

Wachsens in einem verhältnissmässig engen Raum darstellen sollen; nach meiner eben gegebenen Theorie ist die Bildung der Hirngyri im innigsten Zusammenhange mit allen Entwicklungsvorgängen der gesammten Hirnmasse.

Es wird nicht schwer fallen eine Entwicklungsgeschichte der andern Hirntheile wie jene des Linsenkerne, der *Comissuren* und dergl. zu geben; der Weg, auf welchem diese Fragen gelöst werden können, ist durch das Vorausgegangene klar vorgezeichnet.

Bewegung des Lichtes in optisch-einaxigen Zwillingkrystallen.

Von **Joseph Grailich**,

Eleven des k. k. physikalischen Seminariums.

(Mit 1 Tafel.)

II. Betrachtung eines Strahlenkegels beim Durchgange durch die Zwillingsebene.

In einer früheren Abhandlung ¹⁾ sind die Formeln entwickelt, welche den Gang eines einzelnen Strahles durch einen Zwillingkrystall darstellen; die Aufgabe, welche in der vorliegenden gelöst wird, ist die Bestimmung der Modificationen, welche ein Strahlenkegel erfährt, wenn er von dem einen Krystall-Individuo in das zweite tritt. Es genügt vollkommen, die Betrachtung auf einen Strahlenkegel zu beschränken; denn obsehon eine Linse z. B., die aus einem doppelbrechenden Krystalle geschliffen wird, im Allgemeinen einen auffallenden Lichtkegel nur in den ordentlichen Strahlen wieder kegelförmig bricht, während die ausserordentlichen die Gestalt eines Konoides 8. Grades annehmen, so ist es doch sehr leicht, jederzeit einen Kegel anzugehen, dessen Kanten den Konoidkanten parallel sind, und was nun in Bezug auf Brechung und Reflexion für diesen Kegel gilt, kann immer wieder leicht auf das Conoid zurückbezogen werden, wenn es nothwendig sein sollte. Um dies anschaulich zu machen, ist das Konoid für einen Fall berechnet worden, wo es ausserdem eine an sich höchst

¹⁾ Sitzungsberichte vom November vorigen Jahres, S. 817 ff.

interessante Gestaltung zeigt, in dem Falle nämlich, wo man es mit einer Linse zu thun hat, die ein Rotationskörper ist und deren Rotationsaxe senkrecht steht auf der optischen Axe.

Um die Veränderungen zu erfahren, die ein Kegel bei seinem Gange durch die Zwillingsebene erfährt, kann man sich zweier Methoden bedienen, deren jede unter gewissen Bedingungen bedeutende Vortheile vor der anderen bietet. Die erste beruht auf der unmittelbaren Betrachtung des Fortschrittes einer ebenen Welle längs der Trennungsebene zweier Mittel. Es wird nämlich jede Kegelkante einer Welle angehören, deren Tracen vom Ursprunge der Coordinaten in der Zeiteinheit um so weiter rücken, je mehr dieselbe gegen das Einfallslloth geneigt und je geschwinder ihre Bewegung ist.

Sämmtliche Tracen dieser Wellen werden nach dem Verlaufe einer bestimmten Zeit eine Curve umschliessen, welche ich *Isochrone* des einfallenden Kegels nenne; legt man durch diese Curve eine Berührungsfläche an das Wellenellipsoid des zweiten Individuums, und verbindet die einzelnen Punkte der Berührungcurve mit dem Ursprunge der Coordinaten, so erhält man den gebrochenen Strahlenkegel.

Die zweite Methode ist weit einfacher, setzt aber voraus, dass die Cosinuse der einfallenden und gebrochenen Strahlen als reine Functionen von einander bekannt sind, in welchem Falle das ganze Problem eine einfache Coordinatentransformation wird.

Das erste Problem, das sich zur Lösung bietet, ist das der totalen Reflexion. Die Methode der Isochronen löst dasselbe in seiner allgemeinsten Form. Der Kegel der totalen Reflexion wird nämlich gefunden, wenn man den Kegel bestimmt, dessen Isochrone diejenige Curve ist, die durch den Durchschnitt der unteren Wellenfläche mit der Trennungsebene der beiden Mittel entsteht, die Natur der beiden Mittel sei nun welche immer.

Bei den Zwillingen gibt es aber keine totale Reflexion, wohl aber einen Kegel der einfachen Reflexion und Brechung, wie dies eine einfache Construction nachweist. Es gibt also Incidenzen unter denen ein Zwillingkrystall, der regelmässig jeden einfallenden Strahl 4fach bricht, nur 3 Strahlen durch Brechung liefert, und es ist dieser Fall wohl zu unterscheiden von dem von Brewster zuerst beobachteten und in

Radiekes Optik näher beschriebenen Vorkommen, wo eine sehr dünne Zwillingsschicht sich in ein grösseres Krystall-Individuum einschiebt, und das Übereinanderfallen zweier mittlerer Bilder O und E' bewirkt, während die Bilder O' und E weiter auseinander treten, so dass bei einer Analyse mit der Turmalinzange das mittlere Bild nur schwächer und stärker wird, aber nie verschwindet, während die beiden seitlichen abwechselnd ausgelöscht werden. Bei dem hier erwähnten Falle müssen immer zwei Bilder zugleich verschwinden, oder ins Maximum der Intensität treten, wenn man sie mit der Turmalinplatte untersucht. Ob ein Krystallstück, in welchem sich eine deutliche Zwillingsebene befindet, aus zwei hemitropen Individuen oder aus einem einzigen mit Einschiebung einer ganz dünnen Zwillingsschicht bestehe, kann man am bequemsten mit Hilfe der Interferenzlinien untersuchen, welche man sieht, wenn man eine Spiritusflamme, die gelb gefärbt ist, an der dünnen Zwillingsschicht spiegeln lässt, und die nicht erscheinen, wenn zwei grössere Individuen hemitrop gelagert sind.

Der einfallende Strahlenkegel kann entweder in dem Hauptschnitte oder senkrecht darauf polarisirt sein.

I. Im ersten Falle wird er theils ungebrochen hindurchgehen, insofern nämlich die Schwingungen der ordentlichen Strahlen dies- und jenseits der Zwillingsebenen dieselben sind, theils aber wird er in ausserordentliche Strahlen gebrochen werden, und zwar finden sich hier folgende Gesetze, deren Geltung nicht allein auf Zwillingsskrystalle beschränkt ist, sondern die überhaupt zwischen einfach und einaxig doppelbrechenden Substanzen stattfinden.

a) Ist der einfallende Kegel schief und vom 2ten Grade, so ist der gebrochene ebenfalls schief, jedoch allgemein vom 4ten Grade.

b) Die Neigung der Axe des gebrochenen Kegels hängt sowohl von der Neigung der Axe des einfallenden als auch von der Öffnung des letzteren im Hauptschnitte ab, und variirt daher, sobald eines dieser beiden Elemente sich ändert.

II. In dem zweiten Falle (Polarisations-Ebene senkrecht zum Hauptschnitte) kann der gebrochene Kegel entweder im Hauptschnitte oder senkrecht dagegen schwingen. Für den ersten lassen sich folgende Gesetze ableiten:

a) Die Gleichung des gebrochenen ausserordentlichen Strahlenkegels ist stets von demselben Grade, wie die des einfallenden.

b) Wenn der einfallende Strahlenkegel von constanter Geschwindigkeit ist, geht er in einen Kegel variabler Geschwindigkeit über.

c) Wenn der einfallende Strahlenkegel gerade ist, geht er in einen schiefen Kegel über, dessen Neigung mit der Öffnung des einfallenden im Hauptschnitte variirt, und zwar innerhalb des Winkels der grössten Brechung eines einfallenden Strahles.

Ist der gebrochene Kegel im Hauptschnitte polarisirt, so gelten:

a) und b) des ersten Falles (I), wozu noch der Satz als Corollarium tritt:

c) Der gebrochene Lichtkegel kann ein Kegel des zweiten Grades werden, selbst wenn der einfallende vom 4. Grade ist.

Es folgt nun die analytische Ableitung der hier kurz zusammengefassten Sätze.

1. Ist $\frac{u}{w} = \varphi \left(\frac{v}{w} \right)$ die Gleichung des einfallenden Kegels, so erhält man die des gebrochenen, wenn man u , v , w durch die aus der allgemeinen Gleichung der Richtung eines einzelnen Strahles bekannten u' , v' , w' , (die Parameter des gebrochenen Strahles) ausdrückt; es wird sodann, wenn

$$u = f_1(u' v' w') \quad v = f_2(u' v' w') \quad w = f_3(u' v' w')$$

die Gleichung des gebrochenen Kegels

$$\frac{f_1(u' v' w')}{f_3(u' v' w')} = \varphi \frac{f_2(u' v' w')}{f_3(u' v' w')}$$

oder

$$\frac{u'}{w'} = \psi \frac{v'}{w'}$$

Dies setzt voraus, dass die Richtungs-Elemente des gebrochenen Strahles als reine entwickelte Functionen des einfallenden bekannt seien. In dem Falle, wo sie in dieser Gestalt nicht vorhanden sind, wird das zweite allgemeinere, auf der Huyghens'schen Construction beruhende Verfahren zum Ziele führen.

Verfolgt man die Wellenebenen, welche einem Strahlenkegel angehören, bei ihrem Fortschritte auf der Trennungsebene zweier Mittel, so sieht man, dass ihre Tracen nach Verlauf einer gewissen Zeit auf dieser Ebene eine Curve berühren, deren Gestalt von der Beschaffenheit des Kegels und von der Geschwindigkeit abhängt, welche die Strahlen, deren Complex die Kegelfläche ist, besitzen. Die Gleichung derselben wird nicht in allen Fällen gleich einfach sein, im Gegentheile, sie wird leicht sehr verwickelt und von höherem Grade als die des zugehörigen Kegels, wobei aber immer, wenn der Kegel vom n^{ten} , die Curve dagegen vom k^{ten} Grade ist, $k-n$ imaginäre Wurzeln vorhanden sind; k wird daher auch immer gleich $n + 2m$ sein, wo n und m ganze positive Zahlen sind. Bestimmt man die Gestalt und Gleichung dieser krummen Linie nach der Zeiteinheit, und legt sodann um diese und die Wellenfläche des zweiten Individuums eine Berührungsfläche, so liegen die Punkte der Berührungcurve dieser Fläche und der Wellenfläche auf dem Mantel eines Kegels, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Wellenfläche an der Trennungsebene der beiden Mittel fällt. Statt die Einhüllungscurve sämtlicher Wellentracen aufzusuchen, kann man sich meist mit derjenigen Gleichung begnügen, welche den geometrischen Ort sämtlicher Fusspunkte der Normalen darstellt, die aus dem Mittelpunkte auf jene gefällt werden. Bezeichnet i den Einfallswinkel der Welle, W die Geschwindigkeit derselben, ρ die Distanz um welche die Trace auf der Trennungsebene in der Zeit Eins fortrückt, so ist letztere Gleichung

$$(1) \quad \rho = \frac{W}{\sin i}$$

welche ich der Kürze halber erste Isochrone des einfallenden Wellenkegels nennen werde; die daraus abgeleitete Isochrone ist die Eingüllte sämtlicher Tracen.

