Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fond

Kombinantenkegelschnitte von Kegelschnittbüscheln

Von

Emil Müller in Wien

w. M. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1924)

Sucht man zu den beiden äquianharmonischen Kegelschnitten K_1, K_2 eines Kegelschnittbüschels den harmonischen (Staudt'schen) Kegelschnitt K, so ist er, wie wohl S. Gundelfinger[1] zuerst ausdrücklich betont hat, eine Kombinante des Büschels. F. Mertens[2] hat von K die wichtige Eigenschaft angegeben, daß die zu irgend zwei Kegelschnitten des Büschels gehörigen beiden harmonischen Kegelschnitte einander in Punkten schneiden, die K angehören. Der Versuch, durch Anwendung der Faltprodukte zu einer besseren Einsicht in diese Zusammenhänge zu gelangen, führte mich zur Auffindung eines zu je zwei Kegelschnittbüscheln gehörigen Kombinantenkegelschnitts, der in den vorher erwähnten übergeht, sobald die Büschel zusammenfallen. Ja es ergab sich sogar aus einer allgemeineren Auffassung der gewonnenen Formeln, daß es zu je zwei Büscheln algebraischer Kurven von derselben paaren Ordnung eine Kombinantenkurve derselben Ordnung gibt. Es schien mir nicht überflüssig, über den Nachweis der Existenz dieser Kombinantenkurven (Nr. 1) hinaus noch zu zeigen, wie sich mittels meiner Rechenmethode die Eigenschaften des Kombinantenkegelschnitts K ergeben, ohne von einer speziellen Darstellungsform des Büschels oder seiner Kurven Gebrauch zu machen (Nr. 2). Denn mittels der gewonnenen Ergebnisse konnte dann (Nr. 4) eine Diskussion der möglichen Fälle für K durchgeführt werden. Von Wert für weitere Untersuchungen dürfte z. B. die Kennzeichnung der Fälle für das Verschwinden von K sein. Um den Anschluß an die übliche Betrachtungsweise zu gewinnen, wurden noch (Nr. 3) die wichtigsten jener Eigenschaften dieses Kegelschnitts abgeleitet, die mit den doppeltapolaren Kegelschnitten und den Geradenpaaren des Büschels in Beziehung stehen.[3]

Im folgenden kommen die Methoden, Bezeichnungen und Ergebnisse meines Aufsatzes: »Das Rechnen mit Faltprodukten usw.« (diese Ber., Bd. 131 (1922), p. 461 bis 490) beständig zur Anwendung; auf ihn wird kurz mit »R. m. F.« verwiesen.

---

[1] »Zur Theorie des Kegelschnittbüschels«, Z. Math. Phys., *20* (1875), p. 153 bis 159.

[2] Diese Ber., II. Abt., *91* (1885), p. 637 bis 639.

[3] Die Literatur über das ganze Gebiet findet man bei Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie der Kegelschnitte, 7. Auflage, herausgegeben von F. Dingeldey, 2. Teil, Leipzig und Berlin 1918, in den Anmerkungen 88 bis 97. Auf dieses Werk soll in der Folge mit »S-F-D« verwiesen werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

1. Kombinantenkegelschnitt zweier Kegelschnittbüschel.

Bezeichnen A, B, C, D Strahlgrößen 2. Grades in der Ebene, so soll das Symbol $\langle AB.CD\rangle$ folgenden aus Faltprodukten gebildeten Ausdruck bedeuten:

$$\langle AB.CD\rangle = \{AC.BD\} - \{AD.BC\}. \tag{1}$$

Er stellt wieder eine Strahlgröße 2. Grades K dar. Ihre zugehörige Kurve 2. Ordnung $\{Kx^2\} = 0$ geht zufolge (1) durch die Schnittpunkte der zu den Strahlgrößen $\{AC.BD\}$ und $\{AD.BC\}$ gehörigen Kurven 2. Ordnung.

Gemäß der Definitionsgleichung (1) ist

$$\langle CD.AB\rangle = \{CA.DB\} - \{CB.DA\} = \{AC.BD\} - \{AD.BC\}$$

oder

$$\langle CD.AB\rangle = \langle AB.CD\rangle; \tag{2}$$

ferner ist

$$\langle BA.CD\rangle = \{BC.AD\} - \{BD.AC\} = \{AD.BC\} - \{AC.BD\}$$

oder

$$\langle BA.CD\rangle = -\langle AB.CD\rangle \tag{3}$$

und wegen (2) auch

$$\langle AB.DC\rangle = -\langle AB.CD\rangle. \tag{3'}$$

Der Ausdruck $\langle AB.CD\rangle$ ändert also sein Vorzeichen, wenn man A mit B oder C mit D vertauscht, verschwindet daher für $A = B$ oder $C = D$, d. h. es ist

$$\langle AA.CD\rangle = 0, \quad \langle AB.CC\rangle = 0.$$

Aus der Definitionsgleichung (1) folgert man sofort die Gültigkeit des distributiven Gesetzes für jede der vier Größen in $\langle AB\ CD\rangle$, sodaß man hierin sowohl die Verknüpfung von A mit B und C mit D als auch die Verknüpfung von AB mit CD als Produkte im Graßmann'schen Sinn auffassen kann. Die letzten Gleichungen lassen sich daher schreiben

$$\langle A^2.CD\rangle = 0, \quad \langle AB.C^2\rangle = 0. \tag{4}$$

In $\langle AB.CD\rangle$ haben die Verknüpfungen AB und CD zufolge der Gleichungen (3) und (3') den Charakter von äußern Produkten, nicht dagegen die Verknüpfung von AB mit CD, da diese Glieder ja nach (2) ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind. Multipliziert man A, B, C, D bezüglich mit den Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, so ist

$$\langle(\mathfrak{a}A)(\mathfrak{b}B).(\mathfrak{c}C)(\mathfrak{d}D)\rangle = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\langle AB.CD\rangle. \tag{5}$$

