höchsten Punkten der Gebirge nach jener Richtung hin auslaufen, wo der geringste Abfall vorhanden ist; dass sie, falls sie geschlossen sind, Krater oder Kessel bilden u. s. f.; dass ferner die Thalwege, die ebenfalls aus den

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Gipfeln ausgehen, sich am stärksten abwärts senken, und wohin somit das auf den Gebirgen auffallende Regenwasser, dem Gesetze der Schwere gehorchend, abfliesst. Diese Linien bestimmen gewissermassen in ihrem weiteren Verlaufe das Flussbett des Gebirges.

Ich war also genöthigt, die höchsten und tiefsten Punkte krummer Flächen sorgfältiger zu discutiren, als bisher üblich war, meine Discussionen waren von einigem Erfolge. Ich fand hiebei, dass manchmal auf krummen Flächen statt höchste und tiefste Punkte, höchste und tiefste Linien vorhanden sind, d. h. Linien, deren sämmtliche Punkte dieselbe Höhe haben, deren nächste, aber ausser ihnen (auf der Fläche) liegenden, entweder alle tiefer oder alle höher liegen.

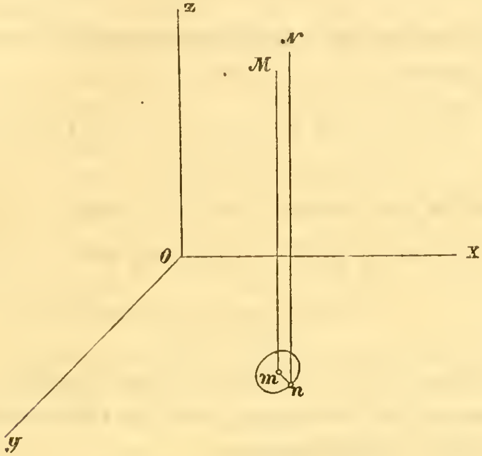
Alsdann machte ich mich an die Untersuchung der Linien des stärksten und schwächsten Falles und der stärksten und schwächsten Steigung krummer Flächen, und hatte besonders mein Augenmerk auf jene, welche durch die höchsten und tiefsten Punkte der Fläche gehen, weil dies eben die Linien sind, die so markirt auf den Gebirgen unserer Erde auftreten. Das Wenige, was hier vorgearbeitet war, las ich in Cournot's vortrefflichem „Elementar-Lehrbuch der Theorie der Functionen". Ich fand, dass im Allgemeinen von den höchsten Punkten der Flächen zwei auf einander senkrecht stehende Linien auslaufen, von welchen eine mit dem stärksten, die andere mit dem schwächsten Fall begabt ist; dass gerade das Entgegengesetzte von den tiefsten Punkten der Flächen gilt, u. s. f.

Durch dies glaube ich nun eine gedrängte Übersicht dieses Memoire's gegeben zu haben; ich wende mich daher zur Darlegung desselben.

Sei $z = \varphi\,(x,y)$ die Gleichung einer stetigen krummen Fläche, x, y, z die Coordinaten eines Punktes M derselben. Beschreibt man in der Horizontal-Ebene aus dem Mittelpunkte m, der die Coordinaten x, y, z hat, mit dem sehr kleinen Radius ρ einen Kreis, errichtet in sämmtlichen Punkten dieses Kreises Senkrechte auf die xy Ebene, und zieht diese so lange, bis sie die Fläche schneiden, so wird unter allen diesen z' σ im Allgemeinen ein Grösstes und ein Kleinstes vorkommen, oder mit anderen Worten, in jedem Punkte einer krummen Fläche wird es im Allgemeinen irgend eine Richtung geben, längs welcher ein stärkster oder schwächster Fall, oder eine stärkste oder schwächste Steigung stattfindet. Auf den Gebirgen unserer Erde wird die Richtung des stärksten Falls durch den Weg angezeigt,

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

nach welchem das auffallende Regenwasser, dem Gesetze der Schwere gehorchend, abfliesst.



