Bewegung des Lichtes in optisch-einaxigen Zwillingskrystallen.

Von **Joseph Grailich,**

Eleven des k. k. phys. Seminariums.

Die Zwillingskrystalle bieten einen jener seltenen Fälle dar, wo zwei feste Körper sich mit mathematischer Genauigkeit in einer Ebene begrenzen. Beiderseits ist die Materie dieselbe, und die Lagerung der kleinsten Theilchen derselben ist beiderseits auf dieselbe Weise angeordnet und nur verschieden in Bezug auf die Zwillingsfläche, d. i. in der Sprache der Optik, die Grösse und das Verhältniss der Elasticitätsaxen ist beiderseits gleich, nur in ihrer Lage finden sich dieselben hüben und drüben im Allgemeinen durch eine gegebene Bedingung aus der parallelen in eine symmetrische Stellung verrückt. Die Bedingung aber ist sehr einfach und durch das Zwillingsgesetz ausgesprochen, welches statuirt, dass die beiden Individuen sich in der Lage von Bild und Spiegelbild gegen einander befinden, in welche sie gebracht werden können, wenn der Krystall durch irgend eine Ebene geschnitten und die eine Schnitthälfte gegen die andere um 180° gedreht wird, wobei noch durch die Erfahrung die Beschränkung eintritt, dass die Schnittebene in der Reihe der combinationsfähigen Krystallflächen sich befinden, oder doch in einer sehr einfachen Beziehung zu diesen stehen müsse. Dies bewirkt im Allgemeinen die Verschiebung der Elasticitätsaxen der beiden Abschnitte aus der parallelen Lage; doch für drei senkrecht gegen einander stehende Ebenen wird die Continuität der optischen Hauptrichtungen nicht gestört. Es kann jede Fläche, die durch eine biquadratische Gleichung dargestellt wird, durch drei Ebenen, die den Ebenen je zweier Hauptdurchmesser parallel liegen, so geschnitten werden, dass die Schnittlinie symmetrisch gebaut ist nach zwei senkrechten, den entsprechenden Hauptdurchmessern parallelen Axen und dass die Tangentialebenen an je 2 um 180° von einander abstehenden Punkten, wenn man von der Verschiedenheit der Zeichen absieht, gleich geneigt sind gegen die Hauptdurchmesser. Es wird daher durch den Schnitt einer solchen

Ebene und durch das Verdrehen der beiden Abschnitte um 180° in der Symmetrie der Fläche durchaus nichts geändert. Nun ist aber die Elasticitätsfläche, nach welcher die Bewegungen des Lichtes in krystallisirten Körpern bestimmt werden können, eine Fläche dieser Art, und es folgt somit, dass der Äther gleich constituirt sein könne, wenn es die Materie selbst auch nicht ist. Ein Rhomboeder nach einer $R-\infty$ Fläche zusammengesetzt, gibt von dieser Thatsache ein sehr anschauliches Beispiel; nicht minder ein mit plagiëdrischen Abstumpfungen behafteter Quarzkrystall, dessen Zwillingsfläche parallel der Hauptaxe liegt. In solchen Körpern vereinfacht sich die Bedingung für die Lage der erwähnten Ebene der Symmetrie noch mehr, indem die Gleichheit zweier Elasticitätsflächen Rotationsflächen erzeugt, welche durch jede zur optischen Axe parallele oder senkrechte Zwillingsebene geschnitten werden können, ohne dass sich in der Continuität der Richtungen etwas änderte.

In dem dritten Bande von Biot's *traité de physique* findet sich eine Anweisung, wie die Richtung der Strahlen zu erhalten sei, wenn beide an einander grenzende Medien krystallisirt sind, es heisst dort: der einfallende Strahl kann ein ordentlicher oder ausserordentlicher sein; ist es ein ordentlicher, so kann man das erste Mittel betrachten als wäre es nicht krystallisirt, und die für diesen Fall entwickelten Formeln finden ihre Anwendung; ist es dagegen ein ausserordentlicher, so braucht man nur vom Einfallspunkte den entsprechenden ordentlichen Strahl im ersten Mittel zu ziehen, dessen Richtung aus den allgemeinen Formeln zu erhalten ist. und von diesem ausgehend die beiden ins zweite Mittel gebrochenen Strahlen zu berechnen, welches die verlangten Richtungen sind [1]). Die Formeln, die aus dieser Betrachtungsweise abgeleitet werden, sind aber zu complicirt und zum Theil für eine allgemeine Betrachtung von Strahlen-Complexen, wie sie z. B. bei der Dioptrik der Linsen nöthig werden, nicht brauchbar; es wurde desshalb in Folgendem ein etwas verschiedener Weg

[1]) Biot a. a. O. S. 347. Er setzt noch hinzu: „Je dis les directions, car lorsque les rayons lumineux passent ainsi d'un cristal à l'autre, les intensités des faisceaux qui en resultent sont assujetties à des variations très singulières, que nous examinerons plus tard, et qui quelquefois peuvent les affaiblir au point qu'on cesse entièrement de les appercevoir.“ Das ist der Punkt über welchen Huyghens sich keine Rechenschaft geben konnte, und den er daher einfach als Thatsache berichtet.

eingeschlagen, der zwar, in sofern er auch von der Huyghen'schen Construction ausgeht, dem Biot'schen ähnlich ist, aber durch Einführung analytischer anstatt der von Malus und Biot gegebenen trigonometrischen Formeln besser zu handhabende Ausdrücke liefert.

Da fürs Erste davon abgesehen werden muss, auf welche Weise die Wellenbewegung aus irgend einem isotropen Mittel in ein krystallinisches sich verbreitet, so nehmen wir ein Coordinatensystem an, das durch die Zwillingsebene und die Neigung der optischen Axe gegen diese gegeben ist, so dass das Einfallsloth die Axe der Z, die Projection der optischen Axe auf die Zwillingsebene die Axe der X, und die auf beiden senkrechte, in der Zwillingsebene liegende Gerade die Axe der Y darstellt. Die Neigung der optischen Axe wird dabei immer so betrachtet, dass sie mit der positiven Seite der Abscissenaxe einen spitzen Winkel einschliesst. Für die in Folgendem angeführten Beispiele hat $\alpha =$ der Neigung der optischen Axe, ω und ε diese Werthe:

1. Kalkspath. $\omega = 1{\cdot}66360$; $\varepsilon = 1{\cdot}48868$ (der Strahl E nach Rudberg[1]).

$\alpha = 90^\circ$	Zwillingsfläche	$R - \infty$
$\alpha = 63^\circ\ 44'\ 45''$	„	$R - 1$[2]) $= 134^\circ\ 57'$
$\alpha = 45^\circ\ 23'\ 26''$	„	$R = 105^\circ\ 5'$
$\alpha = 26^\circ\ 52'\ 47''$	„	$R + 1 = 78^\circ\ 51'$
$\alpha = 26^\circ\ 15'\ 14''$	„	senkrecht auf die Axenkante von R.
$\alpha = 0^\circ$	„	$R + \infty$

2. Quarz. $\omega = 1{\cdot}54711$; ε $1{\cdot}55681$ (der Strahl E nach Rudberg).

$\alpha = 0^\circ$	für die Zwillingsfläche	$P + \infty$
$\alpha = 42^\circ\ 15'\ 42''$	„	$R - 1$
$\alpha = 90^\circ$ für die	„	$R - \infty$

3. Dioptas. $\omega = 1{\cdot}667$; $\varepsilon = 1{\cdot}723$

$\alpha = 39^\circ\ 16'\ 21''$ für die Zwillingsfläche $R + 1$.

---

[1]) Pg. Ann. XIV.

[2]) S. Mohs, leichtfassliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralreiches, 1. Fig. 197—203.

An den übrigen durchsichtigen Körpern des rhomboedrischen und pyramidalen Systems sind entweder keine Zwillingsbildungen beobachtet worden, oder ihre optischen Constanten sind noch nicht bekannt, wenigstens nicht in dem Verzeichnisse enthalten, welches Beer in seiner Einleitung in die höhere Optik, S. 296 ff., gegeben.

