Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Die Kraftlinien in der speziellen Relativitätstheorie

Von

Gustav Jäger

(w. M. Akad. Wiss.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. März 1924)

Die Komponenten einer Kraft seien X, Y, Z, bezogen auf ein ruhendes rechtwinkeliges Koordinatensystem S. Ein zweites System S', dessen x'-Achse mit der x-Achse des ersten Systems zusammenfällt, und dessen y'- und z'-Achse der y-, bezüglich z-Achse parallel sind, bewege sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x-Achse. Wir fragen: Wie transformieren sich die Kräfte X', Y', Z' auf das ungestrichene Koordinatensystem? Diese Frage wird immer so beantwortet, daß man den Boden der Mechanik verläßt, sie für elektrische Kräfte löst und das Resultat auch für die Mechanik als gültig annimmt. Wir wollen zeigen, daß man auf einem sehr einfachen direkten Weg die Transformierung der Kräfte erlangen kann.

Zur Übertragung einer Erscheinung in S auf S' bedient man sich der Lorentz-Transformationen. Wir denken uns parallel zur x-Achse ein Kraftfeld von der Intensität X. Es hat also die Eigenschaft, auf die Ruhmasse m_0 die Kraft $m_0 X$ auszuüben. Hat jedoch m_0 die Geschwindigkeit v, also bezüglich S' keine Geschwindigkeit, so wirkt in S' auf m_0 die Kraft $m_0 X'$.

Zur Erlangung der Beziehung zwischen X und X' wollen wir folgendes Prinzip benützen:

Stellen wir ein Kraftfeld, bezogen auf ein relativ ruhendes System, durch seine Kraftlinien dar, so ändert sich deren gegenseitige Lage für ein bewegtes Bezugssystem entsprechend den Lorentz-Transformationen unter Beibehaltung der ihnen zugelegten Eigenschaften. Das heißt: auch im System S' ist das Kraftfeld durch die Kraftlinien so bestimmt, daß die Richtung der Linien die Richtung der Kraft und die Dichte der Linien die Größe der Kraft darstellt.

Kehren wir zu unserem speziellen Fall zurück, so erkennen wir nach unserem Prinzip ohneweiters, daß sich beim Übergang von S zu S' weder die Richtung noch die Dichte der Kraftlinien ändert, daß somit

$$X' = X$$

ist.

Anders ist es für eine zur x-Achse senkrechte Richtung. Denken wir uns etwa im System S ein homogenes Feld zur y-Achse von der Intensität Y. Wir legen senkrecht zu den Kraftlinien eine Ebene und umgrenzen auf ihr die Flächeneinheit, so gehen durch diese Y Kraftlinien. Bezogen auf das System S' erfährt aber diese Flächeneinheit die Lorentz-Kontraktion, hat also nur noch die Fläche $\frac{1}{\beta}$, wenn wir unter β die Größe $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ($c =$ Lichtgeschwindigkeit) verstehen. Diese Fläche enthält aber die alte Zahl von Kraftlinien; die Kraftliniendichte und damit die Kraft selbst ist also größer geworden, und zwar erhalten wir

$$Y' = \beta Y.$$

Gleiches gilt natürlich auch für die z'-Achse, also

$$Z' = \beta Z.$$

Auf die Masse m_0, die zu S' relativ ruht, wirkt somit parallel zur y'-Achse die Kraft $m_0 \beta Y$, woraus man jetzt in der gewöhnlichen Weise die »longitudinale, transversale« Masse usw. ableiten kann.

Der wesentliche Erfolg dieser Auffassung ist also darin zu suchen, daß man nicht nötig hat, erst die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf eine elektrische Masse zu suchen, und dann anzunehmen, daß die Gleichungen für »mechanische« Kräfte denselben Gesetzen folgen, sondern daß man direkt für jedes beliebige Kraftfeld die Erscheinungen richtig beschreiben kann.