Seien die Coordinaten irgend eines, nächst x, y, z gelegenen Punktes N

$$x + \rho \cos \alpha\,,\; y + \rho \sin \alpha\,,\; z + \Delta z$$

wo α der Winkel ist, den die mn mit der Axe der x einschliesst, so ist:

$$z + \Delta z = \varphi(x + \rho \cos \alpha\,,\; y + \rho \sin \alpha)$$

oder entwickelt:

$$\Delta z = \rho(p \cos \alpha + q \sin \alpha) + \frac{\rho^2}{1 \cdot 2}(r \cos^2 \alpha + 2 s \sin \alpha \cos \alpha + t \sin^2 \alpha) + \ldots .$$

wo

$$p,\; q,\; r,\; s,\; t,$$

respective statt:

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

gesetzt sind.

Der Abfall oder die Steigung beim Übergange vom Punkte M zu einem nächsten N wird gleich Null sein, falls

$$p \cos \alpha + q \sin \alpha = o$$

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

oder

$$tg\,\alpha = -\frac{p}{q}$$

ist, und wird am Grössten oder Kleinsten werden, wenn $\frac{d.\Delta z}{d\alpha} = o$ ist. Nun hat man:

$$\frac{d.\Delta z}{\partial\alpha} = \rho(-p\sin\alpha + q\cos\alpha) + \frac{\rho^2}{1\cdot 2}[2s\cos 2\alpha + \\ + (t-r)\sin 2\alpha] + \ldots$$

und dies wird für sehr kleine ρ gleich Null, wenn

$$p\sin\alpha - q\cos\alpha = o$$

oder

$$tg\,\alpha = \frac{q}{p}$$

ist. Hieraus folgen für α, welches der Natur der Aufgabe nach positiv und kleiner als 360° sein muss, zwei, um 180° von einander verschiedene Werthe, wären dieselben

$$\alpha_1 \text{ und } 180^0 + \alpha_1$$

so entsprechen diese grössten oder kleinsten Δz, je nachdem $\frac{d^2.\Delta z}{\partial\alpha^2}$ negativ oder positiv ist. Nun hat man aber:

$$\frac{d^2.\Delta z}{\partial\alpha^2} = -\rho(p\cos\alpha + q\sin\alpha) + \rho^2[-2s\sin 2a + \\ + (t-r)\cos 2\alpha] + \ldots$$

welches eben so wie Δz, für die beiden Substitutionen

$$\alpha_1 \text{ und } 180^0 + \alpha_1$$

entgegengesetzt bezeichnete Werthe annimmt, also entspricht einer derselben einem positiven, und zwar grössten, der andere einem negativen und kleinsten Δz; d. h. einer dieser Werthe entspricht einer stärksten in M stattfindenden Steigung, der andere, der zur entgegengesetzten Richtung führt, einem stärksten Fall. — Beachtenswerth ist noch der Umstand, dass die durch M gehende Linie ohne Fall (Niveaulinie) senkrecht steht, auf der auch durch M gehenden Linie des stärksten Falls und der stärksten Steigung.

Die eben entwickelten Gesetze finden nicht mehr Statt, wenn

$$p = o \text{ und } q = o$$

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

ist; in diesem Falle hat man:

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2}(r\, cos^2\, \alpha + 2s\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha + t\, sin^2\, \alpha) + \ldots$$

was, falls r nicht Null ist, sich so schreiben lässt:

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{(r\, cos\, \alpha + s\, sin\, \alpha)^2 + (rt - s^2)\, sin^2\, \alpha}{r} + \ldots$$

ferner

$$\frac{d.\Delta z}{\partial \alpha} = \frac{\rho^2}{2}[\quad 2s\, cos\, 2\alpha + (t - r)\, sin\, 2\alpha)] + \ldots$$

$$\frac{\partial^2.\Delta z}{\partial \alpha^2} = \rho^2[-2s\, sin\, 2\alpha + (t - r)\, cos\, 2\alpha)] + \ldots$$

für die durch M gehende Linie ohne Fall ist:

$$r\, cos^2\, \alpha + 2s\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha + t\, sin^2\, \alpha = o$$

