Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Zu Fr. Schenner's Vergleich der Jaumann'schen Gravitationstheorie mit den Beobachtungen

Von

Erwin Lohr

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1924)

Fr. Schenner[1] hat, einer Anregung Prof. Oppenheim's folgend, die von Jaumann[2] in seiner Gravitationstheorie unter sehr vereinfachenden Voraussetzungen abgeleiteten Formeln für die säkularen Änderungen der Bahnelemente der Planeten an dem vorliegenden Beobachtungsmaterial geprüft und ist zu folgendem Ergebnis gelangt:

»Es muß also in Zusammenfassung der ausgeführten Rechnungen und des Erfolges ihres Vergleiches mit den Beobachtungen gesagt werden, daß die Jaumann'sche Theorie der Gravitation, so geistvoll sie auch erdacht ist und an bekannte physikalische Vorstellungen anknüpft, den tatsächlichen Verhältnissen im Sonnensystem nicht entspricht und mithin nicht geeignet ist, die da konstatierten Anomalien gegen das reine Newton'sche Gesetz zu erklären.«

Ich möchte im folgenden zeigen, daß diese Schlußfolgerung Schenner's, mit welcher über die ganze Jaumann'sche Gravitationstheorie der Stab gebrochen wird, nicht stichhaltig ist.

Zunächst muß gesagt werden, daß die, trotz vielfacher vereinfachender Voraussetzungen, recht komplizierten Jaumann'schen Deduktionen, welche zu den von Schenner einfach übernommenen Formeln führen, der rechnerischen Nachprüfung bedürfen. Als ich die Jaumann'sche Arbeit seinerzeit (1913) zu meiner eigenen Orientierung, und um darüber vorzutragen, durchrechnete, stieß ich auf verschiedene Rechenfehler, welche ich mir damals lediglich in meinem Handexemplar angemerkt habe. Leider bin ich derzeit von anderen Arbeiten so in Anspruch genommen, daß es mir unmöglich ist, die Rechnungen nochmals nachzuprüfen, was unbedingt erforderlich wäre. Ich kann also nur die Resultate meiner damaligen Rechnungen, welche ich nicht mehr besitze und welche nicht zur Publikation bestimmt waren, soweit sie in diesem Zusammenhange aktuelles Interesse besitzen, mit allem Vorbehalte mitteilen. Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe, wie in der Schenner-schen Arbeit. Nach meinen Notizen sind die beiden Formeln, welche die Drehung der Bahnebene um die Richtung der großen Achse und um die Richtung der kleinen Achse ergeben, richtig.

Für die Drehung des Perihelvektors in der Bahnebene schreibt Schenner mit Jaumann:

---

[1] Fr. Schenner, Numerische Entwicklungen zu Prof. Jaumann's Theorie der Gravitation und ihr Vergleich mit den Beobachtungen. Astronomische Nachrichten, Bd. 219, p. 307.

[2] G. Jaumann, Theorie der Gravitation. Wien. Ber., 1912, Bd. 121, p. 95.

$$\frac{d\mu_3}{dt} = -\frac{2}{3} P_1 P_2 \beta \sqrt{\frac{k}{a^9}} \frac{1+\frac{1}{4}e^2}{(1-e^2)^3} - \frac{2\beta}{9} \frac{P_1 P_2 w_3}{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$- \frac{\beta}{\sqrt{k a^5}} \left[k \left(P_1 Q_3 - \frac{8}{15} Q_1 Q_4 \right) - \frac{\beta}{6} P_1 Q_1 \right] \frac{1}{1-e^2}$$

Nach meinen Notizen hat an die Stelle von $-\frac{8}{15} Q_1 Q_4$ richtig $-\frac{1}{15} Q_1 Q_4$ zu treten.

Für die säkulare Variation der Flächengeschwindigkeit c käme zu der Formel:

$$\frac{1}{\beta c} \frac{dc}{dt} = \frac{Q_1}{a} + Q_2 - R + \frac{1}{3} (P_1 - Q_4 m) \frac{1}{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3} P_1 \frac{w_3}{ca}$$

rechts noch das Glied

$$+ \frac{Q_4 m}{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^2}{4} (2-e^2)$$

hinzu.