Totale Reflexion. Die Aufgabe, den Kegel der totalen Reflexion zu bestimmen, kann ganz allgemein mit Hilfe der Isochronen gelöst werden, die beiden angrenzenden Medien seien von welcher Beschaffenheit immer; es folgt nämlich unmittelbar aus der Definition derselben, dass

der Kegel der totalen Reflexion gefunden wird, wenn man den Kegel bestimmt, dessen zweite Isochrone mit jener Curve congruent ist, welche durch den

Schnitt der Trennungsebene der beiden Mittel und der Wellenfläche des zweiten Mittels erhalten wird.

So hat man, wenn beide angrenzende Mittel einfach brechend sind, c die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten, c' die im zweiten bezeichnet, $c = W$, $c' = \rho$, folglich $\sin i = \frac{c}{c'}$, und als Kegel der totalen Reflexion

$$(x^2 + y^2) (c'^2 - c^2) - c^2 z^2 = 0$$

Bei den Zwillingkrystallen, wo, wie es gezeigt wurde, der Brechungswinkel gleich ist dem Reflexionswinkel, kann begreiflicher Weise totale Reflexion in dem gewöhnlichen Sinne nicht stattfinden; die Betrachtung der Isochronen zeigt dies noch deutlicher. Denn da der Schnitt des oberen und unteren Wellenellipsoides an der Zwillingfläche derselbe ist, so fällt die Eingehüllte der Isochrone des Kegels der totalen Reflexion in den Schnitt der Wellenfläche selbst und der Kegel liegt in der Zwillingsebene, und es gibt keine Reflexion ohne Brechung und keine Brechung ohne Reflexion. Dagegen wird es möglich sein, dass, falls die ordentlichen Strahlen ungebrochen und unreflectirt der Wahrnehmung entschwinden, die zugehörigen Wellen ausserordentlich gebrochene und reflectirte Strahlen liefern und umgekehrt, und die Frage der totalen Reflexion verwandelt sich in Zwillingkrystallen in die Frage nach dem Grenzkegel der einfachen Brechung und Zurückwerfung.

Grenzkegel der einfachen ordentlichen Brechung und Reflexion. Die Gleichung der Wellenfläche des zweiten Individuums gibt für $z = 0$

$$\frac{1}{c^2} (x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{c^2} \right) x^2 \cos \alpha^2 = 1$$

oder, wenn wir wieder

$$P = 1 + (q-1) \sin \alpha^2$$

$$Q = (q-1) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$R = 1 + (q-1) \cos \alpha^2$$

$$q = \frac{o^2}{c^2}, \quad \alpha = \text{Neigungswinkel der optischen}$$

Axe gegen ihre Projection in der Zwillingsebene, setzen

$$\frac{P}{o^2} x^2 + \frac{q}{o^2} y^2 = 1 \quad (2)$$

die Tangente daran ist

$$\frac{P}{o^2} \cdot x x' + \frac{q}{o^2} y y' = 1$$

die Normale auf diese

$$\frac{x'}{y'} = \frac{P x}{q y}$$

und durch Elimination von x und y aus diesen 3 Gleichungen

$$x'^2 \frac{o^2}{P} + y'^2 \cdot e^2 = (x'^2 + y'^2)^2$$

die Curve, welche sich zum Schnitte (2) verhält wie die Elasticitätsfläche zur Wellenfläche. Setzt man hier $x' = \rho \cos \lambda$, $y' = \rho \sin \lambda$, so erhält man

$$\rho^2 = \frac{o^2}{P} \cdot \cos \lambda^2 + e^2 \sin \lambda^2$$

und setzt man dies in die allgemeine Gleichung der Isochrone, wo $W = o$ ist, so findet man für den gesuchten Kegel die Gleichung

$$\sin i^2 = \frac{P q}{q \cos \lambda^2 + P \sin \lambda^2} = \frac{P q}{q + (P - q) \sin \lambda^2}.$$

Es ist ein gerader elliptischer Kegel, dessen Öffnung im Hauptschnitte und senkrecht darauf durch die beiden Relationen

$$\sin i^2 = P$$

$$\lambda = o$$

$$\sin i^2 = q$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2}$$

gegeben ist; man sieht hieraus, dass derselbe nur in solchen Krystallen vorkommen kann, wo $q < 1$, also $o < e$, in negativen Krystallen.

Grenzkegel der einfachen ausserordentlichen Brechung und Reflexion. Damit die einfallenden ausserordentlichen Wellen keine ausserordentliche Brechung erleiden, ist nothwendig, dass ihre Traecen auf der Zwillingssebene den Kreis berühren, welcher durch den Schnitt der ordentlichen Wellenfläche (Kugel) des zweiten Individuums mit dieser Ebene entsteht. Es ist also $\rho = o$; und da die Geschwindigkeit $W^2 = e^2 + (o^2 - e^2) (u \cos \alpha + w \sin \alpha)^2$ variabel ist, so erhält man zur Ableitung dieses Kegels durch Substitution in (1)

$$(3) \quad o^2 \sin i^2 = e^2 + (o^2 - e^2) (u \cos \alpha + w \sin \alpha)^2.$$

Es ist ein schiefer Kegel, dessen Constanten am leichtesten zu berechnen sein werden, wenn wir für die Polarcoordinaten Punkt-

coordinaten einführen. Da dasselbe Verfahren noch öfter wiederkehren wird, so schicken wir die Transformations-Formeln voraus, in welchen u, v, w die Cosinuse der Wellennormale, λ das Azimuth, i den Einfallswinkel bezeichnen; es ist

$$\begin{aligned} u &= \cos \lambda \sin i; & w &= \cos i; & \cos \lambda^2 &= \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \sin \lambda^2 &= \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ \sin i^2 &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}; & u^2 &= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}; & v^2 &= \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}; \\ w^2 &= \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Man erhält sonach die Gleichung des Kegels

$$x^2 \sin \alpha^2 + y^2 - z^2 \left(\frac{1}{q-1} + \sin \alpha^2 \right) - 2xz \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

dessen Constanten aus den Relationen

$$\operatorname{tg} \psi_2^2 (\operatorname{ctg} \psi_1^2 \cos \beta^2 - \sin \beta^2) = \sin \alpha^2$$

$$\operatorname{tg} \psi_2^2 (\operatorname{ctg} \psi_1^2 \sin \beta^2 - \cos \beta^2) = - \left(\frac{1}{q-1} + \sin \alpha^2 \right)$$

$$\operatorname{tg} \psi_2^2 (\operatorname{ctg} \psi_1^2 + 1) \sin \beta \cos \beta = \sin \alpha \cos \alpha$$

abgeleitet werden, wo β die Neigung der Kegelaxe gegen die Axe der Z , ψ_1 die Öffnung des Kegels im Hauptschnitte, ψ_2 die Öffnung des Kegels senkrecht dagegen bedeutet. Da wir stets solche Kegel behandeln werden, deren Axe in dem Hauptschnitte liegt, so geben die Werthe von ψ_1 und ψ_2 unter einem sogleich die Maxima und Minima der Kegelöffnung und das Verhältniss ihrer Tangenten ist das Axenverhältniss der Grund-Ellipse, um welche der Kegel sich construirt. Aus den angeführten Gleichungen erhält man

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2(q-1) \sin \alpha \cos \alpha}{1+2(q-1) \sin \alpha^2}$$

der Kegel ist folglich immer schief, denn für $(q-1) = 0$ hört der Krystall auf doppeltbrechend zu sein und für $\alpha = 0 = \frac{\pi}{2}$ ist er vom optischen Gesichtspunkte aus kein Zwilling mehr. Die Öffnung im Hauptschnitte ist

$$\operatorname{tang} \psi_1 = - \frac{1 - \sqrt{1 + 4q(q-1) \sin \alpha^2}}{1 + \sqrt{1 + 4q(q-1) \sin \alpha^2}}$$

die senkrecht darauf

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4q(q-1) \sin \alpha^2}}{\sqrt{(q-1) [(1 - \sqrt{1 + 4q(q-1) \sin \alpha^2})^2 - (1 + \sqrt{1 + 4q(q-1) \sin \alpha^2})^2]}}$$

und das Verhältniss der Axen der Leitlinie

$$\frac{b^2}{a^2} = - (q-1) \left[\left(\frac{1 - \sqrt{1+4q(q-1)\sin^2\alpha}}{1 + \sqrt{1+4q(q-1)\sin^2\alpha}} \right)^2 - 1 \right]$$

folglich kann dieser Kegel nur bei positiven Krystallen vorkommen. Sowohl der Kegel 2 als auch 3 wird durch die Normalen der Wellen gebildet; will man die Lage der zugehörigen Strahlen wissen, so genügt eine einfache Operation. Da jeder Kegel, dessen Spitze im Ursprung der Coordinaten liegt, von der Form $\frac{x}{\alpha} = \varphi \left(\frac{y}{\alpha} \right)$ ist und die Formeln gegeben wurden, mittelst deren der Zusammenhang zwischen Wellenfläche und Elasticitätsfläche hergestellt werden kann, und überall die Quotienten zweier Coordinaten der einen, lineare Functionen der entsprechenden Quotienten der an deren Fläche sind, so folgt dass Wellennormalen und zugehörige Strahlen stets Flächen desselben Grades geben. Im Kegel 2. fallen Normale und Strahlen zusammen, und es gelten daher die dort gegebenen Abmessungen auch für die Strahlenkegel; im Kegel 3. dagegen, dessen Kanten durch ausserordentlich gebrochene Strahlen gebildet werden, ist dies nicht der Fall, und sein zugehöriger Strahlenkegel ist

$$(5) \quad x^2[(q-1)(P^2 - [P \cos \alpha - Q \sin \alpha]^2) - Q^2] + y^2(q-1)q^2 + z^2[(q-1)(Q^2 - [Q \cos \alpha - R \sin \alpha]^2) - R^2] - 2xz\{(q-1)[QP - (P \cos \alpha - Q \sin \alpha)(Q \cos \alpha - R \sin \alpha)] - QR\} = 0.$$

Seine Mittellinie liegt in der xz Ebene, und ihre Neigung gegen z ist

$$\operatorname{tg} 2\beta = 2 \frac{(q-1)[PQ - (P \cos \alpha - Q \sin \alpha)(Q \cos \alpha - R \sin \alpha)] - 2QR}{(q-1)[(Q^2 - P^2) - (Q \cos \alpha - R \sin \alpha)^2 + (P \cos \alpha - Q \sin \alpha)^2] + (Q^2 - R^2)}$$

und die Grenzwerte der Kantenöffnung

$$\operatorname{tg} \psi_1 = - \frac{A \sin \beta^2 - 2D \sin \beta \cos \beta + C \cos \beta^2}{A \cos \beta^2 + 2D \sin \beta \cos \beta + C \sin \beta^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{A \sin \beta^2 - 2D \sin \beta \cos \beta + C \cos \beta^2}{B}$$

wenn A, B, C, D die Coefficienten der Gleichung 5. darstellen.

Für verschiedene Zwillinge nehmen die hier gefundenen Kegel verschiedene Lagen und Dimensionen an; die Grenzen aller möglichen Lagen und Dimensionen sind durch die Grenzwerte von α gegeben, innerhalb welcher überhaupt Zwillingsgestalten möglich sind.