Seien jetzt

$$\left.\begin{aligned} C' &= \mathfrak{c}_1 C + \mathfrak{c}_2 D \\ D' &= \mathfrak{d}_1 C + \mathfrak{d}_2 D \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

zwei aus C und D numerisch abgeleitete, voneinander unabhängige Strahlgrößen, die also dem Büschel (AB) angehören, und bildet man mit ihnen $\langle AB.C'D'\rangle$, indem man etwa zuerst das Produkt $C'D'$ auflöst, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (3′) und (4)

$$\langle AB.C'D'\rangle = (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_1)\langle AB.CD\rangle.$$

Da aus (6) durch äußere Multiplikation

$$[C'D'] = (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_1)[CD]$$

folgt, läßt sich die vorhergehende Gleichung, wegen $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_1 \neq 0$, auch schreiben

$$\frac{\langle AB.C'D'\rangle}{[C'D']} = \frac{\langle AB.CD\rangle}{[CD]}.$$

Aus Gleichung (2) kann man folgern, daß eine zur vorhergehenden analoge Gleichung gilt, wenn man in $\langle AB.CD\rangle$ die Größen A und B durch zwei aus ihnen abgeleitete, voneinander unabhängige Größen A', B' ersetzt. Mithin besteht die allgemeine Gleichung

$$\frac{\langle A'B'.C'D'\rangle}{[A'B'][C'D']} = \frac{\langle AB.CD\rangle}{[AB][CD]}, \tag{7}$$

die aussagt, daß der Ausdruck $\langle AB.CD\rangle$ eine *Kombinante der beiden Kegelschnittbüschel (AB) und (CD) ist.*[1] Für den Kombinantenkegelschnitt K gilt also unter Beachtung der ersten Bemerkung zur Gleichung (1) und des Umstandes, daß $\{AB\}$ den harmonischen Kegelschnitt der beiden Ordnungskurven A und B darstellt, der

Satz 1: Sind in der Ebene zwei Kegelschnittbüschel gegeben, und wählt man in dem einen ein Kurvenpaar A, B, in dem andern ein Kurvenpaar C, D beliebig, sucht dann die harmonischen Kegelschnitte $\{AC\}$ und $\{BD\}$ sowie $\{AD\}$ und $\{BC\}$, ferner die harmonischen Kegelschnitte $\{AC.BD\}$ und $\{AD.BC\}$ dieser beiden Paare, dann gehören die Schnittpunkte der letzten beiden Kurven 2. Ordnung einer festen Kurve 2. Ordnung $K = \langle AB.CD\rangle$ an, wie man auch die Auswahl der Paare AB und CD in den gegebenen Büscheln trifft.

---

[1] Diese Gleichung zeigt auch, daß der Ausdruck $\langle AB.CD\rangle$ eine Verknüpfung von $[AB]$ und $[CD]$ im Sinne meiner Arbeit im J. f. Math., 115 (1895), p. 234 bis 247 ist, daher auch $\{[AB][CD]\}$ geschrieben werden könnte.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Dieser Kombinantenkegelschnitt K hängt also nur von den beiden Büscheln, also von deren Grundpunkten ab. Bei reellen Grundpunkten kann man zur Konstruktion von K die in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte der beiden Büschel benutzen.[1]

Satz 1 gilt auch dann, wenn die beiden Büschel einen Kegelschnitt gemeinsam haben oder identisch sind. Seien im letztern Fall A, B, C, D vier voneinander verschiedene Kegelschnitte (Strahlgrößen 2. Grades) desselben Büschels. Dann ist, weil sich C und D aus A und B ableiten lassen, nach Gleichung (7)

$$\langle AB.CD\rangle = \langle AB.AB\rangle \frac{[CD]}{[AB]}$$

und

$$\langle CD.CD\rangle = \langle AB.AB\rangle \left(\frac{[CD]}{[AB]}\right)^2,$$

ferner nach Gleichung (1)

$$\langle AB.AB\rangle = K = \{A^2 B^2\} - \{AB.AB\}. \tag{8}$$

Für diesen *Kombinantenkegelschnitt eines Büschels* gilt demnach der

Satz 2: Wählt man in einem Kegelschnittbüschel irgendein Paar verschiedener Kegelschnitte aus und sucht deren beide harmonische Kegelschnitte, so gehören ihre Schnittpunkte dem Kombinantenkegelschnitt K des Büschels an.

Dies ist der einleitend erwähnte Mertens'sche Satz.

Vier beliebige Kegelschnitte (Strahlgrößen) A, B, C, D in der Ebene gehören drei Paaren von Kegelschnittbüscheln an; zu jedem solchen Paar gehört ein Kombinantenkegelschnitt. Man hat mithin die durch $\langle AB.CD\rangle$, $\langle BC.AD\rangle$, $\langle CA.BD\rangle$ gegebenen drei Kombinantenkegelschnitte. Nun ist nach Gleichung (1)

$$\begin{aligned}\langle AB.CD\rangle &= \{AC.BD\} - \{AD.BC\},\\ \langle BC.AD\rangle &= \{BA.CD\} - \{BD.CA\},\\ \langle CA.BD\rangle &= \{CB.AD\} - \{CD.AB\},\end{aligned}$$

woraus unmittelbar

$$\langle AB.CD\rangle + \langle BC.AD\rangle + \langle CA.BD\rangle = 0 \tag{9}$$

folgt. Diese Gleichung sagt aus:

---

[1] Sind z. B. $A = A_1^2$, $B = B_1^2$, $C = C_1^2$, $D = D_1^2$ Doppelgerade, so sind die Kegelschnittbüschel (AB) und (CD) Strahlinvolutionen, und ihr Kombinantenkegelschnitt $\langle AB.CD\rangle$ ist das Geradenpaar, das den Punkt $[[A_1 C_1 . B_1 D_1][B_1 C_1 . A_1 D_1]]$ mit den Punkten $[A_1 B_1]$ und $[C_1 D_1]$ verbindet. Auf die durch Anwendung des Satzes 1 hieraus folgenden geometrischen Beziehungen sei bloß hingewiesen.