woraus

$$tg\, \alpha = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

folgt, und dies wird, sobald der in Rede stehende Punkt ein höchster oder tiefster ist, imaginär; weil in diesem Falle, wie aus der zweiten Gleichung für Δz zu sehen, $s^2 - rt < o$ sein muss. Man kann daraus folgern, dass durch einen höchsten oder tiefsten Punkt keine Linie ohne Fall oder ohne Steigung geht. — Ist für den Punkt M, wofür schon $p = o$, $q = o$ ist, auch noch

$$s^2 - rt = o$$

so werden, wie wieder aus

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{(r\, cos\, \alpha + s\, sin\, \alpha)^2}{r} +$$

zu sehen, sämmtliche durch M gezogene Linien entweder abfallen, oder aufsteigen, je nachdem r negativ oder positiv ist, bis auf eine, deren Richtung durch die Gleichung

$$r\, cos\, \alpha + s\, \sin\, \alpha = o$$

bestimmt ist, und deren erstes Element wenigstens, ohne Fall und ohne Steigung durch M geht, ist endlich $s^2 - rt > o$, so ist M ein Sattelpunkt der Fläche, und alsdann gehen, wie sich klar einsehen lässt, zwei Linien ohne Steigung und ohne Fall durch denselben.

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Für die Linien des stärksten oder schwächsten Falles, und für die Linien der stärksten und schwächsten Steigung, wofür $\frac{d.\Delta z}{d\alpha} = o$ ist, hat man:

$$2s \cos 2\alpha + (t - r) \sin 2\alpha = o$$

d. h.

$$tang\ 2\alpha = \frac{2s}{r-t}$$

hieraus folgen für α, welches wie schon gesagt, positiv und kleiner als 360° sein muss, vier Werthe

$$\alpha_1,\ \alpha_1 + 90^0,\ \alpha_1 + 180^0,\ \alpha_1 + 270^0,$$

welche zu zwei, auf einander senkrecht stehenden Richtungen führen.

Setzt man jetzt für α in Δz und $\frac{d^2.\Delta z}{\partial \alpha^2}$ die Werthe α_1 oder $180^0 + \alpha_1$, so erhält man:

$$(1) \begin{cases} \Delta z = \frac{\rho^2}{2}(r \cos^2 \alpha_1 + 2s \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + t \sin^2 \alpha_1) + \ldots \\ \frac{\partial^2.\Delta z}{\partial \alpha^2} = \rho^2(-2s \sin 2\alpha_1 + (t-r) \cos 2\alpha_1) + \ldots \end{cases}$$

und setzt man $\alpha_1 + 90^0$ oder $\alpha_1 + 270^0$, so erhält man:

$$(2) \begin{cases} \Delta z = \frac{\rho^2}{2}(r \sin^2 \alpha_1 - 2s \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + t \cos^2 \alpha_1) + \ldots \\ \frac{\partial^2.\Delta z}{\partial \alpha^2} = \rho^2(2s \sin 2\alpha_1 - (t-r) \cos 2\alpha_1) + \ldots \end{cases}$$

Ist nun wieder M ein höchster oder tiefster Punkt, so haben offenbar die, den Systemen (1) oder (2) entsprechenden Werthen von Δz dasselbe, hingegen die zweiten Differential-Quotienten derselben das entgegengesetzte Zeichen; also laufen, falls M ein höchster Punkt ist, von demselben zwei Curven nach abwärts aus, eine mit dem stärksten, die andere mit dem schwächsten Fall; ist aber M ein tiefster Punkt, so erheben sich von demselben zwei Curven, eine mit der kleinsten, die andere mit der grössten Steigung.

Für

$$s^2 - rt = o$$

folgt fast dasselbe; nur fällt alsdann die Linie des schwächsten Falls, oder die der schwächsten Steigung mit der Niveaulinie zusammen, und ist endlich

$$s^2 - rt > o$$

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

so hat man einen Sattelpunkt, von welchem nebst den zwei, schon früher erwähnten Niveaulinien noch zwei Linien auslaufen, die auf einander senkrecht stehen, und die Richtung des stärksten und schwächsten Falles, und die der stärksten und schwächsten Steigung markiren.