I. Betrachtung eines einzelnen Strahles und einer einzelnen Welle bei ihrer Verbreitung durch einen Zwillingskrystall.

1. Um die beiden Wellen, welche durch eine von aussen in den Krystall gelangende Lichtbewegung an der Trennungsfläche zwischen dem isotropen und heterotropen Mittel erregt werden, construiren und ihre Richtung und Geschwindigkeit bestimmen zu können, sind in allen Handbüchern der Optik die Verfahren angegeben. Wir denken uns daher dieselben gegeben, und wollen untersuchen, auf welche Weise die Undulation der ordentlichen und ausserordentlichen Welle modificirt wird, sobald sie an eine Zwillingsfläche schlägt. Offenbar wird jede derselben wieder zweierlei Wellen erregen (mit Ausnahme gewisser specieller Fälle, wo entweder überhaupt nur eine Welle erregt wird, oder wo beide Wellen zusammenfallen); dabei wird sich die ordentliche Welle so verhalten, als käme sie aus einem isotropen Mittel, und nur die ausserordentliche wird Verhältnisse zeigen, die einer eigenen kurzen Betrachtung bedürfen. Denken wir uns die beiden Wellenflächen um irgend einen Punkt der Zwillingsebene als Mittelpunkt construirt; das Mittel, woraus die Welle kommt, werden wir fortan das erste, jenes, in welches sich die Bewegung über die Zwillingsfläche hinaus fortsetzt, das zweite nennen, und ebenso auch die beiden Abschnitte des Wellenellipsoides, die sich in der Zwillingsebene begrenzen. Jeder Radius des ersten Ellipsoides stellt einen einfallenden Strahl vor; legt man an das Ellipsoid durch den Punkt, wo der Radius die Fläche trifft, eine Berührungsebene, und fällt gegen diese ein Loth, so stellt dies seiner Richtung und Länge nach die Richtung und Geschwindigkeit der zu dem Strahle gehörigen Welle dar. Es wird aber eine Welle, um einen Weg gleich ihrer Normale zurückzulegen, genau so viel Zeit brauchen als das Licht bedarf, um sich im zweiten Medium bis zu jener Grenze zu verbreiten, die durch das Wellenellipsoid dargestellt wird. Ist A (Fig. 1) ein Punkt des oberen Ellipsoides, so wird AO der Strahl und $A'O$ die zugehörige Wellennormale; legt man durch O eine senkrechte auf BO, so stellt diese

die Stirn der Welle dar, während der Punkt O dieser Welle das zweite Mittel trifft, steht der Punkt O' noch in einer solchen Entfernung, dass er erst dann bei O'' an die Trennungsfläche gelangt, wenn die durch den Punkt O im zweiten Medium erregte Bewegung bereits die durch die Wellenfläche dargestellte Grenze erreicht; legt man nun durch die Gerade, welche durch den Durchschnitt der Wellenebene mit der Zwillingsebene bei O'' entsteht, eine Ebene berührend an das zweite Ellipsoid, so ist OA' der neue Strahl und OB' die Richtung und Geschwindigkeit des zugehörigen ausserordentlichen, und OA'' die Richtung und Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles und der zugehörigen Welle.

Aus dieser Construction folgt, dass die Normalen beider, der einfallenden und gebrochenen Wellen in derselben Ebene bleiben (Einfallsebene der Wellennormalen). Denn die Normale der einfallenden Welle steht auch senkrecht auf der Trace derselben und geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten; durch denselben Punkt gehen auch die Normalen der gebrochenen Wellen, deren gemeinschaftliche Trace zugleich auch die Trace der einfallenden Welle ist; folglich liegen alle 3 Normalen in derselben Ebene. Fassen wir nun zuerst die ausserordentlich gebrochenen Wellen näher ins Auge.

Nennen wir die Geschwindigkeit der einfallenden (ausserordentlichen) Welle W_e, die der gebrochenen ausserordentlichen W'_e; die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der ersteren mit den Coordinatenaxen einschliesst u_e, v_e, w_e; die Cosinusse der gebrochenen u'_e, v'_e, w'_e; den Winkel, den die Normale der ersteren mit der optischen Axe einschliesst $=\varphi$, den entsprechenden Winkel für die gebrochene Welle φ', so hat man

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= u_e \cos\alpha + w_e \sin\alpha \\ \cos\varphi' &= u'_e \cos\alpha - w'_e \sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

wo das Verhältniss zwischen den Cosinussen der Normalen durch die Bedingung gegeben ist, dass beide in der Einfallsebene liegen. Es ist somit

$$\frac{u_e}{u'_e} = \frac{v_e}{v'_e} \tag{2}$$

und dies in die Gleichung $u'^2_e + v'^2_e + w'^2_e = 1$ eingeführt:

$$\frac{u^2}{u'^2_e} = \frac{1 - w^2}{1 - w'^2_e} \tag{3}$$

w_e und w'_e aber sind die Cosinusse des Einfalls- und Brechungswinkels; man kann daher

$$\frac{w_e}{u'_e} = \frac{v_e}{v'_e} = \frac{\sin i_e}{\sin r_e} \tag{4}$$

setzen. Dies in (1) substituirt gibt:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= u_e \cos\alpha + w_e \sin\alpha \\ \cos\varphi' &= u_e \frac{\sin r_e}{\sin i_e} \cos\alpha - \cos r_e \sin\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

Aus Fig. 1 sieht man, dass in den beiden rechtwinkeligen Dreiecken OBO'' und $OB'O''$

$$W_e = BO'' = OO'' \sin i_e$$
$$W'_e = OB' = OO'' \sin r_e$$

folglich

$$\frac{W_e}{W'_e} = \frac{\sin i_e}{\sin r_e} \tag{6}$$

Für die Geschwindigkeiten W_e und W'_e hat man aber die bekannten Formeln

$$\begin{aligned} W_e^2 &= e^2 + (o^2 - e^2) \cos\varphi^2 = 1 + (q-1)\cos\varphi^2 \\ W'^2_e &= e^2 + (o^2 - e^2) \cos\varphi'^2 = 1 + (q-1)\cos\varphi'^2 \end{aligned} \tag{7}$$

wo q das Verhältniss $\frac{o^2}{e^2}$ ist, das in negativen Krystallen einen echten, im positiven einen unechten Bruch darstellt.

2. Wenn die Normalen der gebrochenen Wellen in die Zwillingsebene zu liegen kommen, so wird das Licht in dem zweiten Medio in einer Cylinderfläche fortschreiten, die senkrecht steht auf der Trennungsfläche. Untersuchen wir, welche Lage die einfallenden Wellen und die entsprechenden Strahlen dann haben. Wir brauchen zu dem Ende nur $r = 90°$ zu setzen; es ist dann in (5) und (6)

$$\cos\varphi' = \frac{u_e}{\sin i_e} \cos\alpha$$
$$\frac{W_e}{W'_e} = \sin i_e$$

und man hat somit

$$\sin i^2 = \frac{1 + (q-1)(u_e^2 \cos\alpha^2 + 2u_e \cos\alpha \sin\alpha \cdot \cos i + \cos i^2 \cdot \sin\alpha^2)}{1 + (q-1)\frac{ue^2}{\sin i^2} \cos\alpha^2}$$

woraus man ableitet

$$\cos i \left[u_e (q-1) \sin 2\alpha + \cos i (1 + (q-1)\sin\alpha^2)\right] = o$$

Die zwei Wurzeln dieser Gleichung entspringen daraus, dass hier auch die Berührungsebenen an die von der Zwillingsebene vernichteten Wellenhälften in der Lösung enthalten sind; es muss daher die Lösung $\cos i = o,\ i = 90^0$ übergangen, und bloss die zweite

$$u_e\,(q-1)\sin 2\alpha + w_e\,[1+(q-1)\sin\alpha^2] = o$$

näher betrachtet werden. Diese stellt eine Ebene dar, die gegen die XY um einen Winkel geneigt ist, dessen Tangente

$$-\frac{(q-1)\sin 2\alpha}{1+(q-1)\sin\alpha^2} \tag{8}$$

beträgt, und welche die Axe der Ordinaten in sich enthält; hieraus folgt, dass bei allen einaxigen Zwillingskrystallen eine Lichtwelle, welche parallel mit dem Hauptschnitte fortschreitet, sich ohne Unterbrechung durch beide Individuen verbreitet, so dass in einem solchen Krystalle, wenn er parallel zum Hauptschnitte angeschliffen wird, bei senkrechter Incidenz des Lichtes die Trennungsfläche vollständig der Wahrnehmung entschwindet.

