Die Ansichten von Herschel dem Älteren und Gruithuisen, welche sich einer allgemeinen Anerkennung nicht erfreuten, weil sie dieselben mit genauen Beobachtungs-Daten nicht belegen konnten, finden demnach nun ihre Bestätigung, wenn sie gleich darin irrten, dass sie den Sonnenflecken die Kraft zuschrieben, die Lufttemperatur zu erhöhen, welche nur der makellosen Sonne zukommt.

SITZUNG VOM 17. NOVEMBER 1853.

Bericht des w. M., Herrn Professors Petzval über eine Abhandlung des Herrn Ober-Ingenieurs J. Arcari.

Herr Johann Arcari hat der kais. Akademie einen Aufsatz unter dem Titel: „Ein Problem des Stosses“ überreicht. Da der Verfasser der deutschen Sprache nicht vollkommen mächtig ist und auch die mathematische nur in derjenigen Weise spricht, wie sie in Werken von mehr praktischer Tendenz, die auf die der Analysis eigenthümliche Eleganz keinen Anspruch machen, vorfindig ist, da ferner Bemerkungen in dem Manuscripte vorkommen, die vielleicht ein Recht hätten da zu stehen, wenn man Folgerungen daraus zöge, und eben keines haben, weil Nichts daraus gefolgert wird, und theilweise sogar unrichtig sind, so wäre der Aufsatz sowohl der Sprache als auch des Missverhältnisses wegen zwischen Inhalt und Umfang für die akademischen Druckschriften nicht geeignet. Da indessen das darin behandelte Problem, ungeachtet man ihm den Titel eines Stossproblemes im strengsten Sinne des Wortes allenfalls auch streitig machen könnte, insoferne interessant ist, als es einige der vornehmsten Percussionswirkungen in dem einfachsten denkbaren Falle anschaulich macht, so gibt ihr Berichterstatter von demselben hier einen kurzen Auszug. Das Problem ist:

Es seien frei im Raume die zwei Massen m und M im Zustande der Ruhe, es sei a ein materieller elastischer Verband ohne Gewicht, dessen ursprüngliche Länge gleich a ist, es sei Q eine dritte Masse, welche mit der Geschwindigkeit c in der Richtung mM die letzte Masse M so stosst, dass eine Verlängerung x des Verbandes a binnen der Zeit t erfolgt, und es sei die Bewegung von m und M anzugeben.

Nun lässt Arcari Q gegen M stossen und dadurch den Inbegriff dieser beiden Massen, die eine gewisse Geschwindigkeit erhalten, für welche die Formel in allen Lehrbüchern steht, und hier endigt auch im Grunde das gar nichts Neues bietende Stossproblem, und es tritt ein zweites an seine Stelle, welches man so lauten lassen kann:

Die Masse m ist in Ruhe, die M dagegen wird plötzlich in Bewegung gesetzt und erhält eine Anfangsgeschwindigkeit c, in Folge deren der Verband a in der Zeit t die Verlängerung x erleidet. Es ist diese Verlängerung sammt den von m und M durchlaufenen Räumen s und S anzugeben.

Wir nennen die Kraft, welche an dem Verbande ziehend seine Länge verdoppeln würde, wenn seine natürliche Elasticität so weit reichte, q. Die Spannung, die aus der Verlängerung x hervorgeht, ist dann $\frac{qx}{a}$. Sie wirkt dann auf m sowohl wie auf M und sucht die Bewegung der einen zu beschleunigen, die der andern zu verzögern. Man hat daher

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{qx}{a} \quad , \quad M\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{qx}{a} \tag{1}$$

und zudem aus der Natur der Sache:

$$S - s = x. \tag{2}$$

Die beiden Gleichungen (1) geben addirt und einmal integrirt, wenn man die Geschwindigkeiten von m und M mit v und V bezeichnet:

$$mv + MV = m\frac{ds}{dt} + M\frac{dS}{dt} = H, \tag{3}$$

wo H die Integrationsconstante ist. Da man für $t = o$, $v = o$, $V = c$ hat, so ist $H = Mc$, somit:

$$mv = M(c - V) \tag{4}$$

Nun dividiren wir die beiden Gleichungen (1) die erste durch m, die zweite durch M und ziehen sodann die erste von der zweiten ab, so wird mit Rücksicht auf (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -bx\,, \text{ wo } b = \frac{q}{a}\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right] \tag{5}$$

ist. Diese lineare Differentialgleichung liefert integrirt:

$$x = C_1 \sin t\sqrt{b} + C_2 \cos t\sqrt{b}\,,$$

C_1 und C_2 sind Constante, und da man für $t = o$ hat: $x = o$ und $\frac{dx}{dt} = c$, so ist $C_1 = \frac{c}{\sqrt{b}}$, $C_2 = o$, somit:

$$x = \frac{c}{\sqrt{b}} \sin t\sqrt{b} \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{ds}{dt} = V - v = c \cos t\sqrt{b} \tag{7}$$

$$V = \frac{Mc + mc \cos t\sqrt{b}}{M + m} \tag{8}$$

$$v = \frac{Mc - Mc \cos t\sqrt{b}}{M + m} = \frac{Mc}{M + m}\left[1 - \cos t\sqrt{b}\right]. \tag{9}$$

Überdem gibt die (3) zum zweiten Male integrirt $ms + MS = Mct + K$. Die Constante K ist Null, weil t, s und S, zugleich verschwinden. Man hat also:

$$ms + MS = Mct \tag{10}$$

$$S = \frac{Mc}{M + m}\, t + \frac{mc}{\sqrt{b}\,(M + m)} \sin t\sqrt{b} \tag{11}$$

$$s = \frac{Mc}{M + m}\, t - \frac{Mc}{\sqrt{b}\,(M + m)} \sin t\sqrt{b} \tag{12}$$