Beim Kegel 2 hat man

für $\alpha = 0^\circ$; $\sin i_0 = 1$, $i = 90^\circ$; $\sin i_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{q}$: das ist, der Kegel geht in eine Rinne, über deren Kante in der Axe der x liegt und deren Ebenen einen Winkel $2 \text{arc.} \sin \sqrt{q}$ einschliessen.

für $\alpha = 90^\circ$; $\sin i_0^2 = q$, $\sin i_{\frac{\pi}{2}}^2 = q$: das ist, ein Kreiskegel von der Öffnung $2 \text{arc.} \sin q$.

Sämmtliche in Zwillingen des rhomboedrigen und pyramidalen Systemes vorkommende Grenzkegel der einfachen ordentlichen Brechung und Reflexion liegen ihren Dimensionen nach zwischen einem geraden Kreiskegel und einer in der Projection der optischen Axe laufenden Rinne, welche jenen Kreiskegel berührt.

Beim Kegel 3 hat man ebenso

für $\alpha = 0$: $\sin i_0^2 = 1$, $\sin i_{\frac{\pi}{2}}^2 = \frac{1}{q}$; eine ähnliche Rinne wie beim ersten, der Winkel der beiden Ebenen ist $\text{arc.} \sin 2\frac{e}{o}$;

für $\alpha = 90^\circ$: $\sin i_0^2 = \sin i_{\frac{\pi}{2}}^2 = \frac{q}{2q-1}$; ein gerader Kreiskegel von der Kantenöffnung $\text{arc.} \sin \frac{2o}{\sqrt{2o^2 - e^2}}$.

Für den Strahlenkegel sind natürlich die Grenzen dieselben. Die beiden Kegel 2 und 3 lassen sich noch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten. Sie bezeichnen nämlich die Lage jener Einfallswinkel, jenseits welcher nur einfache Brechung und Reflexion stattfindet, und zwar unter Verschwinden der ungleichnamig polarisirten Wellen. Betrachten wir, um dies deutlicher zu machen, einen negativen Krystall, und in diesem einen ausserordentlich polarisirten Strahl, so wird dieser unter jeder Incidenz eine doppelt gebrochene und reflectirte Welle liefern, und es wird der ausserordentliche Strahl immer mehr vom Einfallslot zurückweichen, bis seine Ablenkung endlich unter einer Incidenz, die nahezu streifend ist, nahezu 90° betragen wird; dann wird nur noch die ordentlich gebrochene und reflectirte Welle deutlich abgelenkte Strahlen liefern, und die Grenze, welcher sich diese unendlich nähern, ist der Kegel 2; sie werden diese Grenze weder erreichen noch überschreiten, weil schon im ersten Falle eine solche Incidenz vorausgesetzt wird, bei der der einfallende Strahl die Zwillingsebene gar nicht trifft, sondern längs derselben fortschreitet. — Betrachten wir dagegen

einen ordentlichen Strahl, so wird dieser bis auf eine gewisse Incidenz hin doppelt gebrochen und reflectirt, wobei der ausserordentliche Strahl der Trennungsebene immer näher rückt, bis er endlich für einen Einfallswinkel, der durch den Kegel 2 gegeben ist, gänzlich verschwindet; für alle grösseren Einfallswinkel wird er fortan nur noch ordentlich gebrochen und reflectirt (eigentlich schreitet er dann nur einfach durch den Zwilling hindurch). Bei positiven Krystallen, in denen die ordentlichen Wellen mehr abgelenkt werden als die ausserordentlichen, bezeichnet der Kegel 3 die Grenze, jenseits welcher die einfallenden extraordinären Strahlen nur noch ausserordentlich gebrochen und reflectirt werden können.

Es folgt nun die numerische Angabe der Constanten der verschiedenen Grenzkegel an den bisher beobachteten Zwillingen des Kalkspathes.

Tafel der Grenzkegel der einfachen Brechung und Reflexion.

Name des Minerals.	Zwillingsebene	Neigung derselben gegen die optische Axe	Neigung der Kegelaxe gegen das Einfallslot	Öffnung des Kegels $\frac{a^2}{b^2}$		Axenverhältniss der Leitellipse, Kegelhöhe = 1
				im Hauptschnitt	senkrecht zum Hauptschnitt	
Kalkspath	$R - \infty$	90°	0°	$126^\circ 32' 14''$	$126^\circ 32' 14''$	1
$R = 103^\circ 5'$	$R - 1$	$63^\circ 44' 45''$	0°	$132^\circ 48' 40''$	$126^\circ 32' 14''$	1.309
$\omega = 1.66360$	}	R	0°	$142^\circ 36' 40''$	$126^\circ 32' 14''$	2.225
$\varepsilon = 1.48868$						
f. d. Strahl	$R + 1$	$43^\circ 23' 26''$	0°	$156^\circ 21' 50''$	$126^\circ 32' 14''$	5.887
	senkr.					
	RR	$26^\circ 15' 14''$	0°	$157^\circ 13' 28''$	$126^\circ 32' 14''$	6.162
	$R + \infty$	0°	0°	$180^\circ 0' 0''$	$126^\circ 32' 14''$	∞

Im Allgemeinen treten für jeden einfallenden Strahl 4 Strahlen aus einem Zwillingkrystalle; nur dann, wenn die Einfallsebene parallel ist zum Hauptschnitte, werden an der Zwillingsebene die eingetretenen Strahlen nicht weiter zerlegt (der ordentliche selbst auch nicht gebrochen), und es treten nur zwei Strahlen aus dem Krystalle, beide in der Einfallsebene. Die Existenz der Grenzkegel macht es nun auch möglich, dass von den 4 austretenden Strahlen der eine ausbleibt, und eine eintretende Welle verdreifacht den Zwilling verlässt.

Um zu erfahren, wann dies beim Kalkspathe eintritt, ist erstens die Lage einer Ebene anzugeben, welche das Krystallmedium von der Luft trennt, und bei der die Strahlen noch unter dem verlangten Winkel eintreten können (denn in den meisten Fällen wird wegen

der grösseren Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft die Totalreflexion zwischen Kalkspath und Luft hindernd dazwischen treten); zweitens das Azimuth, oder diejenige Folge von Azimuthen, unter denen die verlangte Erscheinung möglich ist. Fig. 2 ¹⁾ stellt einen Fall dar, wo der Eintritt eines solchen Strahles möglich, Fig. 3, wo derselbe unmöglich ist.

Verwandeln wir die Polargleichung 2 in eine andere, wo die Variablen die Cosinusse ξ η ζ der Kegelkanten seien, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Relationen 4 und der Proportion

$$\xi : \eta : \zeta = x : y : z$$

für den Kegel die Gleichung

$$\xi^2 \frac{p-1}{p} + \eta^2 \frac{q-1}{q} + \zeta^2 = 0.$$

Die Krystallebene, welche das doppelbrechende Medium gegen die Luft abgrenzt, werde nun, um überflüssige Allgemeinheiten zu ersparen, senkrecht gegen den Hauptschnitt angenommen, und sie habe gegen die Zwillingsebene die Neigung χ . Da die Brechung am Übergange aus der Luft in den Krystall betrachtet werden soll, wird es gut sein, die Gleichung des Kegels auf diese Ebene zu beziehen; dies geschieht einfach, indem wir dieselbe so transformiren, dass die Axe der z um den Winkel χ verschoben wird; man erhält dadurch eine neue Gleichung

$$\xi^2 \left(1 - \frac{1}{p} \cos^2 \chi\right) + 2\xi\zeta \frac{\sin \chi \cdot \cos \chi}{p} + \zeta^2 \left(1 - \frac{1}{p} \sin^2 \chi\right) + \eta^2 \frac{q-1}{q} = 0$$

Nun hängt aber für die ordentlich gebrochenen Strahlen die Bewegung des Lichtes in der Luft und im Krystalle durch einfache Relationen zusammen; leitet man nämlich aus der Bedingung des constanten Brechungscoefficienten, also aus der Gleichung

$$\frac{1-\xi'^2}{1-\xi^2} = \omega^2$$

(wenn die bestrichelten Buchstaben die Cosinusse des aus der Luft einfallenden und ω den Brechungscoefficienten bezeichnen), ferner aus der Übereinstimmung der Einfallsebene und Brechungsebene

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\xi'}{\eta'}$$

¹⁾ Fig. 1 gehört zu dem Aufsätze im Novemberhefte der Sitzungsberichte von 1853, S. 817.

und aus der allgemeinen Cosinusgleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ die Werthe von ξ' η' ζ' als Function von ξ η ζ ab, so erhält man

$$\xi^2 = \xi'^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \frac{(1 - \xi'^2)}{\xi'^2 + \eta'^2} = \frac{\xi'^2}{\omega^2}$$

$$\eta^2 = \eta'^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \frac{(1 - \xi'^2)}{\xi'^2 + \eta'^2} = \frac{\eta'^2}{\omega^2}$$

$$\zeta^2 = 1 - \frac{1}{\omega^2} (1 - \xi'^2),$$

und dies in der obigen Gleichung substituirt, gibt

$$\xi'^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \chi}{P}\right) + 2 \xi' \sqrt{\omega^2 - (1 - \xi'^2)} \frac{\sin \chi \cos \chi}{P} + (\omega^2 - [1 - \xi'^2]) \left(1 - \frac{\sin^2 \chi}{P}\right) + \frac{q-1}{q} \eta'^2 = 0.$$

Es wird daher darauf zu achten sein, ob dieser Kegel, oder der ihm identische

$$\sin i^2 \left[\left(\cos \chi^2 - \frac{P}{q} \right) \sin \lambda^2 - \cos 2\chi \right] + \sin i \cos \lambda \sqrt{\omega^2 - \sin^2 i^2} \sin 2\chi + \omega^2 (P - \sin \chi^2) = 0$$

möglich wird. Für $\chi = 0$, d. i. wenn die Krystallebene parallel der Zwillingsene wird, erhalten wir $\sin i = \omega \sqrt{\frac{Pq}{q - (q - P) \sin^2 \lambda^2}}$
 $= \omega \sqrt{\frac{Pq}{q \cos^2 \lambda^2 + P \sin^2 \lambda^2}}$. Dies ist nur möglich unter der Bedingung:

$$\sin \lambda^2 > \frac{q}{P - q} (P\omega^2 - 1)$$

dies aber ist unter keiner Annahme möglich; folglich darf χ auch nicht gleich Null werden. Für $\chi = 90^\circ$, wenn also die Krystallfläche senkrecht steht auf der Zwillingsene, wird $\sin i = \omega \sqrt{\frac{1 - P}{1 - P \sin^2 \lambda^2}}$. Dies wird möglich unter der Bedingung $\sin \lambda^2 < \frac{q(1 - [1 - P]\omega^2)}{P}$, was wieder die Möglichkeit von $1 - \frac{1}{\omega^2} < P$ postulirt; da aber bei allen Zwillingen $P > 0.63867$ ist, so ist die Statthaftigkeit dieser Annahme nachgewiesen. Es werden also auch zwischen $\chi = 0$ und $\chi = 90^\circ$ intermediäre Lagen möglich sein; die allgemeine Auflösung der Gleichung wird zu complicirt und es genügt gezeigt zu haben, dass das Austreten von 3 Strahlen aus einem Kalkspathkrystalle für einen einzigen eintretenden allerdings möglich sei.