Der für jede Krystallspecies constante Coëfficient $\frac{(q-1)\sin 2\alpha}{1+(q+1)\sin\alpha^2}$ wird positiv oder negativ, je nachdem q kleiner oder grösser als die Einheit ist; es wird daher diese Ebene stets einen spitzen Winkel mit der kleineren Axe einschliessen, dieselbe sei Polar- oder Äquatorialhalbmesser. Ihre Normale schliesst mit der optischen Axe einen Winkel ein, dessen Grösse durch die Gleichung

$$[(q-1)\cos\alpha^2 + q]\sin\alpha = \cos\Theta$$

gegeben ist. Um mit der Äquatorialebene zusammenzufallen, muss $\Theta = o$ werden, was zu der Bedingungsgleichung

$$q = \frac{\frac{1}{\sin\alpha}\cdot + \cos\alpha}{1+\cos\alpha^2}$$

führt, ein Werth, der offenbar nur einem positiven Krystalle angehören kann, da die Cosecante für alle möglichen Neigungen der optischen Axe grösser als die Einheit bleibt, und für den Fall, wo sie $= 1$ wird, der Krystall aufhört ein doppelbrechender zu sein, was also die allererste Voraussetzung dieser Untersuchungen aufhebt.

Bekommt dagegen Θ den Werth von 90^0, so fällt die Ebene der Normalen mit der optischen Axe zusammen; dies findet Statt:

1.) für $sin\ \alpha = o$

was schon aus der allgemeinen Betrachtung erhellt, da für $\alpha = o$ durchaus keine optische Verschiedenheit in den beiden conjugirten Individuen wahrgenommen werden kann, und darum der Wellencylinder dies- und jenseits der Zwillingsebene gleichmässig sich verbreitet;

2.) für $cos\ \alpha^2 = \frac{q}{1-q}$

was nur in einem negativen Krystalle erfüllt werden kann, und selbst in einem solchen nur in einem Falle, von dem mit grösster Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, dass er in der Natur nicht vorkomme, da das Quadrat der ausserordentlichen Geschwindigkeit wenigstens das Doppelte des Quadrates der ordentlichen betragen müsste — eine Differenz in der Brechung der beiden Strahlen, der selbst beim Kalkspath nichts nahe kommt.

Um die Lage der diesen Wellen zugehörigen Strahlen zu ermitteln, braucht man nur an das Wellenellipsoid eine zur Normalen der gefundenen Ebene parallele Berührungsfläche zu legen, die Berührungscurve aufzusuchen und die Punkte dieser mit dem Mittelpunkte zu verbinden. Die Gleichung der Wellenfläche ist für ein Coordinatensystem, das durch die Polaraxe und die Äquatorialebene bestimmt ist,

$$\frac{1}{e^2}(x^2+y^2)+\frac{1}{o^2}z^2=1$$

In unserem Coordinatensysteme ist aber die Axe der Z um $\pm(90-\alpha)^0$ gegen den Polardurchmesser geneigt, und so erhält man durch eine einfache Transformation der Coordinaten für die Wellenfläche im ersten Individuum

$$\frac{1}{e^2}(x^2+y^2+z^2)+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{e^2}\right)(x\ cos\ \alpha+z\ sin\ \alpha)^2=1\equiv E$$

und

$$\frac{1}{e^2}(x^2+y^2+z^2)+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{e^2}\right)(x\ cos\ \alpha-z\ sin\ \alpha)^2=1\equiv E'$$

für die Wellenfläche des zweiten Individuums. Die Berührungscurve wird erhalten, wenn in

(9) $$a\frac{dE}{dx}+b\frac{dE}{dy}+c\frac{dE}{dz}=o$$

für a und b die trigonometrischen Tangenten der Richtung der Berührungsfläche substituirt werden. Es ist aber

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dE}{dx} = \left[\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) cos\ \alpha^2\right] x + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha\ cos\ \alpha\ .\ z$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dE}{dy} = \frac{1}{c^2} \cdot y$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dE}{dz} = \left[\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha^2\right] z + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha\ cos\ \alpha\ .\ x$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dE'}{dx} = \left[\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) cos\ \alpha^2\right] x - \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha\ cos\ \alpha\ .\ z$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dE'}{dy} = \frac{1}{c^2} \cdot y$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dE'}{dz} = \left[\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{o^3} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha^2\right] z - \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha\ cos\ \alpha\ .\ x$$

Für die hier vorkommenden Grössen, die für jeden einzelnen Zwilling constant sind, wollen wir kürzere Bezeichnungen einführen, da sie noch öfter wiederkehren werden, und zwar sei

$$A = \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) sin\ \alpha^2$$

$$B = \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) cos\ \alpha\ cos\ \alpha$$

$$C = \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2}\right) cos\ \alpha^2$$

$$P = o^2 C = 1 + \left(\frac{o^2}{c^2} - 1\right) cos\ \alpha^2 = 1 + (q-1)\ sin\ \alpha^2$$

$$Q = -\ o^2\ B = \left(\frac{o^2}{c^2} - 1\right) sin\ \alpha\ cos\ \alpha = (q-1)\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$$

$$R = o^2 A = 1 + \left(\frac{o^2}{c^2} - 1\right) sin\ \alpha^2 = 1 + (q-1)\ cos\ \alpha^2$$

Es ist dann die Normale gegen die Ebene der Wellennormalen

$$x = \frac{2\,Q}{P} z$$

$$y = o$$

woraus folgt

$$a = \frac{2\,Q}{P}$$

$$b = o$$

und, durch Substitution in E und (9)

$$Cx^2 + \frac{1}{c^2} y^2 + Az^2 + 2\,Bxz = 1$$

$$PQx + (PR - 2\,Q^2)\,z = o$$

als Gleichung der Berührungscurve im ersten Mittel; die zugehörigen Strahlen liegen demnach auch in einer Ebene, die mit der Ebene der Wellennormalen einen Winkel einschliesst, dessen Tangente gleich ist:

$$\frac{2Q}{P} \cdot \frac{P^2 + Q^2 - 2RP}{2RP}$$

Für die gebrochenen Wellen ist $a = o$, $b = o$, folglich

$$Cx^2 + \frac{1}{c^2} y^2 + Az^2 - 2Bxz = 1$$

$$Az - Bx = o$$

die Gleichung der Berührungscurve; auch hier liegen, wie zu erwarten stand, die Strahlen in einer Ebene, welche gegen die Ebene der Wellennormalen um einen Winkel geneigt ist, dessen trigonometrische Tangente den Werth $-\frac{R}{Q}$ hat; die beiden Ebenen der Strahlen (die der einfallenden und der gebrochenen) schneiden sich in der Axe der Y und schliessen unter einander einen Winkel ein, dessen Tangenten gleich ist

$$\frac{2Q^2}{R^2P - 2Q^2R + Q^2P}.$$

Für die ordentlich gebrochenen Wellen fällt die hier behandelte Frage mit der über totale Reflexion zusammen, die wir hier übergehen können, da sie bei der allgemeinen Betrachtung dieses Falles noch zur Sprache kommen wird.