Die Gleichung (10) sagt, dass, so lange der Verband besteht, der Schwerpunkt der Massen M und m sich gleichförmig im Raume fortbewege. Aus der (6) erschliessen wir, dass, wenn die Verlängerung x, deren der Verband a ohne Störung des Zusammenhanges fähig ist, sehr klein, die Geschwindigkeit c hingegen sehr gross wird, nothwendig $\sin t\sqrt{b}$ sehr klein und nahe zu $\operatorname{Cos} t\sqrt{b} = 1$ sein muss, daher denn auch nahe zu $V = c$ und $v = o$ ausfällt. Der Verband a wird daher zerrissen, bevor noch die Masse m eine merkliche Geschwindigkeit erreichen konnte. Dies soll nun die

Erscheinung erklären, dass eine bewegliche Windfahne von einer scharfen Flintenkugel durchlöchert werden kann, ohne von ihr in Bewegung gesetzt zu werden. Die eine und die andere dieser Folgerungen zieht Arcari aus seinen Gleichungen, jedoch auf andere Weise. Es lässt sich aber noch eine dritte nicht minder wichtige hinzufügen, nämlich: wenn der Verband stark genug ist, den Stoss der Masse auszuhalten, so erreicht die Verlängerung x ein Maximum, welches wir mit ξ bezeichnen, und welches offenbar Stattfindet für $\sin t\sqrt{b} = 1$, also

$$\xi = \frac{c}{\sqrt{b}}$$

ist.

Substituirt man hier den Werth (5) von b, der q enthält, und löst sodann nach dieser Grösse auf, so erhält man noch mit $\frac{\xi}{a}$ multiplicirend:

$$\xi = c\sqrt{\frac{a m M}{q(M+m)}} \tag{13}$$

$$\frac{q\xi}{a} = \frac{m M c^2}{(M+m)\,\xi} \tag{14}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen sagt, dass die Verlängerung Maximum ξ der Geschwindigkeit c der stossenden Masse M proportional sei und zudem auch noch von der angehängten Masse m in der Art abhänge, dass, wenn m alle möglichen Werthe bekommt zwischen o und ∞, das ξ dem entsprechend aller möglichen Werthe zwischen o und $c\sqrt{\frac{aM}{q}}$ theilhaftig wird. Hier verfällt Arcari in einen Irrthum, denn er sagt wörtlich, dass diese grösste Ausdehnung des Fadens von der Grösse der angehängten Masse m unabhängig ist, woran vermuthlich der von dem hier eingeschlagenen verschiedene, minder lichtvolle Gang der Rechnung die Schuld trägt.

Die zweite (14.) dieser Gleichungen enthält hingegen ein Grundgesetz der Percussionswirkungen, wenn gleich in Anwendung auf einen sehr speciellen Fall. Die Spannung Maximum nämlich ist offenbar $\frac{q\xi}{a}$ und kann als das Mass der Percussionswirkung angesehen werden; die Percussionswirkung also ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionirt. Für $m = \infty$ wird $\frac{q\xi}{a} = \frac{Mc^2}{\xi}$, steht also im geraden Verhältnisse der lebendigen Kraft der Masse M und im umgekehrten der Ausdehnung ξ. Wenn gleich dieser Satz, so wie er hier aus unseren Formeln hervorgeht, nur eine auf den Fall beschränkte Giltigkeit hat, dass die Grenze der natürlichen Elastizität nicht überschritten wird, so hat doch die Erfahrung gelehrt, dass er annäherungsweise wenigstens auch für andere Fälle gelte. Der doppelten Geschwindigkeit des Projectiles entspricht z. B. eine viermal so grosse Tiefe des Eindringens.

Das analytische Problem der Bewegung zweier Massen, die durch ein und dieselbe Kraft zu einander oder aus einander getrieben werden, ist kein neues, denn das ballistische Problem der Anfangsgeschwindigkeit des einem Feuerschlunde entfahrenden Projectiles hat denselben Ansatz, auch die Behandlung ist keine neue, aber die Anwendung auf den gegenwärtigen speciellen Fall und auf die Erklärung der Stossphänomene scheint noch nicht da gewesen zu sein. Da nun die meisten Lehrbücher der Physik und Mechanik von der bekannten Erscheinung sowohl, dass ein beweglicher Körper durch einen anderen, mit einer grossen Geschwindigkeit auf ihn stossenden zwar durchlöchert, aber nicht bewegt zu werden vermöge, als auch von den übrigen Gesetzen der Stosswirkung in der Regel keine Erklärung enthalten, nachdem das, was sie geben, nur immer der Ausdruck der Thatsache selbst mit anderen Worten ist, so erscheint die gegenwärtige sehr einfache Analysis gar nicht ungeeignet in die Lehrbücher der Wissenschaft aufgenommen zu werden, allwo ihre Einfachheit und Nichtneuheit eher als ein Vorzug erscheint, denn als ein Nachtheil. Ihr Berichterstatter trägt daher an, dass diese kurze Note, um die Lehrer der physikalischen und mathematischen Wissenschaften auf den Inhalt aufmerksam zu machen, in die Sitzungsberichte aufgenommen werde.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1853

Band/Volume: 11

Autor(en)/Author(s): Petzval Joseph Maximilian

Artikel/Article: Sitzung vom 17. November 1853. bericht des w. M., Herrn Professor Petzval über eine Abhandlung des Herrn Ober-Ingenieurs J. Arcari. 774-778