2. Wird eine Linse aus einer doppelbrechenden (einaxigen) Substanz geschliffen, und hat dieselbe, wie es wohl in der Regel geschieht, und wie wir hier der Kürze halber supponiren wollen, die Gestalt eines Rotationskörpers, so werden die auffallenden Strahlen im Allgemeinen nicht als Kegel in dieselbe gebrochen; sie nehmen vielmehr die Gestalt eines Konoides an, das auf die Gleichung

$$z = (\rho \pm \sqrt{x^2 + y^2}) f \left(\text{arc. tg } \frac{y}{x} \right)$$

gebracht werden kann, und wo ρ einen beliebigen constanten oder variablen Radiusvector darstellt. Die Ableitung und Discussion dieser Gleichung muss auf eine spätere Gelegenheit aufgespart werden; ebenso der Beweis, dass es immer einen Kegel gibt, dessen Kanten in jedem Azimute den Kanten des Konoides parallel sind, und dessen Gleichung leicht aus der des Konoides abgeleitet werden kann, indem derselbe durch

$$z = \frac{\rho \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{\rho}$$

dargestellt wird; oder wenn für z gesetzt wird $z+1$, durch

$$z^2 \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Man kann daher immer annehmen, dass ein auf eine Linse der erwähnten Art einfallender Strahlenkegel in derselben in eine solche Gestalt übergeht, welche für manche Fälle der Berechnung ohne weiters durch einen Kegel substituirt werden kann; die folgende Untersuchung setzt dies wirklich voraus, indem sie sich begnügt die Modification anzugeben, welche ein an die Zwillingsebene gelangter ordentlicher oder ausserordentlicher Strahlenkegel erfährt bei seinem Übergange in das zweite Individuum, indem wir die Reduction dieser Kegel auf die entsprechenden Konoide in jenem Abschnitte durchführen werden, der von den Linsen aus Zwillingkrystallen handelt. Hier wird es genügen, ein solches Konoid, das eine interessante Gleichung besitzt, etwas näher zu betrachten, und sodann zur allgemeinen Discussion der Strahlen des Wellenkegels zu schreiten.

Es sei Fig. 4 der Durchschnitt einer Linse aus einem doppelbrechenden Krystalle, TB die Rotationsaxe der Linse und senkrecht gegen diese in der Richtung MT die optische Axe des Krystalles.

Betrachten wir nun einen Kegel von convergirenden auffallenden Strahlen. SS , und es bilde die Tangente BB mit der Rotationsaxe

den Winkel $\theta = RBT$, der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe den Winkel i . Führt man nun die Huyghens'sche Construction um den Punkt M aus (indem man die relative Länge der dabei vorkommenden Radien so wählt, dass, wenn c , o , e die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft, parallel und senkrecht gegen die Axe des Krystalles bezeichnet,

$$KM : PM : EM = c : o : e$$

gemacht wird), so erhält man beiderseits zwei Wellennormalen Mo und Me , die sich in der Rotationsaxe der Linse schneiden; für jeden Punkt des Kreises auf der Oberfläche der Linse, der mit dem Halbmesser $TM = r$ beschrieben wird, bleibt To constant, Te aber variirt, je nachdem die Tangente RB bei ihrer Rotation um B verschiedene Azimuthe durchwandert, indem dabei der auffallende Strahl seine Lage gegen die optischen Constanten verändert und anderen brechenden Kräften begegnet; das Maximum seiner Ablenkung liegt im Hauptschnitte oder senkrecht darauf, je nachdem der Krystall ein negativer oder positiver ist, und zwar kömmt es zweimal vor in einer Azimuthdifferenz von 180° ; das Minimum liegt ebenso in der gegen den Maximumschnitt um 90° verwendeten Ebene.

Wenn i die einfallenden, r die gebrochene Wellennormale bezeichnet, so haben wir allgemein

$$\frac{\sin r^2}{\sin i^2} = \frac{e^2 + (o^2 - e^2) \cos \varphi^2}{e^2}$$

und da die optische Axe mit den Coordinaten-Axen die Winkel einschliesst, deren Cosinuse = 1, 0, 0 sind, und die Normale der gebrochenen das Azimuthe der Normale der einfallenden Welle besitzt, so ist

$$\cos \varphi = \cos \lambda \sin r$$

und somit

$$\sin r^2 = \frac{e^2 \sin i^2}{e^2 - (o^2 - e^2) \cos \lambda^2 \sin i^2}$$

und wenn man $\frac{e}{c} = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon'$, $\frac{o}{c} = \frac{1}{\omega} = \omega'$ setzt (wo also ε

und ω die Brechungscoefficienten des ausserordentlichen und ordentlichen Strahles sind), und zugleich durch $\sin i^2$ dividirt, so erhält man

$$\sin r^2 = \frac{\varepsilon'^2}{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) \cos \lambda^2 + \cos \varepsilon c i^2}$$

Das Konoid der Wellennormalen wird erhalten, wenn der geometrische Ort derselben für jedes Azimuth des einfallenden Strahles bestimmt wird. Ist in Fig 5 ψ der Neigungswinkel der Normale irgend einer gebrochenen Welle, so ist für einen Punkt M auf der Oberfläche des Konoides $MP = PQ \operatorname{tg} \psi$ und $QP = r - \sqrt{x^2 + y^2}$, folglich

$$z = (r - \sqrt{x^2 + y^2}) \operatorname{tg} \psi \quad (5)$$

$$\text{und da } \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin(\theta + \tau)}{\cos(\theta + \tau)} = \frac{\operatorname{tg} \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) \cos^2 \lambda^2 - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2)} + \varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) \cos^2 \lambda^2 - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2)} - \varepsilon' \operatorname{tg} \theta} \quad (6)$$

wo noch für $\cos^2 \lambda^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ zu substituiren ist; so wird die Gleichung des Conoides

$$z = (r - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\operatorname{tg} \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) x^2 - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) (x^2 + y^2)} + \varepsilon' \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) x^2 - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) (x^2 + y^2)} - \varepsilon' \operatorname{tg} \theta \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (7)$$

Diese Gleichung soll nun, ihrer interessanten Eigenschaften wegen, näher betrachtet werden.

Setzt man $\varepsilon' = \omega'$, d. i. untersucht man ihre Gestalt für die ordentlich gebrochenen Wellen, so wird der zweite Factor des zweiten Theiles constant gleich

$$\frac{\operatorname{tg} \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 + \omega'}}{\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 - \omega' \operatorname{tg} \theta}} = K$$

und das Konoid verwandelt sich in einen Kegel

$$z = K (r - \sqrt{x^2 + y^2})$$

dessen Axe in die Rotationsaxe der Linse fällt, dessen Basis der Kreis $r^2 = x^2 + y^2$ und dessen Spitze in der Höhe Kr über der Ebene dieses Kreises liegt.

Wird das Konoid durch Ebenen geschnitten, die die Axe der z in sich enthalten, so erhält man immer ein System zweier Geraden, die sich in der Z -Axe unter gleichem Winkel gegen diese schneiden, ihre Neigung gegen die Basis ist ψ und da ψ eine periodische Function von $\cos^2 \lambda^2$ ist, so folgt, dass es zwei Maximum- und zwei Minimumwerthe für vier um je 90° von einander verschiedene λ haben werde, während ausserdem jedes andere ψ viermal wiederkehren wird für $\lambda = \pm \lambda'$ und $= 180 \pm \lambda'$. Dies liegt schon klar in den Bedingungen, nach welchen die krumme Fläche construirt wurde.

Nicht so einfach sind die Schnitte, welche durch horizontale (d. i. zur Axe der Z senkrechte) Ebenen erzeugt werden. $Z = 0$

gibt $r^2 = x^2 + y^2$, den Grundkreis; aber jedes andere z führt zu Gleichungen höheren Grades; man hat für ein bestimmtes $z = z'$

$$(8) \quad r - z' \operatorname{ctg} \psi = \rho$$

wo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ gesetzt ist. Um zu erfahren, wo die grössten und kleinsten Werthe von ρ liegen, substituiren wir $\operatorname{tg} \psi$ den Werth aus (6) und differenziren ρ nach λ ; man findet

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = \frac{\varepsilon' z' \sec \theta^2 (\varepsilon'^2 \omega'^2) \cos \lambda \sin \lambda}{\left[\varepsilon' + \operatorname{tg} \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) \cos \lambda^2 - (\varepsilon'^2 - \cos \theta \varepsilon \theta^2)} \right]^2 \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2) \cos \lambda^2 - (\varepsilon'^2 - \cos \theta \varepsilon \theta^2)}}$$

dies wird Null im Azimuth Null, 90° , 180° , 270° ; ρ hat also allgemein die vier Grenzwerte für diese λ ; setzt man dieselben in die Formel $\operatorname{tg} \psi$, so kann man daraus sogleich die Grösse der Radienvectoren für alle in der XZ und YZ -Ebene liegenden Punkte der Curven berechnen. Man erhält

$$(9) \quad \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0} = \frac{\operatorname{tg} \theta \sqrt{\cos \theta \varepsilon \theta^2 - \omega'^2} + \varepsilon'}{\sqrt{\cos \theta \varepsilon \theta^2 - \omega'^2 - \varepsilon' \operatorname{tg} \theta}}$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\lambda=\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \theta \sqrt{\cos \theta \varepsilon \theta^2 - \varepsilon'^2} + \varepsilon'}{\sqrt{\cos \theta \varepsilon \theta^2 - \varepsilon'^2 - \varepsilon' \operatorname{tg} \theta}}$$

Für diese Azimuthe werden übrigens nicht immer 2 der speciellen ρ ein Maximum, und 2 andere ein Minimum repräsentiren; es gibt eine gewisse Zone in dem Konoide, wo alle vier durch 9 gegebenen Radienvectoren Maxima sind. Diese Zone wird gefunden, wenn man in 8 $\rho = 0$ setzt, und hieraus z' bestimmt; man erhält, wenn man diese speciellen z' durch Z bezeichnet

$$Z = r \operatorname{tg} \psi$$

Z wächst stätig mit $\operatorname{tg} \psi$, und da dies (bei negativen Krystallen) von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \frac{\pi}{2}$ selbst stätig abnimmt und dann wieder wächst ohne negativ zu werden, so ist die Zone eingeschlossen zwischen

$$Z_1 = r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0} \quad \text{und} \quad Z_2 = r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=\frac{\pi}{2}}$$

und die Radienvectoren der zwischen diesen Grenzen liegenden Schnitte des Konoides werden im Allgemeinen in 4 symmetrisch gegen die X und Y -Axen liegenden Azimuthe gleich Null werden; diese Azimuthe werden sämmtlich zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = 90^\circ$ fallen, da für diese die Maximumwerthe von 9 stattfinden, und die Curven werden innerhalb Z_1 und Z_2 zwei senkrecht gegeneinander gestellten Schleifen gleichen. Betrachten wir ihre Gestalt näher.

Für $Z = Z_1$ wird

$$\rho = r \left(1 - \frac{tg \psi_{\lambda=0}}{tg \psi} \right)$$

Das Minimum liegt im Azimuth $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$; dann wird $tg \psi = tg \psi_{\lambda=0}$ und $\rho = 0$; das Maximum dagegen im Azimuth $\frac{\pi}{2}$, dann wird $tg \psi = tg \psi_{\lambda=\frac{\pi}{2}}$ und

$$\rho = r \left(1 - \frac{(tg \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 + \varepsilon'}) (\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2 - \varepsilon' tg \theta})}{(\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 - \varepsilon' tg \theta}) (tg \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2 + \varepsilon'})} \right)$$

Die Curve ist eine einfache Schlinge, Fig. 6, III.