Satz 3: Sind in der Ebene vier Kurven 2. Ordnung gegeben, so gehören sie drei Paaren von Kegelschnittbüscheln an; zu jedem solchen Paar gehört ein Kombinantenkegelschnitt, und diese drei Kegelschnitte liegen in einem Büschel.

Sowohl die bisherigen als die noch folgenden Gleichungen und Sätze gelten selbstverständlich auch dual.[1] Es sei aber noch auf eine viel weiter reichende Bedeutung der bisher abgeleiteten Gleichungen hingewiesen. Bezeichnen A, B, C, D algebraische Strahlgrößen in der Ebene von demselben paaren Grad n, dann stellt $\{AB\}$ eine Punktgröße gleichen Grades dar. Die zugehörige Kurve n-ter Klasse wird von jenen Geraden umhüllt, auf denen A und B apolare Punktgruppen ausschneiden (vgl. R. m. F., Satz 1), und soll die zu A und B harmonische Kurve heißen. Insbesondre stellt $\{AA\}$ jene Kurve n-ter Klasse dar, auf deren Tangenten A Punktgruppen ausschneidet, deren jede zu sich selbst apolar ist, d. h. deren Faltprodukt mit sich selbst verschwindet. In den Faltprodukten $\{AB\}$ und $\{ABC\}$ solcher Größen dürfen, wie bei Größen 2. Grades, die Faktoren beliebig vertauscht werden. Definieren wir daher $\langle AB.CD\rangle$ durch Gleichung (1), so gelten für diese Strahlgröße n-ten Grades die vorhergehenden Betrachtungen. Mithin gehört zu zwei Büscheln von Kurven n-ter Ordnung, wo n gerade ist, oder zu einem solchen Büschel immer eine *Kombinantenkurve n-ter Ordnung*. Für sie gelten die zu den obigen Sätzen analogen.

2. Allgemeine Formeln für den Kombinantenkegelschnitt K eines Büschels.

Nun sollen Eigenschaften des Kombinantenkegelschnitts eines Büschels abgeleitet werden, ohne von einer speziellen Darstellungsform des Büschels oder seiner Kegelschnitte auszugehen.

Nach Gleichung (8) ist dieser Kegelschnitt $K = \langle AB.CD\rangle$ gegeben durch

$$K = \{A^2B^2\} - \{AB.AB\}.$$

Da dual zu der in R. m. F., Nr. 3, abgeleiteten Gleichung (10) die Gleichung

$$\{AB.AB\} = \{A^2B\}B + \{AB^2\}A - {}^1\!/_2\{A^2B^2\} \tag{10}$$

gilt, so läßt sich K in den Formen

$$K = {}^3\!/_2\{A^2B^2\} - \{A^2B\}B - \{AB^2\}A \tag{11}$$

[1] Wendet man den Satz 3 auf vier Doppelgerade an, so bestehen (vgl. die letzte Fußnote) die drei Kombinantenkegelschnitte aus den Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks, das dem ursprünglichen Vierseit in einfacher Weise zugeordnet ist. Der zum Satz 3 duale Satz führt dann vom vollständigen Viereck zum ursprünglichen Vierseit.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder

$$K = 2\{A^2B\}B + 2\{AB^2\}A - 3\{AB.AB\} \tag{11'}$$

schreiben. Der Ausdruck (11) für den Kombinantenkegelschnitt findet sich (von der Symbolik abgesehen) sowohl bei S. Gundelfinger, a. a. O., p. 157, als auch bei F. Mertens, a. a. O., p. 638.

Zur Ausrechnung von $\{K^2\}$ und $\{K^3\}$ brauchen wir Umformungen, die wir in den Hilfsätzen I bis IV vorausschicken, um nicht später diese Nebenrechnungen einschalten zu müssen.

Hilfsätze.

I. Dual zu R. m. F., Nr. 2, Gleichung (11), hat man

$$A = \frac{3}{4\{A^3\}}\{A^2A^2\},$$

mithin

$$\{A^2B^2A\} = \frac{3}{4\{A^3\}}\{A^2B^2.A^2A^2\}.$$

Da ferner aus R. m. F., Nr. 3, Gleichung (11) für $c = a$

$$\{ab.a^2\} = \{a^2b\}a + {}^1/_3\{a^3\}b$$

folgt, so ist

$$\{A^2B^2.A^2A^2\} = \{A^2A^2B^2\}\{A^2\} + {}^1/_3\{A^2A^2A^2\}\{B^2\} =$$
$$= {}^4/_3\{A^3\}\{AB^2\}\{A^2\} + {}^4/_9\{A^3\}^2\{B^2\},$$

also

$$\{A^2B^2A\} = \{AB^2\}\{A^2\} + {}^1/_3\{A^3\}\{B^2\} \tag{12}$$

und analog

$$\{A^2B^2B\} = \{A^2B\}\{B^2\} + {}^1/_3\{B^3\}\{A^2\}. \tag{12'}$$

Aus Gleichung (12) erhält man durch Faltung mit B unter Beachtung, daß $\{A^2B^2AB\} = \{A^2B^2.AB\}$ ist,

$$\{A^2B^2.AB\} = \{AB^2\}\{A^2B\} + {}^1/_3\{A^3\}\{B^3\}. \tag{13}$$

II. Die Faltung der Gleichung (10) mit $\{AB\}$ gibt

$$\{AB.AB.AB\} = 2\{A^2B\}\{AB^2\} - {}^1/_2\{A^2B^2.AB\}$$

und mit Berücksichtigung von (13)

$$\{\{AB\}^3\} = {}^3/_2\{A^2B\}\{AB^2\} - {}^1/_6\{A^3\}\{B^3\}. \tag{14}$$

Daraus folgen z. B. die Kennzeichen für ein Zerfallen des harmonischen Kegelschnitts $\{AB\}$.