Schließlich lautet die Formel für die säkulare Variation der Exzentrizität e nach meinen Notizen statt:

$$\frac{1}{\beta e} \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} (P_1 - Q_4 m) \frac{1}{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2 Q_1}{a} + \frac{1}{3} \frac{P_1 w_3}{ac} \right) \frac{\sqrt{1-e^2} - (1-e^2)}{e^2}$$

richtig

$$\frac{1}{\beta e} \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \left(P_1 - \frac{1}{2} Q_4 m \right) \frac{1}{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2 Q_1}{a} + \frac{1}{3} \frac{P_1 w_3}{ac} \right) \frac{\sqrt{1-e^2} - (1-e^2)}{e^2} +$$

$$+ \frac{Q_4 m}{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^2}{4} (3-e^2).$$

Die hier mitgeteilten Korrekturen betreffen allerdings durchwegs Glieder, die mit Q_4 behaftet sind, teilweise sind sie noch mit e^2 (e = numerische Exzentrizität) proportional. Legt man für $\frac{\beta}{n}$ die von Jaumann berechnete Größenordnung grunde, so wird Q_4 sehr klein und die Korrekturen dürften voraussichtlich ins Gewicht fallen. Die Jaumann'sche Abschätzung des Wertes von $\frac{\beta}{n}$ ist aber, wie Schenner ganz richtig bemerkt, nicht zwingend.

Um ein abschließendes Urteil über die Leistungsfähigkeit der Jaumann'schen Gravitationstheorie zu gewinnen, wäre, wie schon betont, eine neuerliche, sorgfältige Durcharbeitung aller Deduktionen unerläßlich. Diese Deduktionen hätten aber jedenfalls von dem erweiterten Differentialgleichungssystem auszugehen, welches Schenner gar nicht in Betracht zieht. Damit komme ich zu den tieferliegenden Gründen, welche gegen die Schlußfolgerungen Schenner's sprechen.

Jaumann hat der erweiterten Form seiner Theorie folgende Differentialgesetze zugrunde gelegt.

$$\rho\alpha \frac{d\chi}{dt} + \beta\chi \operatorname{div}(\rho\mathfrak{v}) + \varkappa\rho = \operatorname{div}(n\nabla\chi) \tag{I}$$

$$\rho\alpha' \frac{d\chi'}{dt} + \beta'\chi' \operatorname{div}(\rho\mathfrak{v}) - \varkappa'\rho = \operatorname{div}(n'\nabla\chi') \tag{II}$$

Gravitationsgleichungen.

$$\rho\alpha'' \frac{dT}{dt} + \beta'' T \operatorname{div}\mathfrak{v} - \varkappa''\rho = \operatorname{div}(n''\nabla T) \tag{III}$$

Wärmegleichung.

$$\rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \rho\nabla(\beta\chi + \beta'\chi') + \nabla(\beta'' T) = 0 \tag{IV}$$

Bewegungsgleichung.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \tag{V}$$

Dichtegleichung (Kontinuitätsgleichung).

Es bedeutet ρ die Dichte; χ, χ' zwei verschiedene Gravitationspotentiale als reale, skalare Zustandsvariable; T die Temperatur; $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor. Die übrigen Größen sind positive, skalare Materialkonstante, beziehungsweise universelle Konstante, zum Teil können sie auch Zustandsfunktionen sein.

Gilt die Relation:

$$\varkappa'' = \varkappa - \varkappa' \tag{1}$$

und hat die Energie pro Volumeinheit U die Form:

$$U = \frac{1}{2}\rho\mathfrak{v}^2 + \rho\alpha'' T + \rho(\alpha\chi + \alpha'\chi'), \tag{2}$$

so folgt aus (I) bis (V) die Energiegleichung:

$$\frac{dU}{dt} + U \operatorname{div}\mathfrak{v} + \operatorname{div}[(\beta'' T + (\beta\chi + \beta'\chi')\rho)\mathfrak{v} - n''\nabla T - (n\nabla\chi + n'\nabla\chi')] = 0. \tag{3}$$

$-(n\nabla\chi + n'\nabla\chi')$ ist der für die Jaumann'sche Theorie charakteristische Gravitationsenergiefluß.