Die bisher gemachten Schlüsse finden aber nicht mehr Statt, wenn

$$r = o\,,\quad s = o\,,\quad t = o$$

ist, in diesem Falle muss man weitere Discussionen einleiten, die aber in speciellen Fällen nicht schwer sein dürften.

Wenn man daher von einem beliebigen Punkte M einer krummen Fläche übergeht zu einem nächsten, unter allen den Punkt M umgebenden tiefst oder höchst gelegenen, von diesem wieder zu einem ganz analog liegenden u. s. f., so erhält man eine Curve, welche bekanntlich „Linien des stärksten Falles" genannt wird. Für dieselbe muss nebst der Gleichung $z = \varphi\,(x, y)$ noch die Gleichung

$$p \sin \alpha - q \cos \alpha = o$$

stattfinden, wo p und q bestimmte Functionen von x und von y sind. Durch Multiplication mit einem unendlich kleinen Factor ρ erhält man:

$$p\,\rho \sin \alpha - q\,\rho \cos \alpha = o$$

oder da

$$\rho \sin \alpha = dy\,,\quad \rho \cos \alpha = dx$$

ist,

$$p\,dy - q\,dx = o$$

und dies ist die Differential-Gleichung der horizontalen Projection der Linie des stärksten Falles der Fläche $z = \varphi\,(x, y)$.

Von jedem höchsten Punkte der Fläche (wenn nur nicht für denselben $r = s = t = o$ ist) geht, wie wir gezeigt haben, eine Linie des schwächsten und eine des stärksten Falles aus, erstere nennen wir Kamm, letztere Thalweg.

Es ist somit Kamm oder Wasserscheide eine durch den höchsten Punkt der Fläche gehende Linie des schwächsten Falles, Thalweg hingegen eine durch den höchsten Punkt der Fläche gehende Linie des stärksten Falles. Ist der Kamm eine geschlossene Linie, und befindet sich innerhalb der Contour der horizontalen Projection dessel-

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

ben wenigstens Ein tiefster Punkt der Fläche, so wird er Krater genannt; es ist übrigens möglich, dass ein Krater mehrere andere umschliesst. Da das auf den Gebirgen unserer Erde auffallende Regenwasser, dem Gesetze der Schwere gehorchend, längs der Linie des stärksten Falles abläuft, so ist natürlich, dass das Wasser, vom Kamm aus betrachtet, nach entgegengesetzten Seiten abfliesst.

Die Integration der Differential-Gleichung

$$p\,dy - q\,dx = o$$

ist in den wenigsten Fällen in geschlossener Form durchführbar. Das Wenige aber, was wir über deren Integrale in speciellen Fällen sagen können, ist merkwürdig genug, um berücksichtigt zu werden.

Betrachten wir vorerst den Fall, wo obige Gleichung ein vollständiges Differential ist, alsdann hat man:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{dq}{\partial y} \text{ oder } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = o$$

woraus folgt:

$$(1) \quad \begin{aligned} z = &\ \frac{1}{2}\left[f(x+y\sqrt{-1}) + f(x-y\sqrt{-1})\right] \\ &+ \frac{\sqrt{-1}}{2}\left[F(x+y\sqrt{-1}) - F(x-y\sqrt{-1})\right] \end{aligned}$$

unter f und F willkürliche Functionen verstanden. Die Linien des stärksten Falles dieser Fläche genügen der Differential-Gleichung

$$p\,dy - q\,dx = o,$$

die sich hier so stellt:

$$\begin{aligned} &\Big\{\frac{1}{2}\left[f^1(x+y\sqrt{-1}) + f^1(x-y\sqrt{-1})\right] + \\ &+ \frac{\sqrt{-1}}{2}\left[F^1(x+y\sqrt{-1}) - F^1(x-y\sqrt{-1})\right]\Big\}\,dy - \\ &- \Big\{\frac{\sqrt{-1}}{2}\left[f^1(x+y\sqrt{-1}) - f^1(x-y\sqrt{-1})\right] - \\ &- \frac{1}{2}\left[F^1(x+y\sqrt{-1}) + F^1(x-y\sqrt{-1})\right]\Big\}\,dx = o \end{aligned}$$

und deren Integrale:

$$(2) \quad \begin{aligned} &- \frac{\sqrt{-1}}{2}\left[f(x+y\sqrt{-1}) - f(x-y\sqrt{-1})\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[F(x+y\sqrt{-1}) + F(x-y\sqrt{-1})\right) = C \end{aligned}$$

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

ist. Das sind die Gleichungen von Curven, die all die Eigenschaften jener Linien besitzen, die wir bei der Auflösung höherer Gleichungen begegneten, und zu denen wir unmittelbar selbst gekommen wären, hätten wir, der Kürze der Rechnung wegen, nicht bloss reelle Coëfficienten bei denselben vorausgesetzt.