III. Die zu (10) duale Gleichung lautet für die Punktgrößen $\{A^2\}$ und $\{B^2\}$

$$\{A^2B^2.\,A^2B^2\} = \{A^2A^2B^2\}\{B^2\}+\{A^2B^2B^2\}\{A^2\}-{}^1/_2\{A^2A^2.\,B^2B^2\}.$$

Wegen $\{A^2A^2\} = {}^4/_3\{A^3\}A$ und $\{B^2B^2\} = {}^4/_3\{B^3\}B$ läßt sie sich schreiben

$$\{\{A^2B^2\}^2\} = {}^4/_3\{A^3\}\{A\,B^2\}\{B^2\}+ \\ +{}^4/_3\{B^3\}\{A^2B\}\{A^2\}-{}^8/_9\{A^3\}\{B^3\}\{A\,B\}. \quad (15)$$

Aus der zu Gleichung (14) dualen Gleichung ergibt sich durch dieselbe Ersetzung

$$\{\{A^2B^2\}^3\} = {}^{16}/_9\{A^3\}\{B^3\}\{\{A\,B\}^3\}. \quad (16)$$

IV. Faltet man Gleichung (11) mit $\{B^2\}$, $\{A^2\}$ und $2\{A\,B\}$, so erhält man

$$\{K\,B^2\} = {}^3/_2\{A^2B^2B^2\}-\{A^2B\}\{B^3\}-\{A\,B^2\}^2,$$
$$\{K\,A^2\} = {}^3/_2\{A^2A^2B^2\}-\{A^2B\}^2-\{A\,B^2\}\{A^3\},$$
$$\{K.\,2\,A\,B\} = 3\{A^2B^2.\,A\,B\}-4\{A^2B\}\{A\,B^2\}.$$

Beachtet man, daß hierin

$$\{A^2A^2\} = {}^4/_3\{A^3\}A, \quad \{B^2B^2\} = {}^4/_3\{B^3\}B$$

und $\{A^2B^2.\,A\,B\}$ durch die rechte Seite von Gleichung (13) zu ersetzen ist, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \{K\,B^2\} &= \{A^2B\}\{B^3\}-\{A\,B^2\}^2 \\ \{K\,A^2\} &= \{A\,B^2\}\{A^3\}-\{A^2B\}^2 \\ \{K.\,2\,A\,B\} &= -\{A^2B\}\{A\,B^2\}+\{A^3\}\{B^3\}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Wir werden zur Abkürzung

$$\{K\,B^2\} = \mathfrak{a}, \quad \{K\,A^2\} = \mathfrak{b}, \quad \{K.\,2\,A\,B\} = -\mathfrak{c}$$

setzen.

Um nun $\{K^2\}$ zu bekommen, falten wir die Gleichung (11) mit sich selbst und erhalten

$$\{K^2\} = {}^9/_4\{A^2B^2.\,A^2B^2\}+\{A^2B\}^2\{B^2\}+\{A\,B^2\}^2\{A^2\}- \\ -3\{A^2B\}\{A^2B^2B\}-3\{A\,B^2\}\{A^2B^2A\}+2\{A^2B\}\{A\,B^2\}\{A\,B\}.$$

Ersetzt man hierin $\{A^2B^2.\,A^2B^2\}$, $\{A^2B^2A\}$ und $\{A^2B^2B\}$ durch die rechten Seiten der Gleichungen (15), (12) und (12'), ordnet nach $\{A^2\}$, $\{A\,B\}$, $\{B^2\}$ und beachtet, daß die zugehörigen Koeffizienten mit den Ausdrücken (17) übereinstimmen, so läßt sich diese Gleichung schreiben:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$^1/_2\{K^2\} = \{KB^2\}\{A^2\} - \{K.2\,AB\}\{AB\} + \{KA^2\}\{B^2\} \tag{18}$$

oder nach der im Hilfsatz IV eingeführten Bezeichnung

$$^1/_2\{K^2\} = \mathfrak{a}\{A^2\} + \mathfrak{c}\{AB\} + \mathfrak{b}\{B^2\}. \tag{18'}$$

Die Faltung der Gleichung (18) mit K gibt

$$\{K^3\} = 4\{KA^2\}\{KB^2\} - \{K.2\,AB\}^2 \tag{19}$$

oder

$$\{K^3\} = 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{c}^2. \tag{19'}$$

Mittels der gewonnenen Ausdrücke für K, $\{K^2\}$ und $\{K^3\}$ lassen sich die möglichen Sonderfälle für den Kombinantenkegelschnitt eines Büschels untersuchen, was in Nr. 4 geschehen soll.

Aus Gleichung (18′) ergibt sich durch Faltung mit A und B

$$^1/_2\{K^2A\} = \mathfrak{a}\{A^3\} + \mathfrak{c}\{A^2B\} + \mathfrak{b}\{AB^2\}$$
$$^1/_2\{K^2B\} = \mathfrak{a}\{A^2B\} + \mathfrak{c}\{AB^2\} + \mathfrak{b}\{B^3\}.$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Ausdrücke aus (17), so werden die rechten Seiten Null, sodaß die Gleichungen

$$\{K^2A\} = 0, \quad \{K^2B\} = 0 \tag{20}$$

bestehen. Sie sprechen den bekannten Satz[1] aus: *Der Kegelschnitt* $\{K^2\}$ *ist zum ganzen Büschel* (AB) *apolar.* Die in dem Büschel enthaltenen Geradenpaare sind also bezüglich $\{K^2\}$ konjugiert.

Man beweist unschwer, daß sich $\{K^2\}$ durch die Eigenschaften kennzeichnen läßt, zum Büschel (AB) apolar und aus $\{A^2\}$, $\{AB\}$, $\{B^2\}$ ableitbar zu sein.