[1] G. Jaumann, Theorie der Gravitation. L. c., p. 177.

Setzt man wieder voraus, daß n, n', β, β' universelle Konstante bedeuten, so folgt in erster Näherung:

$$\rho\left(\frac{\beta\varkappa}{n}-\frac{\beta'\varkappa'}{n'}\right)=\operatorname{div}\nabla(\beta\chi+\beta'\chi').$$

Die Gravitationskonstante ist dann durch:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\beta\varkappa}{n}-\frac{\beta'\varkappa'}{n'}\right)=C \tag{4}$$

gegeben und hat in den Weltkörpern den bekannten universellen Wert. Soll der Weltäther, obwohl seine Dichte von Null verschieden ist, exakt keine Gravitationsanziehung ausüben, so muß

$$C=0$$

also

$$\frac{\beta\varkappa}{n}-\frac{\beta'\varkappa'}{n'}=0$$

und nicht, wie Jaumann ansetzt:

$$\varkappa-\varkappa'=0$$

sein. Soll gemäß einer sehr interessanten Anregung Jaumann's der Weltäther eine äußerst geringe abstoßende Gravitationswirkung haben, welche in sehr großer Entfernung von den Weltkörpern, deren Gravitationsanziehung kompensiert, so muß C für den Weltäther negativ sein, also:

$$\frac{\beta\varkappa}{n}-\frac{\beta'\varkappa'}{n'}<0. \tag{5}$$

Die Folgerung Jaumann's, daß dann im Weltäther

$$\varkappa-\varkappa'<0$$

sein müsse, dort also zufolge der Wärmegleichung eine spontane Abkühlung auftreten müsse, ist in diesem Zusammenhange nicht zwingend. Die Verallgemeinerung des Jaumann'schen Gleichungssystems hatte ja gerade auch die Aufgabe zu erfüllen, die spontane Wärmeproduktion in den Weltkörpern ($-\varkappa''\rho$), welche die Strahlungsverluste energetisch kompensiert, trotz der universellen Werte von β, n, C, frei verfügbar zu machen und so eine Anpassung an die Erfahrung zu ermöglichen. (Schon aus diesem Grunde ist nicht zu erwarten, daß das ursprüngliche Jaumann'sche Gleichungssystem eine volle numerische Übereinstimmung mit den Beobachtungen ergäbe.)

Die Annahme, daß im Weltäther

$$\varkappa-\varkappa'<0$$

sei, ist aber aus einem anderen Grunde notwendig. Da, wieder in erster Näherung:

$$(\varkappa-\varkappa')\,\rho = \operatorname{div}\,[n\nabla\chi+n'\nabla\chi']$$

gilt, hat der Gravitationsenergiefluß seine Quellen dort, wo $(\varkappa-\varkappa')\,\rho$ negativ, seine Senken dort, wo $(\varkappa-\varkappa')\,\rho$ positiv ist. Soll er den Weltkörpern Energie zuführen, so muß in ihnen

$$(\varkappa-\varkappa')\,\rho > 0 \tag{6}$$

sein, soll diese Energie aber nicht aus einem physikalisch unfaßbaren »Unendlichen« herkommen, so müssen im Endlichen gelegene Quellen für diesen Energiefluß existieren und daraus ergibt sich die Annahme:

$$(\varkappa-\varkappa')\,\rho < 0 \tag{7}$$

im Weltäther. Diese spontane Abkühlung des Weltäthers durchbricht natürlich das Entropieprinzip, welches dann also im Weltäther seine Geltung verlieren würde, worauf ich schon bei einer früheren Gelegenheit hingewiesen habe.[1]

Nimmt man mit Jaumann eine allmähliche Strahlungsabsorption im Weltäther an, so ist der energetische Kreislauf geschlossen — energetische Stabilisierung des Sonnensystems —, ein physikalisch hervorragend schöner Gedanke.