Wir verweisen wegen ihrer von uns bemerkten höchst merkwürdigen Eigenschaften auf ein von uns veröffentlichtes Memoire „Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen mit Einer oder mehreren Unbekannten."

Ein nicht minder beachtenswerther Fall, der sich bei der Integration der Gleichung

$$p\,dy - q\,dx = o$$

darbieten kann, ist der, wenn sich aus p und q ein variabler Factor absondern lässt, mithin obige Gleichung in folgender Form auftritt:

$$\psi(x,y)\,(P\,dx + Q\,dy) = o$$

alsdann sind die Gleichungen des stärksten Falles oder der stärksten Steigung

$$\left\{\begin{array}{l} z = \varphi(x,y) \\ \psi(x,y) = o \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z = \varphi(x,y) \\ Pdx + Qdy = o \end{array}\right.$$

Das erste System dieser Gleichungen entspricht offenbar einem in einer Horizontal-Ebene liegenden Curvenzug, denn $\psi(x,y) = o$ bringt ja identisch p und q auf Null; dies hat zur unmittelbaren Folge, dass sämmtliche an diese Curven gezogenen Tangenten horizontal laufen, also ist diese Curve selbst eine horizontale, ihre Gleichungen haben somit die Form:

$$\left\{\begin{array}{l} z = h \\ \psi(x,y) = o \end{array}\right.$$

unter h eine constante Zahl verstanden. Man wird um diese Formänderung ihrer Gleichungen zu bewirken $\varphi(x,y)$ durch $\psi(x,y)$ dividiren, ist der Quotient $f(x,y)$ und der Rest h, so hat man

$$z = \varphi(x,y) = \psi(x,y)\,.\,f(x,y) + h,$$

was sich für $\psi(x,y) = o$ auf $z = h$ zurückzieht.

Das sind wieder höchst merkwürdige Linien der Fläche $z = \varphi(x,y)$, und zwar im Allgemeinen höchste oder tiefste derselben.

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Ich nenne nämlich höchste oder tiefste Linien auf krummen Flächen solche Linien, deren sämmtliche Punkte dieselbe Höhe haben, deren nächste, aber ausser ihnen liegende Punkte entweder alle tiefer oder alle höher liegen.

Um zu untersuchen, in welchen Fällen die Linien, deren Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) = o \end{cases}$$

sind, und die man sich in der Form

$$(4) \quad \begin{cases} z = h \\ y = f(x) \end{cases}$$

aufgestellt denken kann, eine höchste oder tiefste Linie der Fläche $z = \varphi(x, y)$ ist, gehe man von ihr zu anderen auf derselben Fläche in unmittelbarer Nähe liegenden über, etwa dadurch, dass man y um δy wachsen lässt, unter δy eine beliebige Function von x verstanden, die stets sehr kleinen numerischen Werth hat.

Man erhält sonach als Gleichungen von in der Nähe der Linie (3) auf der Fläche $z = \varphi(x, y)$ liegenden Linien folgende:

$$(5) \quad \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ y = f(x) + \delta y. \end{cases}$$

Die Substitution $y = f(x) + \delta y$ in $z = \varphi(x, y)$ und darauffolgende Entwickelung nach Taylor's Reihe gibt:

$$z = h + \delta y \cdot \frac{dz}{\partial y} + \frac{\delta y^2}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots$$

oder da $\frac{dz}{\partial y}$ wegen des innehabenden Factors $\psi(x, y)$ gleich Null wird

$$z = h + \frac{dy^2}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots$$

Behält $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ für alle Punkte der Curve $\psi(x, y) = o$ einerlei Zeichen, so ist offenbar die Linie (3) eine höchste oder tiefste, sollte $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ stets Null werden, so müsste man das nächste Glied der Reihe zu Rathe ziehen, ist dieses positiv oder negativ, so hat man weder eine höchste, noch eine tiefste Linie; ist es aber auch Null, so entscheidet das Zeichen des vierten Differential-Quotienten u. s. f.