Für $Z = r tg \psi_{\lambda=30}$ wird

$$\rho = r \left(1 - \frac{tg \psi_{\lambda=30}}{tg \psi} \right)$$

Diese Curve hat 4 Minima und eben so viele Maxima; die Minima liegen in den Azimuthen $\lambda = \pm 30^\circ$ und $\lambda = 180 \pm 30^\circ$, und in denselben ist $\rho = 0$. Die Maxima dagegen, welche in den Coordinaten-Axen liegen, sind

$$\rho_{\lambda=0} = \pm r \left[1 - \frac{(\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 - \varepsilon' tg \theta}) (tg \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{3}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) + \varepsilon'})}{(\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 + \varepsilon'}) (\sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{3}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) - \varepsilon' tg \theta})} \right]$$

$$\rho_{\lambda=\frac{\pi}{2}} = \pm r \left[1 + \frac{(\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2 - \varepsilon' tg \theta}) (tg \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{3}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) + \varepsilon'})}{(\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2 + \varepsilon'}) (\sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{3}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) - \varepsilon' tg \theta})} \right]$$

Es sind zwei Schlingen, die senkrecht gegen einander gekehrt sind, und von denen die eine, deren Axe in die YZ-Ebene fällt, wegen $\rho_{\lambda=\frac{\pi}{2}} > \rho_{\lambda=0}$ grösser ist, als die deren Axe in der XZ-Ebene Fig. 6, IV.

Für $Z = r tg \psi_{\lambda=60}$ wird

$$\rho = r \left(1 - \frac{tg \psi_{\lambda=60}}{tg \psi} \right)$$

und die 4 Minima fallen in die Azimuthe $\lambda = \pm 60^\circ$ und $\lambda = 180^\circ \pm 60^\circ$; in denselben ist $\rho = 0$. Die vier Maxima sind

$$\rho_{\lambda=0} = \pm r \left[1 - \frac{(\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 - \varepsilon' tg \theta}) (tg \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{1}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) + \varepsilon'})}{(\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 + \varepsilon'}) (\sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{1}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) - \varepsilon' tg \theta})} \right]$$

$$\rho_{\lambda=\frac{\pi}{2}} = \pm r \left[1 - \frac{(\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2 - \varepsilon' tg \theta}) (tg \theta \sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{1}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) + \varepsilon'})}{(\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2 + \varepsilon'}) (\sqrt{(\varepsilon'^2 - \omega'^2)^{\frac{1}{4}} - (\varepsilon'^2 - \cos ec i^2) - \varepsilon' tg \theta})} \right]$$

daher die Curve auch hier noch zwei Schlingen darstellt, die aber von den vorigen sich dadurch unterscheiden, dass jetzt $\rho_{\lambda=0} > \rho_{\lambda=\frac{\pi}{2}}$ und

die Schlinge in der Richtung der X -Axe gewachsen, die in der Richtung der Y -Axe dagegen geschwunden ist. Fig. 6, V.

Es muss daher einen Werth von λ zwischen 60 und 30° geben, für welchen die beiden Schlingen gleiche Maxima haben; es wird dies eintreten, wenn

$$\rho_{\lambda=0} = \rho_{\lambda=\frac{\pi}{2}}$$

und es muss das entsprechende Azimuth aus der Gleichung

$$(r + \rho) \operatorname{tg} \psi_0 = (r - \rho) \operatorname{tg} \psi_{90}$$

gewonnen werden; hieraus findet sich

$$\rho = \frac{1}{2} \varepsilon' r \sin \theta \frac{\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2} - \sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2}}{\sqrt{(\cos ec i^2 - \omega'^2)(\cos ec i^2 - \varepsilon'^2) - \varepsilon'^2}}$$

und das entsprechende λ kann nun aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi_\lambda = \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon' \sin \theta \frac{\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2} - \sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2}}{\sqrt{(\cos ec i^2 - \omega'^2)(\cos ec i^2 - \varepsilon'^2) - \varepsilon'^2}} \right)$$

berechnet werden. Da es von r unabhängig ist, so sieht man, dass es an demselben Krystalle gleich bleibt, so lange das Einfallslöth und der Einfallswinkel in ihrer Neigung gegen die Rotationsaxe der Linse keine Veränderung erleiden.

Für $Z = r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=\frac{\pi}{2}} = Z^2$ endlich wird

$$\rho = r \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \psi_{\lambda=\frac{\pi}{2}}}{\operatorname{tg} \psi} \right)$$

und die Zahl der Maxima und Minima wird wieder 2, und zwar liegt das Minimum im Azimuth $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ und ρ ist dafür $= 0$; das Maximum aber im Azimuth $\lambda = 0$, wofür

$$\rho = \pm r \left(1 - \frac{(\operatorname{tg} \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2} + \varepsilon') (\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 - \varepsilon' \operatorname{tg} \theta})}{(\operatorname{tg} \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2} + \varepsilon') (\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2} - \varepsilon' \operatorname{tg} \theta)} \right)$$

ist. Die Curve ist eine Schlinge, die ihre grösste Contraction in der Axe der X hat. Fig. 6, VI.

Nimmt nun z' noch weiter zu, so wird der Schnitt getrennte Rückkehrpunkte zeigen, und dabei bleiben diese immerfort in der XZ -Ebene. Wird aber z' kleiner als Z_1 , so trennen sich zwar auch die Rückkehrpunkte, und dieselben liegen in der YZ -Ebene, die Differenz zwischen dem Maximum und Minimum nimmt aber immer

mehr ab, bis sie bei $z' = 0$ im Kreisschnitte durch die Nulle geht, um für negative z' selbst negativ zu werden, d. i. die concave Seite der Curve fällt wieder in die XZ -Ebene, und die Schnitte bleiben fortan, man gebe z' einen beliebig grossen Werth, Curven der ersten Art ähnlich.

Aus diesem Allem folgt nun, dass das untersuchte Konoid die Gestalt zweier in einander gesteckter zweihörniger kegelförmiger Flächen habe, deren Abweichung von der Gestalt eines Kegels zweiten Grades um so grösser ist, je breiter die Zone $Z_2 - Z_1$ wird. Soll das Konoid in einen Kegel übergehen, so muss daher

$$Z_2 - Z_1 = 0$$

gesetzt werden; das ist

$$r (tg \psi_{\lambda=0} - tg \psi_{\lambda=90^\circ}) = 0$$

$r = 0$ kann nicht angenommen werden, sonst verschwindet die Grundannahme eines linsenförmigen brechenden Mittels und die Aufgabe reducirt sich auf die Betrachtung des Überganges eines Strahlenkreiskegels aus der Luft in ein doppelbrechendes Medium; setzt man aber den zweiten Theil der Gleichung der Nulle gleich, so findet man

$$(tg \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2 + \varepsilon'}) (\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2} - \varepsilon' tg \theta) = (tg \theta \sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2} + \varepsilon') (\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2} - \varepsilon' tg \theta)$$

woraus folgt

$$tg \theta^2 = \frac{\sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2} - \sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2}}{\sqrt{\cos ec i^2 - \varepsilon'^2} - \sqrt{\cos ec i^2 - \omega'^2}} = -1$$

Es gibt daher keine Lage der berührenden Ebene, für welche, der Einfallswinkel des Strahles sei welcher immer, das Konoid in einen Kegel überginge, so lange $\omega > \varepsilon$.

Will man nun den Kegel haben, dessen Kanten parallel sind denen des Conoides, so braucht man nur in der Höhenlinie des letzteren irgend einen Punkt anzunehmen und aus demselben in jedem Azimuth eine solche Kante zu ziehen. Die Gleichung des Kegels lässt sich dabei sehr einfach ableiten. Es sei Fig. 5 MQ eine Konoidkante, $O O'$ die Höhe des Kegels und $O' Q'$ die zugehörige Kegelkante, man hat dann für irgend einen Punkt derselben

$$z = AP tg \psi = [(r - \rho) - \sqrt{x^2 + y^2}] tg \psi$$

das variable ρ aber ist aus der Gleichung des Konoides zu bestimmen. Nun ist für diese $z = (r - \rho) \operatorname{tg} \psi$; wird dies constant gesetzt, etwa $z = r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0}$ (dasjenige z_1 in welchem die Kante des Konoides im Azimuth 0 die Konzid-Axe trifft) so erhält man für den Kegel,

$$z = r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0} - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{tg} \psi$$

$$z - r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0} = -\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} \psi$$

und wenn

$$z - r \operatorname{tg} \psi_{\lambda=0} = z'$$

gesetzt wird

$$z'^2 = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \psi$$

wo nun nur noch für $\operatorname{tg} \psi$ zu substituiren ist.

Alle diese Gleichungen beziehen sich auf die Normalen der Wellen; transformirt man sie in Strahlengleichungen, so ändert sich die Gestalt des Konoides, um eine nicht minder interessante Fläche zu bilden. Doch werde ich hier dieselbe nicht näher in Betrachtung ziehen, da die für die Normalen durchgeführte Rechnung hinlänglich zeigt, dass es möglich sei der Fläche, in der die Lichtbewegung, die ein einfallender Strahlenkegel erzeugt, sich fortpflanzt, einen Kegel zu substituiren, und ich gehe nun auf die Untersuchung der Veränderungen über, die ein Lichtkegel beim Durchgange durch die Zwillingsfläche erfährt.

3. Der einfallende Lichtkegel kann ordentlich oder ausserordentlich polarisirt sein, und jeder derselben gibt wieder zwei neuen Lichtkegeln Entstehung, von denen aber der ordentlich gebrochene Kegel des einfallenden im Hauptschnitte polarisirten Kegels nur eine Fortsetzung des letzteren ist. Es wird daher im Folgenden von diesem auch weiter keine Notiz genommen. Um schwerfällige Berechnungen zu vermeiden, wird angenommen werden, die Axe des einfallenden Kegels liege im Hauptschnitte, und es werden nur Kegel des zweiten Grades der Untersuchung unterzogen. Um Wiederholungen zu ersparen, sei ein für allemal bemerkt, dass

β die Neigung der Axe des einfallenden Wellenkegels gegen Z ,

β die Neigung der Axe des einfallenden Strahlenkegels gegen Z ,

ψ die Neigung einer Kegelkante gegen ihre Axe,

ψ_1 die halbe Öffnung des Kegels im Hauptschnitte,

ψ_2 die halbe Öffnung des Kegels senkrecht zum Hauptschnitte bedeutet; für die gebrochenen Wellen und Strahlen werden, wie bei der Betrachtung der Bewegung einzelner Wellen und Strahlen, dieselben Buchstaben gestrichelt gesetzt.

1. Der einfallende Lichtkegel ist im Hauptschnitte polarisirt.

Da für den Übergang aus einem einfachbrechenden in ein doppeltbrechendes Mittel die Cosinusse des einfallenden und gebrochenen (ausserordentlichen) Strahles nicht als gesonderte Functionen ohne grosse Verwickelung der Formeln zu erhalten sind, so wird hier die Methode der Isochronen in Anwendung kommen.