Die hier skizzierte und im Zusammenhange mit prinzipiellen Erwägungen vorgenommene Verallgemeinerung der Jaumann'schen Differentialgesetze, bringt eine größere Anzahl von Konstanten ins Spiel, durch welche die Anpassung an die Erfahrung naturgemäß erleichtert wird.

Bei einer neuerlichen Durchrechnung zum Zwecke eines numerischen Vergleiches mit den Beobachtungen müßte aber auch von allgemeineren Voraussetzungen ausgegangen werden, als dies bei den Jaumann'schen Deduktionen der Fall war.

So nimmt Jaumann in den kugelförmigen Planeten konstante Dichte an und setzt ferner die Materialkonstanten α und $\varkappa$, beziehungsweise α' und $\varkappa'$ innerhalb jedes Planeten konstant voraus.

Nun können $\varkappa$ und $\varkappa'$, wenn sie nur den Bedingungen (4) und (6) genügen, im übrigen nicht nur beliebige Materialkonstante, sondern sogar beliebige positive Materialfunktionen (Zustandsfunktionen) sein. Für α und α' besteht die Bedingung, daß

$$\rho\alpha = \frac{\partial U}{\partial\chi}; \quad \rho\alpha' = \frac{\partial U}{\partial\chi'}$$

---

[1] E. Lohr, Entropieprinzip und geschlossenes Gleichungssystem. Wiener Denkschr., Bd. 93, 1916, p. 419.

sein muß. Hängt also α und α' noch von weiteren Zustandsvariablen ab, beispielsweise etwa noch von irgendeiner Variablen τ, so besteht zwischen $\frac{\partial U}{\partial \chi}$ und $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ eine Beziehung, welche bei der Bildung der Energiegleichung von Einfluß ist. Ich habe in anderem Zusammenhang[1] die Glieder

$$\rho\alpha \frac{d\chi}{dt}, \text{ beziehungsweise } \rho\alpha' \frac{d\chi'}{dt}$$

verallgemeinernd durch

$$\sum_{\varkappa} \rho_\varkappa \alpha_\varkappa \frac{d\chi}{dt}, \text{ beziehungsweise } \sum_{\varkappa} \rho_\varkappa \alpha'_\varkappa \frac{d\chi'}{dt}$$

ersetzt. Die ziemlich umfangreichen Untersuchungen der zitierten Arbeit, in welcher ich im Zusammenhange mit dem Strahlungsentropiefluß auch zu ganz neuartigen Erweiterungen der Jaumannschen Gravitationsgleichungen gelangte, können im Rahmen dieses Artikels nicht angeschnitten werden. Wir wollen hier vereinfachend annehmen, daß die ρ_x die partiellen Dichten der einzelnen chemischen Elemente bedeuten und daß für jedes chemische Element einzeln die Kontinuitätsgleichung gelte, also:[2]

$$\frac{d\rho_\varkappa}{dt} + \rho_\varkappa \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \qquad (\mathrm{V}_\varkappa)$$

Die $\alpha_\varkappa$, beziehungsweise $\alpha'_\varkappa$ seien positive Konstante. Setzen wir noch

$$U = \frac{1}{2} \rho \mathfrak{v}^2 + \rho\alpha'' T + \sum_\varkappa \rho_\varkappa (\alpha_\varkappa \chi + \alpha'_\varkappa \chi')$$

so ergibt sich auch jetzt wieder die Energiegleichung (3). Schreiben wir nun:

$$\sum_\varkappa \rho_\varkappa \alpha_\varkappa = \rho\alpha \text{ und } \sum_\varkappa \rho_\varkappa \alpha'_\varkappa = \rho\alpha'$$

so werden jetzt α und α' jedenfalls Funktionen der chemischen Zusammensetzung sein.