3. Es wird für das Folgende nothwendig sein, die allgemeinen Verhältnisse zwischen Wellennormalen und Strahlen desselben Mediums analytisch auszudrücken. Nach der Huyghens'schen Construction wird die Lage der Wellennormalen durch das Loth bestimmt, das man aus dem Mittelpunkt auf diejenige Ebene fällt, welche das Ellipsoid in dem Punkte berührt, wo es der Strahl trifft; der geometrische Ort sämmlicher Fusspunkte der Wellennormalen fällt für einaxige Krystalle mit jener Fläche des vierten Grades zusammen, die Fresnel die Elasticitätsfläche nennt. Die bekannten Gleichungen, aus denen die Richtung und Geschwindigkeit des Strahles aus der gegebenen Welle, und umgekehrt, gerechnet werden, sind, wenn $x_1\, y_1\, z_1$ einen Punkt der Wellenebene, $x\, y\, z$ einen Punkt des Wellenellipsoides bezeichnen,

$$\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{c^2}\right)(x\cos\alpha+z\sin\alpha)^2=1$$

$$\frac{1}{c^2}(xx_1+yy_1+zz_1)+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{c^2}\right)(xx_1\cos\alpha^2+[xz_1+x_1z]\sin\alpha\cos\alpha+zz_1\sin\alpha^2)=1$$

$$\frac{x}{z}=\frac{\frac{1}{c^2}x_1+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{c^2}\right)(x_1\cos\alpha^2+z_1\sin\alpha\cos\alpha)}{\frac{1}{c^2}z_1+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{c^2}\right)(z_1\sin\alpha^2+x_1\sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{\frac{1}{c^2}y_1}{\frac{1}{c^2}z_1+\left(\frac{1}{o^2}-\frac{1}{c^2}\right)(z_1\sin\alpha^2+x_1\sin\alpha\cos\alpha)}$$

die Gleichung der Wellenfläche, der Berührungsebene an einen Punkt $x\ y\ z$, und der Normalen gegen diese Ebene. Führen wir in letztere noch die oben angegebenen Bezeichnungen ein:

$$\frac{x}{z}=\frac{\frac{x_1}{z_1}C+B}{A+\frac{x_1}{z_1}B}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{\frac{y_1}{z_1}\cdot\frac{1}{c^2}}{A+\frac{x_1}{z_1}\cdot B}$$

Bezeichnen $\xi_e\ \eta_e\ \zeta_e$ die Cosinusse der Winkel, die ein Strahl mit den Coordinatenaxen einschliesst, $u\ v\ w$ die Cosinusse der zugehörigen Wellennormale, $x_1^2+y_1^2+z_1^2=W^2$ das Quadrat der Geschwindigkeit der Wellen, $x^2+y^2+z^2=E^2$ das Quadrat der Geschwindingkeit des Strahles, so ist

$$u=\frac{x_1}{W}\quad v=\frac{y_1}{W}\quad w=\frac{z_1}{W}$$

$$\xi=\frac{x}{E}\quad \eta=\frac{y}{E}\quad \zeta=\frac{z}{E}$$

Führen wir in die Gleichungen von $u\ v\ w$ die Coordinaten der Wellenfläche ein, so erhalten wir die Richtung der Normalen für einen beliebigen Strahl

$$u=\frac{\frac{x_1}{z_1}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{z_1}\right)+\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2+1}}=\frac{\frac{x}{z}C+B}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}C+B\right)^2+\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{y}{z}\right)^2+\left(A+\frac{x}{z}B\right)^2}}\qquad(10)$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen lässt sich vereinfachen; er ist nach einigen Reductionen gleich

$$\frac{1}{c^4}\left[1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2\right]+\left(\frac{1}{o^4}+\frac{1}{c^4}\right)\left[\frac{x}{z}\cos\alpha+\sin\alpha\right]^2$$

oder wenn man die Geschwindigkeit des zugehörigen Strahles einführt

$$\frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{c^4}\cdot E^2+\left(\frac{1}{o^4}-\frac{1}{c^4}\right)(x\cos\alpha+z\sin\alpha)^2\right]$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$(10)\quad \begin{aligned} v&=\frac{\frac{1}{c^2}\cdot\frac{y}{z}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{c^4}\cdot E^2+\left(\frac{1}{o^4}-\frac{1}{c^4}\right)(x\cos\alpha+z\sin\alpha)^2}}\\ w&=\frac{A+\frac{x}{z}B}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{c^4}E^2+\left(\frac{1}{o^4}-\frac{1}{c^4}\right)(x\cos\alpha+z\sin\alpha)^2}}\end{aligned}$$

Ebenso, wenn man umgekehrt den Strahl aus der gegebenen Welle rechnet, wird

$$\frac{x}{z}=\frac{B-A\frac{x_1}{z_1}}{B\frac{x_1}{z_1}-C}\quad,\quad\frac{y}{z}=-\frac{\frac{1}{o^2}\cdot\frac{y_1}{z_1}}{B\frac{x_1}{z_1}-C}$$

und

$$(11)\quad \begin{aligned} \xi_e&=\frac{B-A\frac{x_1}{z_1}}{\frac{1}{z_1}\sqrt{\frac{1}{c^4}W^2+\left(\frac{1}{o^4}-\frac{1}{c^4}\right)[y_1^2+(z_1\cos\alpha-x_1\sin\alpha)^2]}}\\ \eta_e&=-\frac{\frac{1}{o^2}\cdot\frac{y_1}{z_1}}{\frac{1}{z_1}\sqrt{\frac{1}{c^4}W^2+\left(\frac{1}{o^4}-\frac{1}{c^4}\right)[y_1^2+(z_1\cos\alpha-x_1\sin\alpha)^2]}}\\ \zeta_e&=\frac{B\frac{x_1}{z_1}-C}{\frac{1}{z_1}\sqrt{\frac{1}{c^4}W^2+\left(\frac{1}{o^4}-\frac{1}{c^4}\right)[y_1^2+(z_1\cos\alpha-x_1\sin\alpha)^2]}}\end{aligned}$$

Für das zweite Medium erleiden diese Formeln nur eine geringe Modification; bezeichnen wie immer die gestrichelten Buchstaben die auf das zweite Medium bezüglichen Symbole, so wird

$$\frac{x_1^1}{z_1^1} = \frac{\frac{x^1}{z^1} C - B}{A - \frac{x^1}{z^1} B}, \quad \frac{y_1^1}{z_1^1} = \frac{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{y^1}{z^1}}{A - \frac{x^1}{z} B}$$

und

$$u_e^1 = \frac{C \frac{x^1}{z^1} - B}{\frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{c^4} E'^2 + \left(\frac{1}{o^4} - \frac{1}{c^4}\right) (x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2}}$$

$$v_e^1 = \frac{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{y^1}{z^1}}{\frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{c^4} \cdot E'^2 + \left(\frac{1}{o^4} - \frac{1}{c^4}\right) (x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2}} \tag{12}$$

$$w_e' = \frac{A - B \frac{x^1}{2^1}}{\frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{c^4} E'^2 + \left(\frac{1}{o^4} - \frac{1}{c^4}\right) (x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2}}$$

Ebenso

$$\frac{x'}{z'} = \frac{\frac{x^1}{z_1^1} A + B}{C + \frac{x_1^1}{z_1^1} B} \qquad \frac{y'}{z'} = \frac{\frac{1}{o^2} \cdot \frac{y_1^1}{z_1^1}}{C + \frac{x_1^1}{z_1^1} B}$$

woraus

$$\xi_e' = \frac{\frac{x_1^1}{z_1^1} A + B}{\frac{1}{z_1^1} \sqrt{\frac{1}{c^4} W'^2 + \left(\frac{1}{o^4} - \frac{1}{c^4}\right) [y_1^{1\,2} + (x_1^1 \sin \alpha + z_1^1 \cos \alpha)^2]}}$$

$$\eta_e' = \frac{\frac{1}{o^2} \cdot \frac{y_1^1}{z_1^1}}{\frac{1}{z_1^1} \sqrt{\frac{1}{c^4} W'^2 + \left(\frac{1}{o^4} - \frac{1}{c^4}\right) [y_1^{1\,2} + (x_1^1 \sin \alpha + z_1^1 \cos \alpha)^2]}} \tag{13}$$

$$\zeta_e' = \frac{\frac{x_1^1}{z_1^1} B + C}{\frac{1}{z_1^1} \sqrt{\frac{1}{c^4} W'^2 + \left(\frac{1}{o^4} - \frac{1}{c^4}\right) [y_1^{1\,2} + (x_1^1 \sin \alpha + z_1^1 \cos \alpha)^2]}}$$

Die Nenner der betreffenden Cosinusse sind zugleich immer proportional der Geschwindigkeit des Strahles oder der Wellen, deren Direction man berechnet.