Die allgemeine Gleichung eines schiefen elliptischen Kegels, dessen Axe im Hauptschnitte liegt, ist bekanntlich

$$A_1 x^2 - 2 A_2 x z + A_3 z^2 + y^2 = 0 \quad (10)$$

wo aus den Constanten die Abmessungen durch folgende Formeln zu erhalten sind

$$A_1 = \frac{\text{ctg } \psi_1^2 \cos \beta^2 - \sin \beta^2}{\text{ctg } \psi_2^2}$$

$$A_2 = \frac{(\text{ctg } \psi_1^2 + 1) \sin \beta \cos \beta}{\text{ctg } \psi_2^2}$$

$$A_3 = \frac{\text{ctg } \psi_1^2 \sin \beta^2 - \cos \beta^2}{\text{ctg } \psi_2^2}.$$

Isochrone des einfallenden Wellenkegels. Um sie zu bestimmen, kann wieder auf die allgemeine Relation

$$\rho \cdot \sin i = W$$

zurückgegangen werden; da in diesem Falle $W \text{ constant} = 0$ ist, so wird

$$\sin i = \frac{o}{\rho}, \quad \cos i^2 = \sqrt{\frac{\rho^2 - o^2}{\rho}}$$

und dies in die Polargleichung des Kegels 10

$$(A_1 \cos \lambda^2 + \sin \lambda^2) \sin i^2 + A_3 \cos i^2 - 2 A_2 \cos \lambda \cos i \sin i = 0 \quad (11)$$

substituirt, gibt

$$\sqrt{\rho^2 - o^2} = \frac{o}{A_3} (A_2 \cos \lambda + \sqrt{(A_2^2 - [A_1 - 1] A_3) \cos \lambda^2 - A_3})$$

woraus folgt

$$(12) \quad \rho^2 = \frac{o^2}{A_3^2} (2A_2^2 - A_3 [A_1 - 1]) \cos \lambda^2 + A_3 (A_3 - 1) + 2A_2 \cos \lambda \sqrt{A_2^2 - A_3 [A_1 - 1]} \cos \lambda^2 - A_3).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aus einer gegebenen Isochrone den zugehörigen Kegel, und umgekehrt, berechnen.

Erstens. Die Isochrone sei ein Kreis. Dann ist ρ constant = r und es müssen die Coëfficienten der Variablen λ für sich gleich Null sein; daraus erhält man zur Bestimmung der Abmessungen des Kegels die nöthigen Bedingungsgleichungen, aus denen man ableitet

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_2 &= \text{arc tg } \frac{o}{\sqrt{r^2 - o^2}} = \text{arc sin } \frac{o}{r} \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

der zugehörige Kegel ist ein gerader Kreiskegel. Die Grenze aller kreisförmigen Isochronen ist durch $r^2 - o^2 > 1$ gegeben, sie kann nicht innerhalb der Peripherie des Kreises liegen, der durch den Schnitt der Krystallebenen mit der Kugelwelle der ordentlichen Strahlen bestimmt wird. Überhaupt kann für gar keine Isochrone $\rho < o$ werden, denn differenziren wir $\rho \sin i = o$ nach i , so findet sich

$$\frac{d\rho}{di} = -ctg i$$

dies wird Null für $i = \frac{\pi}{2}$, was als Grenzwert $\rho = 0$ gibt, und zwar ganz allgemein.

Will man den Kegel der totalen Reflexion zwischen zwei doppelbrechenden Substanzen für die ordentlichen Strahlen berechnen, so kann man sich der Formel 13 bedienen; ist ω_1 der Brechungs-Coëfficient des ordinären Strahles der einen, ω_2 der der zweiten Substanz, so findet sich, wenn $\omega_2 > \omega_1$

$$\sin \psi = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

So wäre z. B. wenn wir für eine Combination der folgenden Minerale für die mittleren Strahlen das ψ berechnen:

Anatas-Zirkon = $49^\circ 10'$; Anatas-Kalkspath = $40^\circ 37'$; Anatas-Apatit = $40^\circ 14'$; Anatas-Turmalin = $40^\circ 10'$; Anatas-Beryll = $37^\circ 57'$; Anatas-Quarz = $37^\circ 16'$.

Zirkon-Kalkspath = $58^\circ 0'$; Zirkon-Apatit = $57^\circ 18'$; Zirkon-Turmalin = $57^\circ 10'$; Zirkon-Beryll = $53^\circ 14'$; Zirkon-Quarz = $52^\circ 5'$.

Kalkspath-Apatit = $82^{\circ} 50'$; Kalkspath-Turmalin = $82^{\circ} 17'$;
 Kalkspath-Beryll = $70^{\circ} 51'$; Kalkspath-Quarz = $68^{\circ} 28'$.

Apatit-Turmalin = $72^{\circ} 31'$; Apatit-Beryll = $72^{\circ} 12'$; Apatit-
 Quarz = $69^{\circ} 38'$.

Turmalin-Beryll = $72^{\circ} 24'$; Turmalin-Quarz = $69^{\circ} 50'$.

Beryll-Quarz = $79^{\circ} 59'$.

Zweitens. Die Isochrone sei eine Ellipse. Die Gleichung der Ellipse sei gegeben $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \lambda^2 + b^2 \cos^2 \lambda^2}$. Hieraus erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für den zugehörigen Wellenkegel: für $\lambda = 0$ wird

$$\rho^2 = a^2 = \frac{o^2}{A_3^2} [2A_2^2 - A_3(A_1 - A_3) + 2A_2 \sqrt{A_2^2 - A_1 A_3}]$$

für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ wird

$$\rho^2 = b^2 = \frac{o^2}{A_3^2} (A_3 - 1)$$

für $\lambda = \pi$ wird

$$\rho^2 = a^2 = \frac{o^2}{A_3^2} [2A_2^2 - A_3(A_1 - A_3) - 2A_2 \sqrt{A_2^2 - A_1 A_3}]$$

folglich müsste nach der ersten und dritten $A_2 \sqrt{A_2^2 - A_1 A_3} = 0$ sein; dies ist aber allgemein nicht möglich, folglich gibt es keinen Kegel des zweiten Grades, dessen Isochrone eine Ellipse wäre. Trotzdem, wenn wir $A_2 = 0$, also $\beta = 0$ setzen, finden wir mit zu Hülfnahme der anderen Relationen

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{o}{\sqrt{a^2 - o^2}}$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{o}{\sqrt{b^2 - o^2}}$$

woraus folgt, dass es zwar keine elliptische, wohl aber eine solche Isochrone gebe, welche mit Ellipsen die Scheitelpunkte gemein und nur ausser denselben eine etwas abweichende Krümmung habe.

Drittens. Wenn der einfallende Lichtkegel aufrecht und elliptisch ist, so erhält die zugehörige Isochrone eine interessante Gestalt. Es ist dann $A^2 = 0$ und wenn man (12) durch Punktekoordinaten ausdrückt, so ist

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{o^2}{A_3^2} [(1 - A_1) A_3 x^2 + (A_3 - 1) A_3 (x^2 + y^2)]$$

und dies wird nach einigen Reductionen

$$(x^2 + y^2)^2 = o^2 [\cos ec \psi_1^2 \cdot x^2 + \cos ec \psi_2^2 y^2]$$

Das Product $o \cos ec \psi$ ist aber $= \rho$; da nun für diese specielle Stellung des Kegels die Radienvectoren der Isochrone ihren grössten und kleinsten Werth eben in den Azimuthen 0° und $\frac{\pi}{2}$ erlangen, so ist $\rho_1 = o \cos ec \psi_1$ der grösste, und $\rho_2 = o \cos ec \psi_2$ der kleinste aller Radien und die Gleichung erhält diese einfache Gestalt

$$(x^2 + y^2)^2 = \rho_1^2 x^2 + \rho_2^2 y^2.$$

Nun ist dies aber eine in der Optik der einaxigen Krystalle wohlbekannte Relation; es ist die Gleichung eines Hauptschnittes der Elasticitätsfläche und zwar eines Polarschnittes. Hieraus folgt die interessante Thatsache: man kann den Lichtwellen in einem einfach brechenden Mittel eine Bewegung geben, die der Bewegung der ausserordentlichen Wellen in einem doppelbrechenden Mittel ähnlich ist. Denkt man sich nämlich an der Oberfläche irgend eines einaxigen Krystalls, der parallel zur Axe angeschliffen ist, einen leuchtenden Punkt, so werden von diesem aus Wellenebenen durch den Krystall sich fortpflanzen, und wenn wir untersuchen, wo die Tracen derselben nach der Zeiteinheit sich befinden, so sehen wir, dass dieselben eine Ellipse umhüllen; fällen wir in dieser Lage auf jede einzelne Tangente der Ellipse (Wellentrace) eine Senkrechte und suchen den geometrischen Ort aller Fusspunkte, so erhalten wir eine Gleichung, welche ganz mit der zuletzt gefundenen übereinstimmt, vorausgesetzt, dass ρ_1 und ρ_2 die Geschwindigkeiten des ausserordentlichen Strahles parallel und senkrecht zur optischen Axe bezeichnen. Genau dieselbe Lage haben nun nach der Zeiteinheit die Wellenebenen, welche ein gerader elliptischer Wellenkegel in einem einfachbrechenden Mittel längs der Trennungsebene erregt. Hiernit hat aber die Ähnlichkeit ein Ende, denn sobald man von den Wellen auf Strahlen übergeht, findet die Übereinstimmung nicht mehr Statt, indem diese in den ordentlichen Wellen senkrecht, in den ausserordentlichen dagegen schief gegen die Fortpflanzungsrichtung derselben stehen.

Gebrochener Lichtkegel. Beer hat in Poggendorff's Annalen, Band LXXXVIII, p. 252 ff., nachgewiesen, dass ein um das Einfallslot rotirender Strahl in einem doppelbrechenden Krystalle einen Kegel zweiten Grades beschreibt, er hat also die Aufgabe, die hier vorliegt, für den einfachsten Fall gelöst, dass der einfallende

Lichtkegel ein gerader Kreiskegel ist. Hier ist nun die Untersuchung für den allgemeinen Fall eines schiefen elliptischen Kegels zu führen.