---

[1] E. Lohr, Zur Differentialform des Entropieprinzips. Wiener Denkschr., 1923 (im Druck): Phys. Berichte, 1923, p. 961.

[2] Selbstverständlich kann man dann auch $\rho\alpha''$ durch $\sum_\varkappa \rho_\varkappa \alpha''_\varkappa$ ersetzen, uns hier aber nicht interessiert; überhaupt sind die angeschriebenen Differentialgleichungen nur ein spezialisierter Ausschnitt aus dem allgemeinen System physikalisch-chemischer Differentialgesetze.

Man überblickt, welch reiche Anpassungsmöglichkeiten sich da ergeben und daß die praktische Durchführung dieser Anpassungen vom astrophysikalischen Standpunkte sehr interessant wäre. Natürlich ist die Verallgemeinerungsfähigkeit der Jaumann'schen Differentialgleichungen damit keineswegs erschöpft. Sehr naheliegend wäre es z. B.[1] in Gleichung (I) statt $\beta\chi\,\mathrm{div}\,(\rho\mathfrak{v})$, $(\beta_1\chi+\beta_1'\chi')\,\mathrm{div}\,(\rho\mathfrak{v})$ zu schreiben und analog in Gleichung (II) statt $\beta'\chi'\,\mathrm{div}\,(\rho\mathfrak{v})$, $(\beta_2\chi+\beta_2'\chi')\,\mathrm{div}\,(\rho\mathfrak{v})$ mit den aus dem Energiesatze fließenden Bedingungen:

$$\beta_1+\beta_2=\beta;\; \beta_1'+\beta_2'=\beta' \tag{8}$$

Nur β und β' braucht dann universell zu sein, β_1, β_2, β_1', β_2' können, wenn nur die Bedingungen (8) erfüllt sind, im übrigen ganz beliebige Zustandsfunktionen bedeuten.

Die Darlegungen dieses Artikels zusammenfassend möchte ich sagen: So erfreulich es ist, daß die Jaumann'sche Gravitationstheorie auch einmal von astronomischer Seite Beachtung gefunden hat, so muß doch der Schenner'sche Versuch einer Prüfung dieser Theorie an der Erfahrung als ein mit völlig unzulänglichen Mitteln unternommener und darum auch mißglückter bezeichnet werden. Was Schenner bestenfalls gezeigt hat, ist lediglich, daß die den speziellen Rechnungen Jaumann's zugrunde liegenden, sehr einschneidenden Vereinfachungen unstatthaft sind, über die Leistungsfähigkeit der Jaumann'schen Theorie aus ihren physikalischen Grundlagen heraus läßt sich aus den Schenner'schen Untersuchungen gar nichts schließen. Nicht unerwähnt darf bleiben, da dieser Artikel keinen Anlaß bot, darüber ausführlicher zu sprechen, daß eine Hauptleistung der Theorie in der physikalisch befriedigenden Lösung der Stabilitätsprobleme, welche die Planetenbahnen bieten, zu suchen ist.

Es wäre jedenfalls außerordentlich dankenswert und aussichtsreich, wenn die ganze Deduktionsarbeit von berufener astronomischer Seite, und zwar von den verallgemeinerten Jaumann'schen Differentialgleichungen ausgehend und zunächst in tunlichster Allgemeinheit, nochmals aufgenommen und durchgeführt würde.

Anmerkung bei der Korrektur. Um den Weltäther von der Dichte ρ_0 exakt impondevabel zu machen, wird man entweder die Differentialgesetze etwas abändern, derart, daß in den mit β, β' behafteten Gliedern ρ durch $\rho-\rho_0$ ersetzt wird (erste Jaumann'sche Annahme), oder man wählt im Weltäther, abweichend von den Weltkörpern, $\beta=\beta'=0$ (zweite Jaumann'sche Annahme). Im zweiten Falle sind die β-Werte also sicher nicht mehr allgemein universell, was z. B. in Formel (4) und (5) zu beachten ist, insbesonders bedürfen dann die Grenzschichten einer gesonderten Behandlung.

[1] Siehe p. 6, Anm. 1.