Mit Hülfe der hier entwickelten Relationen vermag man nun auch die Richtungen durch die Richtungen selbst auszudrücken, wodurch dann der für das Folgende nothwendige Apparat erhalten wird. Es ist für das erste Individuum, wenn der Strahl gegeben ist,

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
u_e &= \frac{P\,\xi_e - Q\,\zeta_r}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,(\xi_e \cos\alpha + \zeta_e \sin\alpha)^2}}\\
v_e &= \frac{q\,\eta_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,(\xi_e \cos\alpha + \zeta_e \sin\alpha)^2}}\\
w_e &= \frac{R\,\zeta_e - Q\,\xi_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,(\xi_e \cos\alpha + \zeta_e \sin\alpha)^2}}
\end{aligned}
$$

Wenn die Welle gegeben ist

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
\xi_e &= \frac{Ru_e + Qw_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,[v_e^2 + (w_e \cos\alpha - u_e \sin\alpha)^2]}}\\
\eta_e &= \frac{v_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,[v_e^2 + (w_e \cos\alpha - u_e \sin\alpha)^2]}}\\
\zeta_e &= \frac{Pw_e + Qu_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,[v_e^2 + (w_e \cos\alpha - u_e \sin\alpha)^2]}}
\end{aligned}
$$

Im zweiten Individuum erhalten wir, wenn der Strahl gegeben ist

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
u'_e &= \frac{P\,\xi' + Q\,\zeta'_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,(\xi'_e \cos\alpha - \zeta'_e \sin\alpha)^2}}\\
v'_e &= \frac{q^2\,\eta'_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,(\xi'_e \cos\alpha - \zeta'_e \sin\alpha)^2}}\\
w'_e &= \frac{A\,\zeta'_e + Q\,\xi'_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,(\xi'_e \cos\alpha - \zeta'_e \sin\alpha)^2}}
\end{aligned}
$$

und wenn die Welle bekannt ist

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
\xi'_e &= \frac{R\,u'_e - Q\,w'_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,[v'^2_e + (u'_e \sin\alpha + w'_e \cos\alpha)^2]}}\\
\eta'_e &= \frac{v'_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,[v'^2_e + (u'_e \sin\alpha + w'_e \cos\alpha)^2]}}\\
\zeta'_e &= \frac{P\,w'_e - Q\,u'_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\,[v'^2_e + (u'_e \sin\alpha + w'_e \cos\alpha)^2]}}
\end{aligned}
$$

Da es bekannt ist, dass die Normale der gebrochenen Welle in der Einfallsebene bleibt, so können wir zwischen den 3 Veränderlichen der Gleichungen

$$u'^2_e + v'^2_e + w'^2_e - 1$$

$$\frac{u_e}{u'_e} = \frac{v_e}{v'_e}$$

eine eliminiren, und es ist nun zu der Eliminationsgleichung

$$\frac{u_e^{\,2}}{u_e'^{\,2}} = \frac{1 - w_e^{\,2}}{1 - w_e'^{\,2}}$$

nur noch eine Gleichung zwischen u_e' und w_e' zu suchen, um die Richtung der gebrochenen Welle jederzeit unmittelbar aus der der einfallenden angeben zu können.

4. Es ist allgemein

$$\frac{W^2}{W'^2} = \frac{\sin i^2}{\sin r^2} = \frac{e^2 + (o^2 - e^2)\cos\varphi^2}{e^2 + (o^2 - e^2)\cos\varphi'^2}$$

und wenn man hier die Werthe für $\cos\varphi$ und $\cos\varphi'$ aus (5) einführt und zugleich durch e^2 oben und unten dividirt

$$\frac{\sin i^2}{\sin r^2} = \frac{1 + (q-1)(u_e^{\,2}\cos\alpha^2 + 2u_e\cos i \,.\, \sin\alpha\cos\alpha + \cos i^2 \,.\, \sin\alpha^2)}{1 + (q-1)\left(u_e^{\,2}\cos\alpha^2\frac{\sin r^2}{\sin i^2} - 2u_e\cos\alpha\sin\alpha \cdot \frac{\sin r\cos r}{\sin i} + \cos r^2\sin\alpha^2\right)}$$

multiplicirt man beiderseits mit dem Nenner von rechts, und dann noch mit $\sin r^2$ das Ganze, so erhält man nach einigen Reductionen

$$\sin r^2\,[P + 2u\cos i\,Q] + \sin 2r\,u\sin i \cdot Q - P\sin i^2 = o.$$

Setzen wir für einen Augenblick den Coëfficienten von $\sin r$ gleich $\mathfrak{a}$, den von $\sin 2r$ gleich $\mathfrak{b}$ und $-P\sin i^2 = \mathfrak{c}$, so kann r auf folgende Weise bestimmt werden:

$$\mathfrak{a}\sin r^2 + \mathfrak{b}\sin 2r + \mathfrak{c} = o$$

für $\sin r^2$ wird $\frac{1 - \cos 2r}{2}$ gesetzt

$$\mathfrak{a}\left(\frac{1 - \cos 2r}{2}\right) + \mathfrak{b}\sin 2r + \mathfrak{c} = o$$

dies geordnet:

$$\frac{\mathfrak{a}}{2}\cos 2r - \mathfrak{b}\sin 2r = \frac{\mathfrak{a}}{2} + \mathfrak{c}.$$

Setzt man nun $\frac{\mathfrak{a}}{2\mathfrak{b}} = tg\,2\beta$, folglich $\frac{2\mathfrak{b}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b}^2}} = \cos 2\beta$, so erhält man

$$\sin 2\beta \,.\, \cos 2r - \sin 2r \,.\, \cos 2\beta = \frac{\mathfrak{a} + 2\mathfrak{c}}{2\mathfrak{b}} \cdot \frac{2\mathfrak{b}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b}^2}}$$

und hieraus

$$\sin 2(\beta - r) = \frac{\mathfrak{a} + 2\mathfrak{c}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b}^2}} \qquad (18)$$

eine Formel, aus der r aus jedem gegebenen Einfallswinkel zu berechnen ist. Die Wahl zwischen den 2 jedem Sinusse entsprechenden Winkeln ist nicht schwer, wenn man bedenkt, dass die Normale der gebrochenen Welle gegen die der einfallenden immer auf die entgegengesetzte Seite des Einfallslothes zu liegen kommt.

Untersuchen wir nun mit Hülfe der Formel (18) einige specielle Fälle. Für die senkrechte Incidenz der Wellen wird $i = o$, und da $u_e^2 + v_e^2 + \cos i^2 = 1$, so muss $u = o$, $v = o$ sein, wodurch die mit den deutschen Buchstaben bezeichneten Coëfficienten diese Werthe erhalten

$$\mathfrak{a} = P, \quad \mathfrak{b} = o, \quad \mathfrak{c} = o$$

$$\frac{P}{o} = \infty = tg\, 2\beta, \text{ also } \beta = 45^0, \text{ und}$$

$$\sin 2\,(45 - r)^0 = 1$$

$$2\,(45 - r)^0 = 90^0$$

$$r = 180^0.$$

Die Welle schreitet in diesem Falle ununterbrochen, und wegen der symmetrischen Lage der beiden Individuen mit gleicher Geschwindigkeit in dem zweiten Mittel fort. Die zugehörigen Strahlen sind beide gegen dieselbe Seite des Einfallslothes um denselben Winkel gebrochen, denn setzt man in (15) $w_e = 1$, $u_e = o$, $v_e = o$, so wird

$$\xi_e = \frac{Q}{\sqrt{q^2 + (1 - q^2)\cos\alpha^2}} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\eta_e = o$$

$$\zeta_e = \frac{P}{\sqrt{q^2 + (1 - q^2)\cos\alpha^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

und dann in (17) $w'_e = -1$, $u'_e = o$, $v'_e = o$

$$\xi'_e = \frac{Q}{\sqrt{q^2 + (1 - q^2)\cos\alpha^2}} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\eta'_e = o$$

$$\zeta'_e = \frac{-P}{\sqrt{q^2 + (1 - q^2)\cos\alpha^2}} = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Die ganze Brechung beträgt demnach $-2i$, wenn i der Einfallswinkel des Strahles ist.