3. Beziehungen von K zu den doppeltapolaren Kegelschnitten und den Geradenpaaren des Büschels.

Bestehen zwischen zwei Strahlgrößen 2. Grades (in der Ebene) P, Q die Gleichungen

$$\{P^2Q\} = 0 \text{ und } \{PQ^2\} = 0, \tag{21}$$

so nennen wir sie sowie die zugehörigen Kurven 2. Ordnung *doppeltapolar.* Nach Gleichung (10) sind dies die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gleichung

$$\{PQ.PQ\} = -^1/_2\{P^2Q^2\}; \tag{22}$$

d. h. *die beiden harmonischen Kegelschnitte doppeltapolarer Kegelschnitte und nur solcher sind identisch.* Wegen

---

[1] S-F-D, II, p. 244.

$$\{PQ.P\} = \{P^2Q\} = 0, \quad \{PQ.Q\} = \{PQ^2\} = 0,$$

$$\{P^2Q^2.P^2\} = \{P^2P^2Q^2\} = {}^4/_3\{P^3\}\{PQ^2\} = 0$$

und

$$\{P^2Q^2.Q^2\} = {}^4/_3\{Q^3\}\{P^2Q\} = 0,$$

ist ferner der harmonische Kegelschnitt zweier doppeltapolarer Kegelschnitte P und Q doppeltapolar zu P und zu Q. Für den Kombinantenkegelschnitt $R = \langle PQ.PQ\rangle$ erhält man nach den Gleichungen (11) und (11′)

$$R = {}^3/_2\{P^2Q^2\} = -3\{PQ.PQ\}. \tag{23}$$

Der Kombinantenkegelschnitt von (PQ) ist also der harmonische Kegelschnitt von P und Q. Aus (23) folgt $\{R^2\} = {}^9/_4\{P^2Q^2.P^2Q^2\}$, wofür sich nach Gleichung (15) setzen läßt

$$\{R^2\} = -2\{P^3\}\{Q^3\}\{PQ\}. \tag{24}$$

Dann ist

$$\{R^3\} = -3\{P^3\}\{Q^3\}\{P^2Q^2.PQ\}$$

oder zufolge (13)

$$\{R^3\} = -\{P^3\}^2\{Q^3\}^2. \tag{25}$$

Von den drei Kegelschnitten P, Q, R ist jeder der harmonische, mithin auch der Kombinantenkegelschnitt der beiden andern. Denn wegen $\{RP\} = {}^3/_2\{P^2Q^2P\} = {}^1/_2\{P^3\}\{Q^2\}$ [nach Gleichung (12)] gilt dies für Q und analog für P, während es für R oben gezeigt wurde.

Nach R. m. F., Nr. 3, Gleichung (19), läßt sich der zu einer Kurve 2. Klasse d bezüglich P polare Kegelschnitt $\{(PP)d\}$ in der Form darstellen:

$$\{(PP)d\} = \{Pd\}P - {}^1/_2\{P^2d\}.$$

Für $d = \{Q^2\}$ gibt diese Gleichung, wegen $\{PQ^2\} = 0$,

$$\{(PP).Q^2\} = -{}^1/_2\{P^2Q^2\} = -{}^1/_3 R.$$

Analog hat man

$$\{(QQ).P^2\} = -{}^1/_3 R.$$

Von zwei doppeltapolaren Kegelschnitten P, Q ist der harmonische Kegelschnitt polar zu P bezüglich Q und polar zu Q bezüglich P.[1]

In einem Büschel (AB) gibt es im allgemeinen zwei zueinander doppeltapolare Kurven. Man kann sie auf folgende Art finden. Sollen

---

[1] Diese Eigenschaften doppeltapolarer Kegelschnitte finden sich schon bei N. M. Ferrers, Quart. J., 7 (1866), p. 20 bis 22, mit den nächsten zusammen auch bei Gundelfinger, a. a. O.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$K_1 = \mathfrak{k}_1 A + B, \quad K_2 = \mathfrak{k}_2 A + B$$

zwei solche Kegelschnitte sein, so besteht nach Gleichung (24) für den Kombinantenkegelschnitt K ihres Büschels die Gleichung

$$\{K^2\} = -2\{K_1^3\}\{K_2^3\}\{K_1 K_2\}, \tag{26}$$

wo

$$\{K_1 K_2\} = \mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \{A^2\} + (\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2)\{A B\} + \{B^2\} \tag{26'}$$

ist. Wegen der Kombinanteneigenschaft von K unterscheidet sich dieser Ausdruck von dem in (18′) nur durch einen Zahlfaktor $\mathfrak{l}$, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{c}, \quad 1 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{b}$$

bestehen, aus denen

$$\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$$

folgt. $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ sind mithin die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{c}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = 0$, oder es ist

$$\mathfrak{k}_{1,2} = {}^1/_{2\mathfrak{b}}(\mathfrak{c} \pm \sqrt{\mathfrak{c}^2 - 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}). \tag{27}$$

Für $\mathfrak{c}^2 - 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \neq 0$ und $\mathfrak{b} \neq 0$ gibt es also in dem Büschel zwei doppeltapolare Kegelschnitte K_1, K_2; ihr algebraisches Produkt ist durch

$$\mathfrak{b}\, K_1 K_2 = \mathfrak{a}\, A^2 + \mathfrak{c}\, A B + \mathfrak{b}\, B^2$$

gegeben, übereinstimmend mit S-F-D, Nr. 359, Gleichung (64). K_1, K_2, K *stehen dann in den oben für P, Q, R angegebenen Beziehungen.*

Wir gelangen zum Anschluß an die übliche Betrachtungsweise, wenn wir A und B als voneinander verschiedene Geradenpaare des Büschels wählen, die natürlich nicht immer vorhanden sind. Wegen $\{A^3\} = \{B^3\} = 0$ $(\{A^2\} \neq 0,\ \{B^2\} \neq 0)$ ist nun nach (17)

$$\mathfrak{a} = -\{A B^2\}^2, \quad \mathfrak{b} = -\{A^2 B\}^2, \quad \mathfrak{c} = \{A^2 B\}\{A B^2\},$$

mithin

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^2. \tag{28}$$

Gleichung (27) gibt dann, wenn $\mathfrak{e}$ eine komplexe Kubikwurzel aus -1 bezeichnet,

$$\mathfrak{k}_1 = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{e}, \quad \mathfrak{k}_2 = -\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{e}^2.$$