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Um daher die höchsten und tiefsten Linien einer Fläche

$$z = \varphi(x, y)$$

zu finden, bilde man sich die Ausdrücke:

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx}, \quad \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}$$

und sehe, ob sie einen gemeinschaftlichen variablen Factor besitzen. Sei einer vorhanden, und heisse dieser

$$\psi(x, y)$$

so untersuchet man, ob $\frac{\partial^2\varphi(x.y)}{\partial y^2}$ für alle Werthe, die der Gleichung $\psi(x,y) = o$ genügen, positiv oder negativ sei, im ersten Falle ist die Curve, deren Gleichungen

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) = o \end{cases}$$

sind, eine tiefste, im zweiten eine höchste; ist aber $\frac{d^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}$ (für $\psi(x,y) = o$) gleich Null, so bleibe man bei dem ersten, für $\psi(x,y) = o$ nicht verschwindenden Glied der Reihe

$$\frac{d^3\varphi(x, y)}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^4\varphi(x, y)}{\partial y^4}, \quad \frac{\partial^5\varphi(x, y)}{\partial y^5},$$

stehen, ist nun $\frac{\partial^n\varphi(x,y)}{\partial y^n}$ dieses erste, so hat man eine höchste oder tiefste Linie, wenn n gerade ist, und weder eine höchste, noch eine tiefste, wenn n ungerade ist.

(Es könnte auch sein, das die vorgelegte Fläche höchste und tiefste Linien besitzt, deren eine Gleichung $\psi(x,y) = \infty$ ist, diese Linie hätte dann offenbar die Gestalt einer Kante oder Schneide.)

Es ist äusserst merkwürdig, dass die Gleichungen solcher höchsten und tiefsten Linien den Differential-Gleichungen der kürzesten Linien auf der Fläche genügen, trotzdem die Krümmungshalbmesser dieser Linien in der Tangirungs-Ebene der Fläche selbst liegen, und nicht Normalen der Flächen sind.

Man kann sich leicht von der Richtigkeit des eben ausgesprochenen Satzes überzeugen, denn bekanntlich sind die Gleichungen der kürzesten Linie auf der Fläche, deren Gleichung $F(x,y,z) = o$ ist:

$$F(x,y,z) = o$$

$$\frac{dF}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right] - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right] = o$$

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

x als unabhängig variabel betrachtet. Besitzen $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$ einen variablen gemeinschaftlichen Factor $\psi(x, y, z)$, so wird offenbar der letzten Gleichung genügt durch die besondere Auflösung

$$\psi(x, y, z) = o$$

und die erste Gleichung, die sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{dF}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = o$$

geht hiefür über in:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = o$$

woraus folgt, dass entweder $\frac{\partial F}{\partial x}$ auch den Factor $\psi(x, y, z)$ besitzt, oder dass x constant wird, wenn man den Werth von y oder z aus $\psi(x, y, z) = o$ in $F(x, y, z) = o$ einführt.

Der erste Fall, wenn nämlich $\frac{\partial F}{\partial x}$ auch den Factor $\psi(x, y, z)$ besitzt, kann darauf hinweisen, dass $F(x, y, z)$ eine Function ist von $\psi(x, y, z)$; wäre dies, so hätte man:

$$F(x, y, z) = f[(\psi(x, y, z)] = o$$

was als Repräsentant einer Reihe von krummen Flächen dasteht, deren Gleichungen

$$\psi(x, y, z) = a_1 \qquad \psi(x, y, z) = a_2$$

sind. Es könnte auch sein, dass

$$F(x, y, z) = [\psi(x, y, z)]^n \cdot \chi(x, y, z) + h = o$$

wäre, unter n eine Zahl verstanden, die von o und 1 entschieden ist, u. s. f.