Die Wellen, welche senkrecht zum Hauptschnitte und zur Zwillingsebene das erste Medium durchschreiten, für welche also die Normalen mit unserer Abscissenaxe coincidiren, wird $u = \pm 1$, $v = o$, $w = o$. Es ist aber von den beiden Werthen des u_e nur einer ein solcher, der auch einem möglichen Strahle angehört, denn setzt man sie in (15), so erhält der zugehörige Strahl folgende Richtung:

$$\xi_e = \frac{\pm R}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\, sin\, \alpha^1}}$$

$$\eta_e = o$$

$$\zeta_e = \frac{\pm Q}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\, sin\, \alpha^2}}$$

Da der Cosinus des Einfallswinkels des Strahles nur positiv sein kann, Q aber für negative Krystalle negativ für positiv, positiv ist, so wird für den Kalkspath das untere, für den Quarz aber das obere Zeichen zu setzen sein. Man erhält für die Richtung der gebrochenen Welle

$$\mathfrak{a} = P, \quad \mathfrak{b} = Q, \quad \mathfrak{c} = -P$$

$$\frac{P}{2Q} = tg\, 2\beta \text{ und} = \frac{P}{\sqrt{4Q^2 + P^2}} = sin\, 2\,(\beta - r)$$

d. i. $- sin\, 2\beta = sin\, 2\,(\beta - r)$, woraus $r = arc\, tg \frac{P}{2Q}$ · Der einfallende Strahl bleibt in der Einfallsebene und seine Richtung ist

$$\xi'_e = \frac{R\, sin\, 2\beta - Q\, cos\, 2\beta}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\, cos^2\, (\alpha - 2\beta)}}$$

$$\eta'_e = o$$

$$\zeta'_e = \frac{P\, cos\, 2\beta - Q\, sin\, 2\beta}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)\, cos^2\, (a - 2\beta}}$$

Steht endlich die Welle senkrecht gegen die Ebene der YZ, so wird $u_c = o$, $v^2 + w^2 = 1$ und es ist

$$\mathfrak{a} = P, \quad \mathfrak{b} = o, \quad \mathfrak{c} = -Pv^2$$

$$\frac{P}{o} = \infty = tg\, 2\beta, \text{ folglich } \beta = 45^0$$

und

$$w^2 - v^2 = sin\, 2\,(45 - r)^0 = cos\, 2r$$

$$cos\, 2\, i = cos\, 2r$$

Die Wellen werden gar nicht gebrochen, sondern schreiten gleichförmig durch beide Mittel fort. Die Strahlen erhalten eine solche Lage als wären sie ordentlich gebrochen und von dem Hauptschnitte reflectirt, so dass die Axe der X das Einfallsloth darstellt; denn substituiren wir in (15) $u_e = o$, $v_e^2 + w_e^2 = 1$, in (17) $u = o$, $w'_e = -w_e$, $v'_e = -v_e$, so erhalten wir

$$\xi_e = \frac{Q\,w_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)(v_e^2 + w_e^2 \cos\alpha^2)}} \quad \xi'_e = \frac{Q\,w_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)(v_e^2 + w_e^2 \cos\alpha^2)}}$$

$$\eta_e = \frac{v_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)(v_e^2 + w_e^2 \cos\alpha^2)}} \quad \eta'_e = \frac{v_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)(v_e^2 + w_e^2 \cos\alpha^2)}}$$

$$\zeta_e = \frac{P\,w_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)(v_e^2 + w_e^2 \cos\alpha^2)}} \quad \zeta'_e = \frac{P\,w_e}{\sqrt{q^2 + (1-q^2)(v_e^2 + w_e^2 \cos\alpha^2)}}$$

5. Die Formel (18) genügt, um eine einzelne Welle oder einen einzelnen Strahl von einem Medium ins andere zu verfolgen. Sie wird aber unbequem und selbst unbrauchbar um der Bewegung von Wellen und Strahlencomplexen zu folgen, und es wird nothwendig sein, das involvirte r der Begleitung seiner Hülfsgrössen zu entledigen. Lösen wir zuerst den Sinus auf:

$$\sin 2(\beta - r) = a = \frac{\mathfrak{a} + 2\mathfrak{c}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b}^2}}$$

ist

$$\sin 2\beta \cos 2r - \sin r \cos 2\beta = a$$

und

$$\sin 2r^2 + 2a \sin 2\beta . \sin 2r = \sin 2\beta^2 - a^2$$

woraus

$$\sin 2r = -a \cos 2\beta \pm \sin 2\beta \sqrt{1-a^2}$$

Über das Zeichen kann vorerst nicht entschieden werden, denn es ist $\sqrt{1-a^2} = \pm \cos 2(\beta - r)$, folglich

$$\sin 2r = -\sin 2\,[(\beta - r) \mp (\pm \beta)]$$

wo die Zeichen beliebig combinirt werden können, wenn nur β dadurch aus dem zweiten Gliede verschwindet. Entwickeln wir also mit Beibehaltung des Doppelzeichens weiter, so erhalten wir

$$\sin r \cos r = -\tfrac{1}{2}\left[a \cos 2\beta \pm \sqrt{1-a^2} \sin 2\beta\right]$$

und hieraus, wenn wir quadriren, und berücksichtigen dass

$$\sin r^2 \cos r^2 = \sin r^2 - \sin r^4$$

$$\sin r^2 = \tfrac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 \sin 2\beta^2 \mp 2a \sin 2\beta \cos 2\beta . \sqrt{1-a^2} - a^2 (\cos 2\beta^2 - \sin 2\beta^2)}\right]$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist aber ein vollständiges Quadrat

$$[\cos 2\beta \sqrt{1-a^2} \mp a \sin 2\beta]^2$$

folglich

$$\sin r^2 = \tfrac{1}{2}\left[1 \pm (\cos 2\beta \sqrt{1-a^2} \mp a \sin 2\beta)\right].$$

Hier muss nun für a und β substituirt werden. Es ist

$$\cos 2\beta \sqrt{1 - a^2} = \frac{2\mathfrak{b} \sqrt{\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})}}{4\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^2}$$

und hier die Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eingeführt

$$\cos 2\beta \sqrt{1 - a^2} = \pm \frac{4\, Qu \sin i^2 \,[Qu + P \cos i]}{4\, Qu\, [Qu + P \cos i] + P^2}$$

Ebenso

$$a \sin 2\beta = \frac{(\mathfrak{a} + 2\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{a}}{4\,\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^2}$$

das ist

$$a \sin 2\beta = \frac{P \cos 2i + Qu \cos i^2 \,[Qu + P \cos i]}{u\, Qu\, [Qu + P \cos i] + P^2}$$

folglich

$$\sin r^2 = \frac{1}{2}\left[1 \pm \left(\pm \frac{4Qu \sin i^2 \,(Qu + P \cos i)}{4Qu\, [Qu + P \cos i] + P^2} \pm \frac{4Qu \cos i^2\, (Qu + P \cos i) + P^2 \cos 2i}{4Qu\, (Qu + P \cos i) + P^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 \pm \left(\frac{4Qu\, (Qu + Pw)\, (\sin i^2 \pm \cos i^2) \pm P^2 \cos 2i}{4Qu\, (Qu + Pw) + P^2}\right)\right]$$

und $$\cos r^2 = \frac{1}{2}\left[1 \mp \left(\frac{4Qu\, (Qu + Pw)\, (\sin i^2 \pm \cos i^2) \pm P^2 \cos 2i}{4Qu\, (Qu + Pw) + P^2}\right)\right]$$

Da aber über das Zeichen noch nichts entschieden ist, so kann der Ausdruck nur $= f(r)$ gesetzt werden, wo $f(r)$ das Quadrat des Sinus und Cosinus des Winkels r bezeichnet. Suchen wir nun welchen Werth $f(r)$ annimmt, wenn man der Reihe nach die Combinationen $++$, $+-$, $--$, $-+$ in die Gleichung setzt. Es ist

$$f(++) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4Qu_e\, (Qu_e + Pw_e) + P(2w_e^2 - 1)}{4Qu_e\, (Qu_e + Pw_e) + P^2}\right]$$

$$f(+-) = \frac{1 - \cos 2i}{2} = \sin i^2$$

$$f(-+) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{4Qu_e\, (Qu_e + Pw_e) + P(2w_e^2 - 1)}{4Qu_e\, (Qu_e + Pw_e) + P^2}\right]$$

$$f(--) = \frac{1 + \cos 2i}{2} = \cos i^2.$$

Es ist somit bloss noch zwischen $f(++)$ und $f(-+)$ zu entscheiden, welche dem Cosinus und welche dem Sinus entspricht. Bringen wir sie zuerst auf die einfachere Form

$$f(++) = \frac{(2Qu_e + Pw_e)^2}{4Qu_e\, (Qu_e + Pw_e) + P^2}$$

$$f(-+) = \frac{P^2\, (1 - w_e^2)}{4Qu_e\, (Qu_e + Pw_e) + P^2}$$

und substituiren wie hier die für die speciellen Fälle des vorigen Paragraphen angenommenen Werthe von u und w so finden wir für die senkrechte Incidenz