Es ist AB , Fig. 7, die Trace irgend einer Wellenebene, ihre Gleichung ist

$$y = ax + b$$

und a und b werden zu Folge der angenommenen Bezeichnungsweise die Werthe

$$b = \rho \sqrt{1 + ctg^2 \lambda} = \rho \cos ec \lambda$$

$$a = ctg \lambda$$

erhalten. Es ist daher die Gleichung der Trace

$$y = ctg \lambda \cdot x + \rho \cos ec \lambda \quad (13)$$

Ausserdem ist nach (12)

$$\rho^2 = K_1 \cos^2 \lambda + K_2 + \cos \lambda \sqrt{K_3 \cos^2 \lambda - K_4} \quad (14)$$

unter $K_1, K_2 \dots$ die Constanten desselben Kegels verstanden. — Nun werde eine Ebene durch (13) berührend an das untere Wellenellipsoid gelegt; ihre allgemeine Gleichung ist

$$Ax + By + Cz = 1. \quad (15)$$

Setzt man $z = 0$, so erhält man

$$By = 1 - Ax$$

und da dies in die Trace (13) fallen soll, so erhält man zur Bestimmung der Constanten von (15) zwei Gleichungen

$$ctg \lambda = -\frac{A}{B} \quad \text{und} \quad \rho \cos ec \lambda = \frac{1}{B}$$

und hieraus

$$B = \frac{1}{\rho} \sin \lambda \quad A = -\frac{1}{\rho} \cos \lambda \quad (16)$$

Um das untere Wellenellipsoid

$$\frac{1}{e^2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2} \right) (x' \cos \alpha - z' \sin \alpha)^2 = 1 \quad (17)$$

zu berühren, muss eine Ebene von der Gestalt

$$\frac{1}{e^2} (xx' + yy' + zz') + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2} \right) (xx' \cos^2 \alpha - [xz' + x'e] \sin \alpha \cos \alpha + z'z' \sin^2 \alpha) = 1$$

sein, was für ihre Constanten folgende Gleichungen liefert

$$A = \frac{1}{o^2} (Px' + Qz') \quad B = \frac{1}{e^2} y' \quad C = \frac{1}{o^2} (Rz' + Qz')$$

(wo die P, Q, R durch die Werthe auf Seite 7 gegeben ist).

woraus dann folgt

$$(18) \quad x' = e^2 (RA - QC) \quad y' = e^2 B \quad z' = e^2 (PC - QA)$$

Die Elimination von x' , y' , z' zwischen (17) und (18) gibt dann

$$(19) \quad (RA - QC)^2 P + (PC - QA)^2 R + 2Q(PC - QA)(RA - QC) + qB^2 = \frac{q^2}{e^2}$$

Substituirt man hier A und B aus (16), so erhält man

$$C^2 [RP - Q^2] P + 2C \frac{\cos \lambda}{\rho} Q (RP - Q^2) + R \frac{\cos^2 \lambda}{\rho^2} (RP - Q^2) = q \left(\frac{q}{e^2} - \frac{\sin^2 \lambda}{\rho^2} \right)$$

und hieraus

$$(20) \quad C = - \frac{Q \cos \lambda \pm \sqrt{\cos^2 \lambda (Q^2 + P) + P \left(\frac{q}{e^2} \rho^2 - R - 1 \right)}}{P \rho}$$

Da es sich darum handelt, die Lage der gebrochenen Welle zu bestimmen, so ist auf die Ebene (15) ein Loth zu fällen; seine Richtung ist gegeben durch

$$(21) \quad \frac{x}{z} = \frac{A}{C} \quad \frac{y}{z} = \frac{B}{C}$$

wodurch man durch die Substituierung aus (16) und (20) zu den Relationen

$$(22) \quad \frac{x}{z} = \frac{P \cos \lambda}{-Q \cos \lambda + \sqrt{\cos^2 \lambda (Q^2 + P) + \rho^2 \cdot P \frac{q}{e^2} - P(R + 1)}}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{P \sin \lambda}{-Q \cos \lambda + \sqrt{\cos^2 \lambda (Q^2 + P) + \rho^2 \cdot P \frac{q}{e^2} - P(R + 1)}}$$

gelangt.

Nun ist aus (14) und (22) ρ und λ zu eliminiren; die dadurch resultirende Eliminationsgleichung ist die Gleichung des gesuchten Kegels. Zu dem Ende erhalten wir zuerst durch Division der beiden Quotienten in (22)

$$\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \lambda$$

(d. i. die Normale der gebrochenen Welle bleibt im Azimuth der einfallenden; dies ist eine der Grundbedingungen der Aufgabe, wurde aber bisher nirgends ausdrücklich in die Rechnung eingeführt, es kann daher hier als bewiesen betrachtet werden); hieraus folgt

$$\cos \lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

was in (14) eingeführt

$$(x^2 + y^2) \rho^2 = K_1 x^2 + K_2 (x^2 + y^2) + x \sqrt{K_3 x^2 - K_4 (x^2 + y^2)}$$

gibt, welcher Werth nun in (22) substituiert

$$\frac{x}{z} = \frac{P x}{-Qx + \sqrt{x^2(Q^2 + P) + \frac{Pq}{e^2} [K_1 x^2 + K_2 (x^2 + y^2) + x \sqrt{K_3 x^2 - K_4 (x^2 + y^2)}]} - P(R+1)(x^2 + y^2)}$$

liefert, woraus endlich die Fläche des gebrochenen Wellenkegels

$$(Pz + Qx)^2 = x^2 \left[Q^2 + P \left(\frac{q}{e^2} [K_1 + K_2] - R - 1 \right) \right] + y^2 \left[\frac{q}{e^2} K_2 - R - 1 \right] P \quad (23)$$

$$+ x \frac{P q}{e^2} \sqrt{x^2 (K_3 - K_4) - K_4 y^2}$$

Er ist im Allgemeinen daher nicht vom 2. Grade, nur in dem einen Falle, wenn $x^2 (K_3 - K_4) - K_4 y^2 = 0$ ist; dies aber zeigt, wenn man für K die Werthe aus (12) wieder einführt

$$4 A_2^2 \left\{ [(A_2^2 - A_3 [A_1 - 1]) - A_3] x^2 - A_3 y^2 \right\} = 0$$

also

$$A_2 = 0 = \frac{(cty \psi_1^2 + 1) \sin \beta \cos \beta}{cty \psi_2^2}$$

dass dann der einfallende Lichtkegel ein gerader (kreisförmiger oder elliptischer) sein müsse. Diese Formel gilt nicht nur für Zwillinge, sondern überhaupt für jeden Fall, wo ein Lichtkegel von constanter Geschwindigkeit in einen einaxigen Krystall dringt. Wenn wir wirklich $\beta = 0$ setzen, so wird der gebrochene Kegel

$$x^2 \left[\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R + 1) \right] + y^2 \left[\frac{q}{e^2} K_2 - (R + 1) \right] = z^2 P + 2 x z Q$$

seine Abmessungen aber sind

$$tg 2 \beta = - \frac{2 Q}{\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R + 1) + P}$$

er wird daher immer schief sein, es sei denn, die Krystallfläche wäre parallel oder senkrecht zur optischen Axe, denn nur dann wird $Q = 0$.

$$tg \psi_1'^2 = \frac{\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R + P + 1) - \sqrt{4Q^2 + \left[\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R - P + 1) \right]^2}}{\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R + P + 1) + \sqrt{4Q^2 + \left[\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R - P + 1) \right]^2}}$$

$$tg \psi_2'^2 = \frac{\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R + P + 1) - \sqrt{4Q^2 + \left[\frac{q}{e^2} (K_1 + K_2) - (R - P + 1) \right]^2}}{R + 1 - 2 \frac{q}{e^2} K_2}$$

dabei ist er immer elliptisch und das Verhältniss der beiden Halbxen der Leitlinie

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{R+1-2\frac{q}{e^2}K_2}{\frac{q}{e^2}(K_1+K_2)-(R+P+1)-\sqrt{4Q^2+\left[\frac{q}{e^2}(K_1+K_2)-(R+P+1)\right]^2}}$$

Da die durch K bezeichneten verschiedenen Constanten des einfallenden Lichtkegels alle einen Factor o = Geschwindigkeit des einfallenden Lichtes enthalten, so wird der Charakter der Zwillingbildung dadurch ausgedrückt werden, dass man ihn zu dem Factor $\frac{q}{e^2}$ stellt und vor die so modificirten K den Factor q^2 schreibt; hat man es aber mit keinem Zwillinge zu thun, so wird das Product $q\frac{o^2}{e^2} = q\varepsilon^2$ sein, unter ε die ausserordentlichen Brechungsexponenten verstanden.

Um vom Wellen- auf den zugehörigen Strahlenkegel überzugehen, wird man sich der bekannten Formeln bedienen; dabei bleibt, wie oben (S. 9, 10) bewiesen wurde, der Grad der Gleichung ungeändert.

2. Der einfallende Lichtkegel ist senkrecht zum Hauptschnitte polarisirt.

I. Der gebrochene Lichtkegel ist senkrecht zum Hauptschnitte polarisirt, d. i. ausserordentlich gebrochen.

Man kann die Gestalt desselben auf eine analoge Weise ermitteln, wie es bei dem im Hauptschnitte polarisirten einfallenden Kegel geschah; die Gleichungen sind dieselben bis auf (14), wo ρ^2 nach der Bedingung der constanten Geschwindigkeit des Lichtes in allen Azimuthen gebildet wurde, jetzt müsste dasselbe aus den Gleichungen

$$(A_1 \cos \lambda^2 + \sin \lambda^2) \sin i^2 + A_3 \cos i^2 - 2A_2 \cos \lambda \cdot \sin i \cos i = 0$$

und

$$\rho^2 \sin i^2 = e^2 + (o^2 - e^2) (\cos i \sin \alpha + \sin i \cos \lambda \cdot \cos \alpha)^2$$

durch Elimination von $\sin i$ und $\cos i$ vorerst bestimmt werden, was die Aufgabe complicirt und die Lösung schwerfällig macht. Hier empfiehlt sich die im Eingange zuerst erwähnte Methode durch ihre Leichtigkeit; die nothwendigen Formeln sind gegeben in den Sitzungsberichten vom November vorigen Jahres, S. 837; so oft sie citirt werden, sind sie durch eckige Klammern eingeschlossen,

um sie von den Formelzeigern dieses Aufsatzes unterscheiden zu können.

Wenn man in dem Kegel (10) für die Punkteordinaten Plan-coordinaten einführt, denselben also

$$A_1 \xi^2 - 2 A_2 \xi \zeta + A_3 \zeta^2 + \eta^2 = 0$$

schreibt, und hier aus [22]

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\xi'}{\zeta'} + 2 \frac{Q}{P}$$

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\eta'}{\zeta'}$$

die Cosinuse der gebrochenen Strahlen einführt, so erhält man die Gleichung des gebrochenen Strahlenkegels

$$A_1 \xi'^2 - 2 \left[A_2 - 2 \frac{Q}{P} A_1 \right] \xi' \zeta' + \left[2 \frac{Q}{P} \left(2 \frac{Q}{P} A_1 - 2 A_2 \right) + A_3 \right] \zeta'^2 + \eta'^2 = 0 \quad (24)$$

dessen Constanten folgende sind

$$tg 2 \beta' = \frac{2 \left(A_2 - 2 \frac{Q}{P} A_1 \right)}{\left(A_1 - A_3 \right) - 2 \frac{Q}{P} \left(2 A_2 - 2 \frac{Q}{P} A_1 \right)}$$

oder wenn man für A_1 , A_2 , A_3 , ihre entsprechenden Werthe substituirt

$$tg 2 \beta' = \frac{(\sin 2 \beta - 2 tg \theta (\cos \beta^2 - \sin \psi_1^2))}{\cos 2 \beta + tg \theta (\sin 2 \beta - tg \theta [\cos \beta^2 - \sin \psi_1^2])} \quad (25)$$

Die Neigung des neuen Strahlenkegels ist somit unabhängig von der Öffnung des einfallenden Strahlenkegels in der auf dem Hauptschnitte senkrechten Ebene; dasselbe gilt (wie sich von selbst versteht) von der Öffnung des gebrochenen Strahlenkegels im Hauptschnitte, es ist

$$ctg \psi_1^2 = - \frac{M + \sqrt{N}}{M - \sqrt{N}} \quad (26)$$

wo

$$M = \cos 2 \beta + tg \theta [(\cos \beta^2 - \sin \psi_1^2) tg \theta - \sin 2 \beta]$$

$$N = [\cos 2 \beta - tg \theta [(\cos \beta^2 - \sin \psi_1^2) tg \theta - \sin 2 \beta]]^2$$

$$+ 4 [\sin \beta^2 - \sin \psi_1^2 - tg \theta (\cos \beta^2 - \sin \psi_1^2)]^2$$

und

$$\operatorname{ctg} \psi_2' = - \frac{2 \operatorname{ctg} \psi_2^2}{M - \sqrt{N}}$$

folglich das Verhältniss der beiden Halbachsen der Leitlinie

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{2 \operatorname{ctg} \psi_2^2}{M + \sqrt{N}}$$

In diesen sämtlichen Formeln steht als charakteristischer Coefficient nur der Quotient $\operatorname{tg} \theta$; er ist der Ausdruck für die Doppelbrechung und Zwillingsbildung zugleich, denn er ist eine reine Function von o , e und α . In dem erwähnten Aufsätze, S. 839, wurde gezeigt, dass

$$2 \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \theta$$

unter θ der Winkel verstanden, den jener Strahl mit der Axe der Z einschliesst, welcher senkrecht in das zweite Individuum gebrochen wird; er liegt immer im Hauptschnitte und seine Neigung hängt somit nur von der Grösse der Doppelbrechung und von der Lage der Zwillingssebene ab. Es wird im Folgenden diese Tangente in die Rechnung eingeführt bleiben, statt des Quotienten.