Die doppeltapolaren Kegelschnitte des Büschels stellen sich also, wenn man noch $\mathfrak{c}/\mathfrak{b}\, A = \bar{A}$ setzt, in der Form

$$K_1 = \mathfrak{e}\,\bar{A} + B, \quad K_2 = -\mathfrak{e}^2 \bar{A} + B \tag{29}$$

dar, wo $\bar{A}$ dasselbe Geradenpaar wie A bedeutet. Wegen $\{(\bar{A}+B)^3\}=0$ stellt $C=-(\bar{A}+B)$ das dritte Geradenpaar des Büschels dar,[1] und aus $\{C^2\}=\{\bar{A}^2\}+\{B^2\}+2\{\bar{A}\,B\}$ ergibt sich

$$2\{\bar{A}\,B\}=\{C^2\}-\{\bar{A}^2\}-\{B^2\}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für $2\{\bar{A}\,B\}$ in $\{K_1^2\}$, $\{K_2^2\}$, $\{K_1K_2\}$ ein und berücksichtigt die Beziehung $\mathfrak{e}-\mathfrak{e}^2-1=0$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}-\{K_1^2\}&=\{\bar{A}^2\}+\mathfrak{e}^2\{B^2\}-\mathfrak{e}\{C^2\}\\ -\{K_2^2\}&=\{\bar{A}^2\}-\mathfrak{e}\{B^2\}+\mathfrak{e}^2\{C^2\}\\ 2\{K_1K_2\}&=\{\bar{A}^2\}+\{B^2\}+\{C^2\}.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

Bezeichnen a, b, c die Ecken des gemeinsamen Poldreiecks des Kegelschnittbüschels, so stellen $\{\bar{A}^2\}$, $\{B^2\}$, $\{C^2\}$ die Quadrate dieser Punkte dar, und die Gleichungen (30) zeigen, wie sich die doppeltapolaren Kegelschnitte K_1, K_2 des Büschels und sein Kombinantenkegelschnitt K (als Punktgrößen) aus a^2, b^2, c^2 ableiten lassen. Ersetzt man in diesen Gleichungen a, b, c, beziehungsweise durch a, $\mathfrak{e}\,b$ und $-\mathfrak{e}^2 c$, so werden die Gleichungen (30) zyklisch vertauscht. Diese Ersetzung bedeutet aber eine zyklische Kollineation 3. Ordnung mit den Doppelpunkten a, b, c. Daher bewirkt diese Kollineation eine zyklische Vertauschung von K_1, K_2, K und erklärt, warum jede projektive Beziehung zwischen zweien der drei Kegelschnitte auch für die andern Paare besteht.[2]

Nach Nr. 2 sind die Geradenpaare $\bar{A}$, B, C bezüglich $\{K^2\}$ konjugiert und nach der letzten der Gleichungen (30) ist $a\,b\,c$ ein Poldreieck von $\{K^2\}$. Mithin sind die aus jedem der Punkte a, b, c an $\{K^2\}$ legbaren Tangenten die Doppelstrahlen jener Involution, die das Geradenpaar des Büschels und das Seitenpaar des Poldreiecks durch diesen Punkt bestimmen. Durch diese sechs Tangenten ist der für reelle Grundpunkte nullteilige Kegelschnitt $\{K^2\}$ gegeben. Acht weitere Tangenten liefert die folgende Überlegung. $\{K^2\}$, als harmonischer Kegelschnitt von K_1 und K_2, hat die Tangenten an letztere in den Büschelgrundpunkten zu Tangenten. *Die durch einen dieser Punkte t gehenden Tangenten sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sie mit den Geraden nach den drei übrigen Grundpunkten ein äquianharmonisches Doppelverhältnis bilden.* Der Kombinantenkegelschnitt $\{K^2\}$ ist daher dual zu dem sogenanten 14-Punkte-

---

[1] Daraus folgt, daß die Doppelverhältnisse $(\bar{A}\,B\,C\,K_1)$ und $(\bar{A}\,B\,C\,K_2)$ gleich $\mathfrak{e}$, beziehungsweise $-\mathfrak{e}^2$ sind, daß also die Grundpunkte des Büschels auf K_1 und K_2 *äquianharmonische* Doppelverhältnisse bilden. Ferner ergibt sich $\{\bar{A}\,B\,C\}=0$, d. h. (R. m. F., Nr. 6), daß die drei Geradenpaare eines Büschels ein *apolares Tripel* bilden.

[2] Auf diese Kollineation und ihre Bedeutung machte mich mein verehrter Kollege W. Wirtinger aufmerksam.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Kegelschnitt eines vollständigen Vierseits.[1] Letzterer ist der Kombinantenkegelschnitt $\{k^2\}$ zu je zweien dem Vierseit eingeschriebenen Kurven 2. Klasse. Bezeichnen a und b die zugehörigen Punktgrößen 2. Grades, so ist, dual zu Gleichung (11),

$$k = {}^3/_2\{a^2 b^2\} - \{a^2 b\}\, b - \{a\, b^2\}\, a$$

und, dual zu (18′),

$$^1/_2\{k^2\} = \mathfrak{a}'\{a^2\} + \mathfrak{c}'\{a\, b\} + \mathfrak{b}'\{b^2\},$$

wo $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ aus a und b ebenso gebildet sind wie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aus A und B [Gleichungen (17)]. Wenn die beiden Kegelschnitte als Strahlgrößen A, B vorgegeben sind, hat man in den letzten beiden Gleichungen nur $a = \{A^2\}$, $b = \{B^2\}$ zu setzen. Wegen $\{a^2\} = {}^4/_3\{A^3\}A$, $\{b^2\} = {}^4/_3\{B^3\}B$, erhält man dann

$$-{}^3/_4\, k = \{B^3\}\{A^2 B\}\{A^2\} - 2\{A^3\}\{B^3\}\{A\, B\} + \{A^3\}\{A\, B^2\}\{B^2\} \quad (31)$$

$$\{k^2\} = \frac{32}{27}\{A^3\}\{B^3\}\left(4\,\mathfrak{b}\,\{B^3\}A + 3\,\mathfrak{c}\,\{A^2 B^2\} + 4\,\mathfrak{a}\,\{A^3\}\, B\right), \quad (32)$$

übereinstimmend mit S-F-D, Nr. 360, (11) und (8).