$$f(++) = 1, \; f(-+) = 0$$

für die streifende Incidenz der Normalen

$$f(++) = \frac{4Q^2u_e^{\,2}}{4Q^2u_e^{\,2} + P^2} = \cos 2\beta^2$$

$$f(-+) = \frac{P^2}{4Q^2u_e^{\,2} + P^2} = \sin 2\beta^2$$

für die auf dem Hauptschnitte senkrechte Einfallsebene der Normalen

$$f(++) = w_e^{\,2}, \; f(-+) = v_e^{\,2}$$

woraus sich ergibt dass $w'^2 = f(++)$. Mit Hülfe dieser Relation kann man nun die Gleichungen für die Richtung der Normalen der gebrochenen Wellenebene aufstellen:

$$\text{(19)} \quad \begin{aligned} u_e' &= -u_e \frac{P}{\sqrt{4Qu_e(Qu_e + Pw_e) + P^2}} \\ v_e' &= -v_e \frac{P}{\sqrt{4\,Qu_e(Qu_e + Pw_e) + P^2}} \\ w_e' &= -\frac{Pw_e + 2Qu_e}{\sqrt{4Qu_e(Qu_e + Pw_e + P^2}} \end{aligned}$$

und, wenn in (17) substituirt wird,

$$\text{(20)} \quad \begin{aligned} \xi_e' &= \frac{(2Q^2 - RP)u_e + QPw_e}{\sqrt{q^2[Qu_e(Qu_e + Pw_e) + P^2] + (1-q^2)[P^2w_e^{\,2} + (u_e P \sin\alpha + 2Q\cos\alpha] + Pw_e\cos\alpha)^2]}} \\ \eta_e' &= \frac{-Pv_e}{\sqrt{q^2[4Ru_e(Qu_e + Pw_e) + P^2] + 1 - q^2)[P^2v_e + (u_e[P\sin\alpha + 2Q\cos\alpha] + Pw_e\cos\alpha)^2]}} \\ \zeta_e' &= \frac{-P^2{}_e - QPuw_e}{\sqrt{q^2[4Qu_e(Qu_e + Pw_e) + P^2] + (1-q^2)[P^2v_e^{\,2} + (u^2 P\sin\alpha + 2P\cos\alpha] + Pw_e\cos\alpha)^2]}} \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise, wie hier die Richtung der gebrochenen Welle und des gebrochenen Strahles durch die Richtung der einfallenden Welle ausgedrückt wurde, kann sie auch mit Hülfe der Formeln des 3. Paragraphen durch die Cosinusse des einfallenden Strahles gegeben werden. Man findet, wenn der einfallende Strahl gegeben ist, für die gebrochene Welle

$$\text{(21)} \quad \begin{aligned} u_e' &= \frac{QP\,.\,\zeta_e - P^2\xi_e}{\sqrt{4qQ\zeta_e(P\xi_e - Q\zeta_e) + P^2[q^2 + (1-q^2)(\xi_e\cos\alpha + \zeta_e\sin\alpha)^2]}} \\ v_e' &= \frac{-Pq\,.\,\eta_e}{\sqrt{4qQ\zeta_e(P\xi_e - Q\zeta_e) + P^2[q^2 + (1-q^2)(\xi_e\cos\alpha + \zeta_e\sin\alpha)^2]}} \\ w_e' &= \frac{(2Q^2 - RP)\zeta_e - QP\,.\,\xi_o}{\sqrt{4qQ\,.\,\zeta_e(P\xi_e - Q\zeta_e) + P^2[q^2 + (1-q^2)(\xi_e\cos\alpha + \zeta_e\sin\alpha)^2]}} \end{aligned}$$

und für den gebrochenen Strahl

$$\xi'_e = -\frac{q(P\xi_e - 2Q\zeta_e)}{N}, \quad \eta'_e = -\frac{qP\eta_e}{N}, \quad \zeta'_e = -\frac{qP\zeta_e}{N} \qquad (22)$$

wo $N^2 = q\,\{4qQ\zeta_e(P\xi_e - Q\zeta_e) + P^2(q^2 + [1-q^2][\xi_e \cos\alpha + \zeta_e \sin\alpha]^2)\} + \{P^2 q^2 \eta_e^2 + [(2Q^2 \cos\alpha - P(R\cos\alpha - Q\sin\alpha))\zeta_e - P(P\sin\alpha + Q\cos\alpha)\xi_e]^2\}(1-q^2)$.

Aus den Relationen (18), (19), (20), (21), (22) lassen sich einige allgemeine Verhältnisse zwischen den einfallenden und gebrochenen Strahlen folgern, für welche Einzelfälle schon in den vorigen Paragraphen gefunden wurden. Wir werden einige derselben in Kürze anführen.

Suchen wir aus (22) das Verhältniss der Cosinusse der Winkel, welche der gebrochene Strahl mit den Axen der Y und Z macht, so finden wir

$$\frac{\eta'_e}{\xi'_e} = \frac{\eta_e}{\zeta_e}$$

d. i. der einfallende und gebrochene Strahl liegen mit der Axe der X immer in derselben Ebene. Während also die Ebene der ordentlichen einfallenden und gebrochenen Strahlen die Axe der Z als das Einfallsloth in sich enthält, fällt die der Z in die Ebene der ausserordentlichen Strahlen, und es kann dies Verhältniss anschaulich so aufgefasst werden, als bräche und reflectirte die auf dem Hauptschnitte und der Zwillingsebene senkrechte Coordinaten-Ebene der YZ die einfallenden Strahlen. Die (scheinbare) Reflexion beginnt bei senkrechter Incidenz, wo

$$\frac{\xi'_e}{\zeta'_e} = \frac{2Q}{-P}, \; \xi_e = o, \; \eta_e = o, \; \zeta_e = 1$$

ist, wobei der Strahl rechts oder links vom Einfallslothe abgelenkt wird, je nachdem der Zwillingskrystall negativ oder positiv ist, und hört auf, wenn der gebrochene Strahl selbst senkrecht auf der Zwillingsebene steht, d. i. für

$$P\xi_e - 2Q\zeta_r = o$$

$$\frac{\xi_e}{\zeta_e} = \frac{P}{2Q}, \; \xi'_e = o, \; \eta'_e = o, \; \zeta'_e = 1$$

Der einfallende Strahl kommt dabei von rechts oder links her, je nachdem der Krystall negativ oder positiv ist. Den intermediären Fall, wo der (scheinbare) Reflexionswinkel gleich ist dem Einfallswinkel, haben wir gefunden, als wir suchten unter welchem Winkel die Strahlen gegen das Einfallsloth geneigt sind, wenn ihre Wellen in der Richtung desselben fortschreiten.

Um zu finden, wann im zweiten Individuo Strahl und Wellennormale zusammenfallen, setzen wir

$$\frac{\xi'_o}{\eta'_o} = \frac{u'_o}{v'_o} \quad \text{und} \quad \frac{\zeta'_e}{\eta'_e} = \frac{v'_e}{w'_e}$$

substituirt man hier die entsprechenden Werthe aus (22) und (21), so erhält man

$$\frac{P\xi_e - 2Q\zeta}{P\eta_e} = -\frac{Q\zeta_e - P\xi_e}{q\eta_e}$$

und

$$\frac{\zeta_e}{\eta_e} = \frac{(2Q^2 - PR)\zeta_e - PQ\xi_e}{-Pq\eta_o}$$

welche aber beide identisch dieselbe Gleichung liefern; es ist nämlich nach beiden

$$\eta_e [q(P\xi_e - 2Q\zeta_e) + P(Q\zeta_e - P\xi_e)] = o$$

was für $\eta_e = o$ die Lösung

$$m) \ldots\ldots \frac{\xi_e}{\zeta_e} = cotg\, \alpha \, . \frac{(q-1)\sin\alpha^2 - 1}{(q-1)\sin\alpha^2 + 1}$$

gibt, woraus folgt

$$\eta'_e = o \; \frac{\zeta'_e}{\xi'_e} = - \; tg\, \alpha$$

und für $q(P\xi_e - 2Q\zeta_e) + P(Q\zeta_e - P\zeta_e) = o$

$$n) \ldots\ldots \frac{\xi_e}{\zeta_e} = tg\, \alpha \, . \frac{q + (q-1)\cos\alpha^2}{q - (q-1)\cos\alpha^2}$$

gibt, woraus wir ableiten

$$\frac{\xi'_e}{\zeta'_e} = cotg\, \alpha$$

d. i. Strahl und zugehörige Wellennormale coincidiren in der Richtung der Polaraxe, wo der einfallende Strahl die durch m) gegebene Direction besitzt, und in der Ebene des Äquators der Wellenfläche, wo die einfallenden Strahlen selbst auch in einer Ebene liegen, die durch n) bestimmt ist; die Normalen der zugehörigen Wellen fallen dabei auch in eine Ebene, deren Lage nach den gegebenen Gleichungen leicht abzuleiten ist, so dass wir nicht glauben, uns weiter dabei aufhalten zu müssen.