Bei gleicher Lage der Axe des einfallenden Kegels, aber verschiedener Öffnung desselben, variirt im gebrochenen Kegel nicht allein die Öffnung sondern auch der Winkel, den seine Axe gegen die Coordinatenaxe einschliesst. Die Grenzen dieser Variationen sind leicht zu bestimmen, wenn man bei constanter Lage der Axe des einfallenden Kegels die Öffnung desselben im Hauptschnitte von Null bis zu jener Grenze wachsen lässt, wo eine Kegelkante noch streift, während der ganze übrige Kegel bereits unter der Trennungsebene steht. Für die erste Limite ist $\psi = 0$, und

$$\operatorname{tg} 2 \beta' = 2 \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta}{1 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta)^2},$$

für die zweite aber ist $\psi = 90^\circ - \beta$, und

$$\operatorname{tg} 2 \beta' = \frac{\operatorname{tg} 2 \beta}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} 2 \beta}.$$

Nun sind einige specielle Fälle anzuführen.

Erstens. Der einfallende Kegel ist von constanter Geschwindigkeit. Aus der Natur der Rotationskörper folgt, dass die Axe desselben in der optischen Axe liegen muss, und dass er ein Kreiskegel ist. Es ist daher in der allgemeinen Gleichung (10) in den Constanten $\beta = \alpha$ zu setzen. Man findet dann

$$tg 2 \beta' = \frac{2 Q ctg a^2 + P tg \alpha - ctg \psi_1^2 (2 Q - P tg \alpha)}{4 Q q \sin a \cos a - P \cos 2 a - ctg \psi_1^2 (4 Q \sin a \cos a - P \cos 2 a)}$$

der gebrochene Kegel ist schief und, da seine Neigung von der Öffnung des einfallenden abhängt, elliptisch, folglich nicht von constanter Geschwindigkeit. Die Grenzwerte von $tg 2 \beta'$ sind

$$tg 2 \beta'_1 = \frac{(q-1) \sin 2 a - P tg a}{(q-1) \sin 2 a^2 - P \cos 2 a}$$

$$tg 2 \beta'_2 = P \frac{\sin a}{\cos a^2} \cdot \frac{\sin a^3 + \cos a^3}{(P \cos 2 a - 2 q Q \sin 2 a) \cos 2 a}$$

Zweitens. Der einfallende Kegel ist gerade und elliptisch. Die Geschwindigkeit der Strahlen ist symmetrisch geordnet zu beiden Seiten des Hauptschnittes, während gegen den Querschnitt keine gleichmässige Vertheilung stattfindet. In der Gleichung (10) ist $\beta = 0$ zu setzen, wodurch der Coefficient von $\xi \xi$ verschwindet; dies macht aber nicht den Coefficienten von $\xi^1 \xi^1$ in (24) der Nulle gleich; der gebrochene Kegel ist daher schief, und seine Abmessungen sind:

$$tg 2 \beta' = - \frac{2 tg \theta \cos \psi_1^2}{1 - tg \theta \cos \psi_1^2}$$

und die Grenzen davon

$$\left. \begin{aligned} tg 2 \beta_1 &= \frac{2 tg \theta}{tg \theta^2 - 1}, \text{ d. i. } \beta_1 = - \theta \\ tg 2 \beta_2 &= 0 \quad \text{d. i. } \beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (im dritten Quadranten)}$$

die sämmtlichen Axen der Lichtkegel, welche durch einen einfallenden elliptischen geraden Strahlenkegel im zweiten Individuo erregt werden, liegen in dem Winkelraume von θ , d. i. dem Winkel der grössten Ablenkung eines einfallenden Strahles. Das Axenverhältniss ist

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2 ctg \psi_2^2}{1 + tg^2 \theta \cdot \cos \psi_1^2 + \sqrt{(1 - tg \theta^2 \cos \psi_1^2)^2 + 4 (\cos \psi_1^2 [tg \theta^2 - 1] + 1)}}$$

262 Graulich. Bewegung des Lichtes in optisch-einaxigen Zwillingkrystallen.

es bleibt elliptisch, auch wenn der einfallende Kegel ein Kreis-kegel ist.

II. Der gebrochene Lichtkegel ist parallel zum Hauptschnitte polarisirt, d. i. ordentlich gebrochen.

Die Formeln, welche für den Übergang in diesem Falle dienen, sind, wenn u , v , w die Cosinüsse der einfallenden Wellen bezeichnen

$$\xi^2 = \frac{q u^2}{1 + (q-1) \cos \varphi^2}$$

$$\eta^2 = \frac{q v^2}{1 + (q-1) \cos \varphi^2}$$

$$\zeta^2 = \frac{q w^2 - (q-1) \sin \varphi^2}{1 + (q-1) \cos \varphi^2}$$

woraus man zur Substitution ableitet

$$\frac{\xi'^2}{\zeta'^2} = \frac{q \frac{u^2}{w^2}}{q - (q-1) \left[(\cos a - \frac{u}{w} \sin a)^2 + \frac{v^2}{w^2} \right]}$$

$$\frac{\eta'^2}{\zeta'^2} = \frac{q \frac{v^2}{w^2}}{q - (q-1) \left[(\cos a - \frac{u}{w} \sin a)^2 + \frac{v^2}{w^2} \right]}$$

aus welchen Gleichungen $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ als Functionen von $\frac{\xi}{\zeta}$ und $\frac{\eta}{\zeta}$ zu entwickeln sind. Es ist aber überflüssig dies auszuführen, denn hier liegt gerade der umgekehrte Fall vor, gegen jenen, wo im Hauptschnitte polarisirtes Licht die ausserordentliche Brechung an der Zwillingfläche erleidet, und es gilt sonach der dort gefundene Satz:

der gebrochene Lichtkegel, den ein einfallender Kegel zweiten Grades erzeugt, ist im Allgemeinen vom vierten Grade, und seine Axe variirt sowohl mit der Neigung der Axe des einfallenden, als auch bei constanter Neigung dieser mit der verschiedenen Öffnung desselben im Hauptschnitte;

wozu nun noch der merkwürdige Satz kömmt, der ein Corollarium des vorigen ist, dass umgekehrt

der gebrochene Lichtkegel ein Kegel des zweiten Grades werden kann, selbst wenn der einfallende vom vierten Grade ist.

Fig. 1.

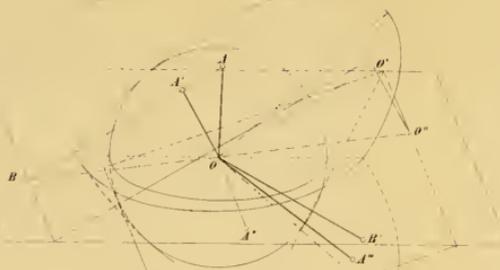


Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.

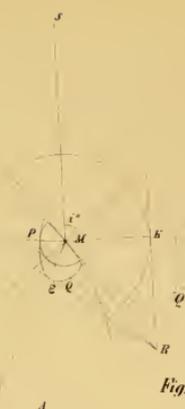


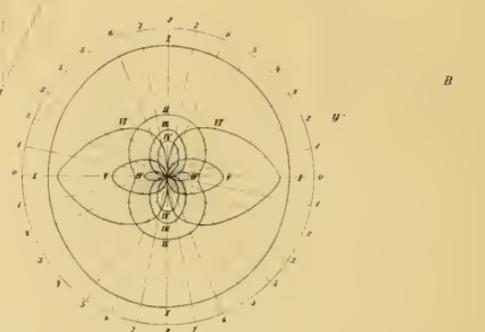
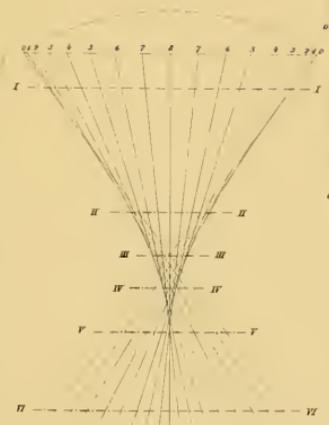
Fig. 5.



Fig. 7.



Fig. 6.



Es kehrt hier also das schon bei der Untersuchung der Bewegung einfacher Strahlen und Wellen bemerkte, jedenfalls interessante Verhältniss wieder, dass die Formeln und Gleichungen, welche die Bewegung der ausserordentlich schwingenden Lichtwellen dies- und jenseits der Zwillings-ebene an einander knüpfen, viel einfacher und die Bewegungen selbst darum viel anschaulicher sind, als jene, welche den Übergang des Lichtes in dem Falle bestimmen, wenn die Schwingungen aus ordentlichen in ausserordentliche, oder umgekehrt, sich verwandeln.

Es wird nun zunächst zu zeigen sein, welche Veränderungen das auf eine Zwillings-ebene einfallende Licht in seiner Intensität durch Reflexion und Brechung erleidet.

Vorträge.

Über elektrische Lampen.

Von **Franz Pekárek**,

Assistenten am k. k. physikalischen Institute.

(Mit II Tafeln.)

Das Licht der an den Polen einer Volta'schen Batterie glühenden Kohle, welches selbst das häufig angewandte Drummond'sche Kalklicht weit hinter sich lässt, kann am besten als Ersatz des Sonnenlichtes bei optischen Versuchen verwendet werden. Mit der Einführung der Kohle statt des kostspieligen Platins durch Prof. Bunsen ist es möglich, mit einem bei weitem geringeren Aufwande dieses elektrische Phänomen in dem grossartigsten Massstabe hervorzurufen, was neuester Zeit durch die vorzügliche Verwendbarkeit der harten Kruste aus den Gasretorten, und die äusserst billige Erzeugung der porösen Zellen aus Gyps in einem noch höheren Grade erleichtert wird. Die Intensität des Kohlenlichtes, welches eine Batterie von 48 Kohlenelementen liefert, ist von Prof. Bunsen gemessen gleich dem Lichte von 576 Stearinlichtern. (Poggendorff's Ann. LX, 402.)

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1854

Band/Volume: [12](#)

Autor(en)/Author(s): Grailich Wilhelm Josef

Artikel/Article: [Bewegung des Lichtes in optisch-einaxigen Zwillingsskristallen \(Mit I Tafel.\). 230-263](#)