Wir wollen eine Anwendung unseres Prinzipes auf das elektromagnetische Feld machen. Ruhend mit S denken wir uns ein elektrisches und ein magnetisches Feld verbunden, dessen Intensitäten $\mathfrak{E}$ bezüglich $\mathfrak{H}$ mit den Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, beziehungsweise $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind. Im System S' denken wir uns einen geradlinigen Leiter der Elektrizität in der x-Achse von 1 *cm* Länge. Dieser Leiter schneidet keine magnetischen Kraftlinien des Systems S, in ihm wird keine elektromotorische Kraft induziert. Es ist also

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}.$$

Wir legen den Leiter in die y'-Achse. Er schneidet in der Sekunde $v\mathfrak{N}$ magnetische Kraftlinien. Es wird infolgedessen nach bekannten Regeln in ihm eine elektromotorische Kraft $-\frac{v\mathfrak{N}}{c}$ entstehen, also eine Gesamtkraft

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} - \frac{v\mathfrak{N}}{c}.$$

In gleicher Weise finden wir

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} + \frac{v\mathfrak{M}}{c}.$$

Für das magnetische Feld können wir genau dieselbe Überlegung machen. Auch hier gilt der Satz: Wenn einen Körper elektrische Kraftlinien schneiden, rufen sie in ihm ein magnetisches Feld hervor. Diese wegen ihrer Bedeutungslosigkeit für die Technik weniger geläufige Betrachtungsweise können wir uns etwa folgendermaßen zurechtlegen:

Ein elektrischer Punkt e bewege sich geradlinig mit der Geschwindigkeit v. Wir können ihn dann als Stromelement von der Intensität $e\,v$ betrachten. In der senkrechten Enfernung r von seiner Bahn erzeugt er das magnetische Feld $\frac{e\,v}{v^2}\cdot$ Die Dichte der elektrischen Kraftlinien in dieser Entfernung ist $\frac{e}{r^2}\cdot$ Ein Kreisbogen vom Radius r und der Länge Eins, dessen Ebene senkrecht zur Bahn des elektrischen Punktes steht, wird in der Sekunde von

$$\frac{e\,v}{r^2} = \mathfrak{E}\,v$$

Kraftlinien geschnitten, wenn wir

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^2}$$

die elektrische Feldstärke nennen. Die Richtung der magnetischen Kraft ist durch die Ampère'sche Schwimmregel gegeben. Das Ganze läßt sich nun auch so ausdrücken: Schneiden elektrische Kraftlinien einen Körper, so entsteht ein magnetisches Feld, dessen Intensität nach einer bestimmten Richtung gleich der Zahl der Kraftlinien ist, die eine mit dieser Richtung zusammenfallende Gerade von 1 *cm* Länge in der Sekunde durchschneiden. Natürlich ist dies in entsprechender Weise umzuändern, wenn man aus dem elektrostatischen in das elektromagnetische Maßsystem übergeht.

In ganz analoger Weise wie für elektrische können wir nun auch für die magnetischen Kräfte die Beziehung zwischen den magnetischen Feldern im ruhenden und bewegten System aufstellen. Es ist

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L},\ \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + \frac{v}{c}\,\mathfrak{Z},\ \mathfrak{N}' = \mathfrak{N} - \frac{v}{c}\,\mathfrak{Y}.$$

Diese Gleichungen sind aber ohne Rücksicht auf die Lorentz-Kontraktion des elektromagnetischen Feldes abgeleitet. Ziehen wir diese in Betracht, so haben wir zu berücksichtigen, daß für das bewegte System die Kräfte $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sich vergrößern, d. h. wir haben sie noch mit $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ zu multiplizieren und erhalten somit die Gleichungen

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}' = \beta\left(\mathfrak{Y} - \frac{v}{c}\mathfrak{N}\right),\ \mathfrak{Z}' = \beta\left(\mathfrak{Z} + \frac{v}{c}\mathfrak{M}\right);$$

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L},\ \mathfrak{M}' = \beta\left(\mathfrak{M} + \frac{v}{c}\mathfrak{Z}\right),\ \mathfrak{N}' = \beta\left(\mathfrak{N} - \frac{v}{c}\mathfrak{Y}\right).$$

In ganz analoger Weise lassen sich die Gleichungen ableiten, wenn wir die ungestrichenen Größen durch die gestrichenen ausdrücken wollen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: 133_2a

Autor(en)/Author(s): Jäger Gustav

Artikel/Article: Die Kraftlinien in der speziellen Relativitätstheorie. 43-46