6. Zum Schlusse wollen wir noch den Gang der übrigen Wellen und Strahlen ins Auge fassen, die sich durch einen Zwillingskrystall fortpflanzen.

Die ausserordentliche einfallende Welle, deren ausserordentlich gebrochene Welle und Strahl wir bisher ausschliesslich betrachtet, pflanzt sich im zweiten Medio auch in solchen Schwingungen fort, die senkrecht zur Axe geschehen und daher eine Welle erregen, die als ordentlich gebrochene Componente der ausserordentlich einfallenden Welle betrachtet werden kann. Da sie nach allen Richtungen dieselbe Fortpflanzungs-Geschwindigkeit besitzt, so wird die Lage ihrer Normale (die mit dem Strahle zusammenfällt) aus der Gleichung

$$\frac{W_e^2}{W_o'^2} = \frac{\sin i^2}{\sin r^2} = \frac{1+(q-1)\cos\varphi^2}{q}$$

zu bestimmen sein. Man erhält, wenn man ähnlich wie es dies hier geschah, verfährt

$$\xi_o'^2 = u_o'^2 = \frac{\frac{q}{q-1}\,u_e^2}{\frac{q}{q-1} - \sin\varphi^2} = \frac{qu_e^2}{1+(q-1)\cos\varphi^2}$$

$$\eta_o'^2 = u_o'^2 = \frac{\frac{q}{q-1}\,v_e^3}{\frac{q}{q-1} - \sin\varphi^2} = \frac{qv_e^2}{1+(q-1)\cos\varphi^2} \tag{23}$$

$$\zeta_o'^2 = w_o' = \frac{\frac{q}{q-1}\,w_e^2 - \sin\varphi^2}{\frac{q}{q-1} - \sin\varphi^2} = \frac{qw^2-(q-1)\,(1-\cos\varphi^2}{1+(q-1)\cos\varphi^2}$$

oder, wenn die einfallenden Strahlen statt der Wellen als gegeben betrachtet werden

$$\xi_o'^2 = u_o'^2 = \frac{9\,(P\xi_e - Q\zeta_e)^2}{N}$$

$$\eta_o'^2 = v_o'^2 = \frac{q^2\eta_e^2}{N} \tag{24}$$

$$\zeta_o^2 = w_o'^2 = \frac{q\,(Q\xi_e + R\zeta)^2 + (q-1)\,[\xi_e\,(P\cos a - Q\sin a) + \zeta\, Q\cos a - R\sin a)]}{N}$$

wo $N = 1 + (q-1)\,[\xi_e(P\cos\alpha - Q\sin\alpha) - \zeta_e\,(Q\cos\alpha - R\sin)]^2$

Pflanzt sich im ersten Mittel eine ordentliche Welle fort und gelangt sie an die Trennungsfläche der beiden Individuen, so erregt sie im zweiten Mittel im Allgemeinen zwei verschiedene Wellen, deren eine (ordentliche) mit der constanten Geschwindigkeit der einfallenden durch das zweite Individuum fortschreitet und somit gar keine Brechung erleidet (es ist $W_o = \omega_o = o$); während die andere in jeder Beziehung sich verhält wie eine aus einem isotropen Mittel in ein heterotropes ausserordentlich gebrochene Welle. Die Richtung ihrer Normalen wird aus der Formel

$$\frac{W_o^2}{\omega_e'^2} = \frac{\sin i^2}{\sin r^2} = \frac{q}{1+(q-1)\left[\xi_o\sqrt{\frac{1-w_e'^2}{1-\zeta_o'^2}}\cos\alpha - w'\sin\alpha\right]^2}$$

berechnet und man findet, wenn man in bekannter Weise vorgeht, nach einigen Reductionen

$$\sin 2\,(\beta - r = \frac{2C+A}{\sqrt{A^2+4B^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{wo } A &= (q-1)\,(\xi_o^2\cos\alpha^2 - [1-\zeta_o^2]\sin\alpha^2] - q \\ B &= -\,(q-1)\;\xi_o\sqrt{1-\xi_o^2}.\ \sin\alpha\cos\alpha \\ C &= (1-\zeta_o^2)\,(1+(q-1)\sin\alpha^2) \end{aligned}$$

$$tg\ 2\beta = \frac{A}{2B}$$

Man könnte hieraus, ebenso wie es oben für den ausserordentlichen Strahl geschah die Winkelrichtungen isolirt darstellen, nur werden dabei die Zwischenrechnungen gedehnter und das Endresultat lässt sich, sonderbarer Weise, für die ausserordentlich gebrochene Componente des ordentlichen einfallenden Strahles bei weitem nicht mit der Einfachheit und Eleganz geben, wie es für dieselbe Componente des ausserordentlichen einfallenden Strahles möglich war.

Ohne uns nun weiter mit der Betrachtung der Verhältnisse der verschiedenen gebrochenen Strahlen und ihrer Oscillationsebenen unter einander, aufzuhalten, wollen wir nur noch, ehe wir zur Behandlung von Strahlen-Complexen fortschreiten, dem reflectirten Strahle einige Worte widmen. Für sie gilt die allgemeine Formel

$$\frac{W^2}{W''^2} = \frac{\sin i^2}{\sin r^1} = \frac{1+(q-1)\cos\rho^2}{1+(q-1)\cos\rho''^2}$$

ohne weiters, und dies lässt vermuthen, dass zwischen ihnen und den gebrochenen Strahlen eine gewisse einfache Beziehung stattfinden müsse. Es ist aber

$$\cos\varphi'' = u''\cos\alpha + w''\sin\alpha$$

wo w'' stets positiv, u'' dagegen immer mit dem entgegengesetzten Zeichen von u versehen ist; bei den gebrochenen Strahlen hatten wir

$$\cos\varphi' = u'\cos\alpha - w'\sin\alpha$$

wo u' und w' mit u und w entgegengesetzt bezeichnet ist; es wird somit, wenn u und w positiv angenommen wird (was an der Allgemeinheit der Betrachtung nichts ändert)

$$\begin{aligned}\cos\varphi'' &= -u''\cos\alpha + w''\sin\alpha\\ \cos\varphi' &= -u'\cos\alpha + w'\sin\alpha\end{aligned}$$

und da für beide

$$\begin{aligned}u' &= u'' = u\frac{\sin r}{\sin i}\\ w' &= w'' = \sqrt{1-\sin r^2}\end{aligned}$$

ist, so folgt nothwendig $\cos\varphi'^2 = \cos\varphi''^2$, und somit der allgemeine Satz, dass in Zwillingskrystallen des rhomboedrischen und pyramidalen Krystallsystemes für alle (ordentliche und ausserordentliche) Wellen und Strahlen der Reflexionswinkel an der Zwillingsfläche gleich ist dem Brechungswinkel; es wird daher der Reflexionswinkel nur in dem einzigen Falle dem Einfallswinkel gleich sein, wenn dieser gleich ist dem Brechungswinkel, d. i. wenn der ins zweite Medium eindringende Strahl ungebrochen fortschreitet, was bei der ordentlichen Componente des einfallenden ordentlichen Strahles eintrifft. Durch diesen und durch den im vorigen Paragraphe gegebenen Satz für die Brechung ist die Bewegung eines Lichtstrahles in einem Zwillingskrystalle anschaulich festgestellt.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1853

Band/Volume: 11

Autor(en)/Author(s): Grailich Wilhelm Josef

Artikel/Article: Bewegung des Lichtes in optisch-einaxigen Zwillingskrystallen. 817-841