Der letztere Fall hingegen, nämlich wenn dx constant wird, ist ein solcher, der im Allgemeinen höchste und tiefste Linien der Fläche verräth.

Genau dieselben Schlüsse lassen sich machen, so oft irgend zwei der drei Differential-Quotienten

$$\frac{dF}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial y}$$

einen gemeinschaftlichen variablen Factor besitzen, weil man ja jede der drei Coordinaten x, y, z als Höhen-Coordinate ansehen kann.

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Man wird durch dies auf die Frage geleitet, ob nicht noch andere Linien auf der Fläche

$$F(x,y,z) = o$$

vorhanden sind, die sich bei schicklicher Drehung des Coordinatensystems als höchste oder tiefste Linien, repräsentiren.

Seien $x_1\ y_1\ z_1$ die neuen Axen, die mit den alten $x\ y\ z$ durch folgende bekannte Gleichungen verbunden sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \qquad & x &= a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 \\ y_1 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \qquad & y &= b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 \\ z_1 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \qquad & z &= c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 \end{aligned}$$

so hat man, wenn man in $F(x,y,z) = o$ statt x,y,z die neuen Coordinaten einführt:

$$F(x, y, z) = F_1(x_1, y_1, z_1)$$

dann ist weiter:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\ \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\ \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\ \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= a_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + a_3 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= b_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + b_3 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= c_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + c_3 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \end{aligned}$$

haben nun $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$ den gemeinschaftlichen Factor $\psi_1(x_1, y_1, z_1)$; so ist für

$$\psi_1(x_1, y_1, z_1) = o$$

$$\frac{dF}{\partial x} = a_3 \frac{\partial F_1}{\partial z_1},\ \frac{\partial F}{\partial y} = b_3 \frac{\partial F_1}{\partial z_1},\ \frac{\partial F}{\partial z} = c_3 \frac{\partial F_1}{\partial z_1}$$

woraus folgen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} b_3 \frac{\partial F}{\partial x} - a_3 \frac{\partial F}{\partial y} &= o \\ c_3 \frac{\partial F}{\partial y} - b_3 \frac{\partial F}{\partial z} &= o \\ a_3 \frac{\partial F}{\partial z} - c_3 \frac{\partial F}{\partial x} &= o \end{aligned}$$

wnload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

findet man daher irgend eine Function $\psi(x, y, z) = o$ und drei Zahlen $a_3\, b_3\, c_3$, die bloss der Bedingung unterworfen sind

$$a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2 = 1$$

welche mit Zuziehung der vorgelegten Gleichung die Gleichungen (6) identificiren, so gibt es im Allgemeinen eine höchste oder tiefste Linie in der Ebene $z_1 =$ Const., oder

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = \text{Const.}$$

Nehmen wir als Beispiel die Gleichung einer Ringfläche, die ist:

$$[(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2)]^2 - 4\, a^2 (r^2 - z^2) = o$$

für dieselbe erhält man:

$$\frac{dF}{\partial x} = 4x\, [(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2)]$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y\, [(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2)]$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4z\, [(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2)] + 8\, a^2 z$$

Die ersten zwei Differential-Quotienten haben den gemeinschaftlichen Factor

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + r^2)$$

also sind die Gleichungen einer höchsten oder tiefsten Linie der Ringfläche:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2)]^2 - 4a^2\, (r^2 - z^2) = o \\ (x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2) = o \end{array} \right.$$

oder reducirt

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \pm\, r \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{array} \right.$$

was doch eigentlich von selbst klar ist.

Die hier gemachten Betrachtungen beruhen durchgehends auf der Voraussetzung, dass für grösste und kleinste Werthe gewisser Functionen deren erster Differential-Quotient Null sein müsse. Hätten wir aber noch jene Fälle beachtet, wo der erste Differential-Quotient unendlich wird, so würden wir auf Kanten geführt worden sein, welche hie und da auf krumme Flächen wirklich vorhanden sind.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1853

Band/Volume: 10

Autor(en)/Author(s): Spitzer Simon

Artikel/Article: Bemerkung über ausgezeichnete Linie krummer Flächen. 435-448