$\{K^2\}$ ist nach Nr. 2 zum Büschel $(A\, B)$ apolar; daher muß diese Größe aus den Quadraten der Grundpunkte t_1, t_2, t_3, t_4 des Büschels ableitbar sein, wofern diese Punkte getrennt sind. Belegt man sie mit solchen Gewichten, daß

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

wird, und setzt[2]

$$v^{(2)} = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2,$$

so läßt sich die Identität der Kurven $\{K^2\}$ und $v^{(2)}$ auf Grund der folgenden Bemerkung leicht nachweisen:

Besteht zwischen drei Größen p, q, r eines Grundgebildes 2. Stufe die Beziehung $p + q + r = 0$, so stellt $p^2 + q^2 + r^2$ jenes Paar von Größen dar, die mit p, q, r äquianharmonische Doppelverhältnisse bilden.

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt nämlich, wenn man sie etwa mit t_1, beziehungsweise t_1^2 faltet,

$$[t_1\, t_2] + [t_1\, t_3] + [t_1\, t_4] = 0$$

$$\{v^{(2)}\, t_1^2\} = [t_1\, t_2]^2 + [t_1\, t_3]^2 + [t_1\, t_4]^2.$$

---

[1] L. Cremona, On the fourteen-points conic, Mess. of Math., 33 (1866), p. 13 f. und N. M. Ferrers, ib., p. 68 bis 70. Über weitere Literatur hierzu vgl. S-F-D, Anm. *95*, oder Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geom., 2. Auflage, I/2, Leipzig 1912, p. 523.

[2] Vgl. Ferrers, letzte Fußnote.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die aus t_1, mithin auch aus jedem der Grundpunkte, an $v^{(2)}$ gelegten Tangenten sind also mit denen an $\{K^2\}$ identisch. Daher sind die Kurven $\{K^2\}$ und $v^{(2)}$ identisch, oder es muß

$$\{K^2\} = l\,(t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2)$$

sein, wie behauptet wurde.

4. Diskussion der möglichen Fälle von K.

Auf Grund der in Nr. 2 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen soll jetzt die Diskussion der möglichen Sonderfälle für den Kombinantenkegelschnitt eines Kegelschnittbüschels angeschlossen werden.

a) $K = 0$.

Aus dieser Annahme folgt nach Gleichung (11′)

$$^3/_2\{AB.AB\} = \{A^2B\}B+\{AB^2\}A \qquad (*)$$

und durch Faltung dieser Gleichung mit sich selbst

$$^9/_4\{\{AB\}^2\{AB\}^2\} = \{A^2B\}^2\{B^2\}+2\{A^2B\}\{AB^2\}\{AB\}+\{AB^2\}^2\{A^2\}.$$

Wegen $\{\{AB\}^2\{AB\}^2\} = {}^4/_3\{\{AB\}^3\}\{AB\}$ und, wie die Faltung von $(*)$ mit $\{AB\}$ ergibt, $\{\{AB\}^3\} = {}^4/_3\{A^2B\}\{AB^2\}$, geht diese Gleichung über in

$$\{(\{AB^2\}A-\{A^2B\}B)^2\} = 0. \qquad (33)$$

Verschwinden nicht $\{AB^2\}$ und $\{A^2B\}$ gleichzeitig, so stellt also die in der runden Klammer stehende Größe eine Doppelgerade des Büschels dar; das Büschel besteht mithin aus sich doppeltberührenden oder sich hyperoskulierenden Kegelschnitten. Wählt man diese Doppelgerade $\bar{B}$ neben A als zweiten Kegelschnitt des Büschels, so erhält man aus Gleichung (11), wegen $\{\bar{B}^2\} = 0$, $K = -\{A^2\bar{B}\}\bar{B}$. Für $K = 0$ muß $\{A^2\bar{B}\} = 0$, d. h. die Doppelgerade $\bar{B}$ eine Tangente von A sein. Das Büschel besteht demnach aus sich hyperoskulierenden Kegelschnitten.

In dem oben ausgenommenen Fall $\{A^2B\} = \{AB^2\} = 0$ wird nach Gleichung (11) auch $\{A^2B^2\} = 0$. Da $\{A^2\}$ und $\{B^2\}$ nie Punktepaare, sondern nur Doppelpunkte sein können, so besteht diese Gleichung (nach R. m. F., Satz 4) dann und nur dann, wenn $\{A^2\}$ und $\{B^2\}$ sich deckende Doppelpunkte darstellen, A und B also Geradenpaare desselben Büschels bedeuten.

$K = 0$ kann also nur eintreten, wenn das Büschel aus sich hyperoskulierenden Kegelschnitten oder aus den Paaren einer quadratischen Strahlinvolution im Büschel besteht.

Daß umgekehrt in diesen Fällen K verschwindet, ist leicht zu zeigen. Denn in einem Büschel hyperoskulierender Kegelschnitte

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gibt es immer eine Doppelgerade $B = B_1^2$, die A berührt. Wegen $\{B^2\} = 0$ und $\{A^2 B_1^2\} = \{A^2 B\} = 0$ gibt Gleichung (11) $K = 0$. Sind ferner A und B Geradenpaare desselben Büschels, so ist $\{A^2 B\} = \{A B^2\} = 0$ und $\{A^2 B^2\} = 0$, daher nach Gleichung (11) wieder $K = 0$. Mithin gilt der

Satz 4: Der Kombinantenkegelschnitt eines Büschels von Kurven 2. Ordnung verschwindet dann und nur dann, wenn das Büschel aus sich hyperoskulierenden Kegelschnitten oder aus den Strahlenpaaren einer quadratischen Involution im Büschel besteht.

b) $\{K^2\} = 0,\ K \neq 0$.

Aus $\{K^2\} = 0$, d. h. K eine Doppelgerade, folgt $\{K^3\} = 0$ oder [nach Gleichung (19′)] $\mathfrak{c} = 2\sqrt{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$. Damit läßt sich die Gleichung (18′) in die Form

$$\tfrac{1}{2}\{K^2\} = \{(\sqrt{\mathfrak{a}}\,A + \sqrt{\mathfrak{b}}\,B)^2\} \tag{34}$$

bringen, welche, wenn nicht $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleichzeitig verschwinden, aussagt, daß $\sqrt{\mathfrak{a}}\,A + \sqrt{\mathfrak{b}}\,B$ die dem Büschel angehörige Doppelgerade K darstellt. Das Büschel besteht also aus sich doppeltberührenden Kegelschnitten; denn für den Fall der hyperoskulierenden Kegelschnitte wäre ja $K = 0$.

Liegt umgekehrt ein solches Büschel vor, so enthält es eine Doppelgerade $B = B_1^2$. Für den Kombinantenkegelschnitt erhält man, wegen $\{B^2\} = 0$, aus Gleichung (11) $K = -\{A^2 B\} B$, woraus $\{K^2\} = 0$ folgt.

In dem oben ausgeschlossenen Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ ist auch $\mathfrak{c} = 0$, also nach den Gleichungen (17) $\{B^3\} : \{A B^2\} = \{A B^2\} : \{A^2 B\} = \{A^2 B\} : \{B^3\}$. Verschwindet keine der hierin auftretenden Größen, so geben diese Gleichungen die Bedingungen für das Oskulieren von A und B an (vgl. etwa S-F-D, Nr. 345).

Verschwindet etwa $\{A^3\}$, so muß nach den Gleichungen (17) auch $\{A^2 B\} = \{A B^2\} = 0$ sein. Der Doppelpunkt von A gehört dann, wegen $\{A^2 B\} = 0$, der Kurve B an, und eine der Geraden von A berührt, wegen $\{A B^2\} = 0$, die Kurve $\{B^2\}$. Auch in diesem Fall besteht das Büschel aus sich oskulierenden Kegelschnitten. $K = \tfrac{3}{2}\{A^2 B^2\}$ ist dann die doppeltgezählte Tangente an $\{B^2\}$ im Punkt $\{A^2\}$. Analoges gilt für $\{B^3\} = 0$. Verschwindet ferner eine der Größen $\{A^2 B\}$ oder $\{A B^2\}$, so verschwindet zufolge (17) auch die andre, mithin auch eine der Größen $\{A^3\}, \{B^3\}$, sodaß man den vorhergehenden Fall vor sich hat. Verschwinden $\{A^3\}$ und $\{B^3\}$ gleichzeitig, so wird ebenfalls $\{A^2 B\} = \{A B^2\} = 0$; A und B sind dann Geradenpaare, die so liegen, daß sie einen Strahl gemeinsam haben, ohne durch denselben Punkt zu gehen. $K = \tfrac{3}{2}\{A^2 B^2\}$ stellt dann diesen gemeinsamen Strahl, doppeltgezählt, dar. Das Büschel besteht in diesem Fall aus den Strahlenpaaren, die der gemeinsame Strahl mit den Strahlen durch den Schnittpunkt der beiden übrigen Strahlen der gegebenen Paare bilden.

Umgekehrt zeigt man leicht, daß für ein Büschel dieser Art oder für ein Büschel sich oskulierender Kegelschnitte $\{K^2\} = 0$, $K \neq 0$ ist.

Zusammenfassend besteht der

Satz 5: Der Kombinantenkegelschnitt eines Büschels von Kurven 2. Ordnung wird dann und nur dann zur Doppelgeraden, wenn das Büschel aus sich doppeltberührenden oder sich oskulierenden Kegelschnitten besteht oder aus den Geradenpaaren, die ein fester Strahl mit den Strahlen eines Büschels bildet, dessen Scheitel außerhalb des festen Strahls liegt.

c) $\{K^3\} = 0$, $\{K^2\} \neq 0$.

Aus dieser Annahme folgt, wie oben, die Gleichung (34), worin aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, da sonst gegen die Voraussetzung $\{K^2\} = 0$ wäre. K ist demnach ein Geradenpaar des Büschels $(A\,B)$ und $\{K^2\}$ das Quadrat des Schnittpunktes dieses Geradenpaars. Zufolge der Gleichungen (20) ist dieser Punkt einer der Grundpunkte des Büschels. Da das Geradenpaar K durch alle vier Grundpunkte geht, fallen in $\{K^2\}$ zwei dieser Punkte zusammen, d. h. A und B berühren einander in $\{K^2\}$.

Berühren umgekehrt A und B einander in einem Punkte, so enthält das durch sie bestimmte Büschel auch ein Geradenpaar $\overline{B}$ durch den Berührungspunkt. Es ist also $\{\overline{B}^3\} = 0$ und $\{A\,\overline{B}^2\} = 0$. Dafür wird aber nach den Gleichungen (17) $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} = 0$, mithin $\{K^3\} = 0$. Demnach gilt der

Satz 6: Der Kombinantenkegelschnitt eines Büschels von Kurven 2. Ordnung wird dann und nur dann zum Geradenpaar, wenn das Büschel aus sich berührenden Kegelschnitten besteht.

Die Größe $\{K^3\} = 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{c}^2$ ist die sogenannte *Taktinvariante* von A und B.[1] Die Bemerkung, daß $\{K^3\}$ mit ihr übereinstimme, macht bereits F. Mertens, a. a. O., p. 639, ohne Mitteilung der dazu erforderlichen Rechnung.

---

[1] Bezeichnen A, B Strahlgrößen n-ten Grades und x einen Punkt, und bildet man aus den Strahlgrößen 2. Grades $\{A\,x^{n-2}\}$, $\{B\,x^{n-2}\}$ nach den Gleichungen (17) die Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, so ist $4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{c}^2 = 0$ die Gleichung jener Kurve $12(n-2)$-ter Ordnung, für deren Punkte die Polarkegelschnitte bezüglich der Kurven A und B einander berühren.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: 133_2a

Autor(en)/Author(s): Müller Emil

Artikel/Article: Kombinantenkegelschnitte von Kegelschnittbüscheln. 1-15