Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Zur Integration der linearen Differentialgleichungen

(4. Mitteilung)

Von

Dr. Alfred Tauber in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1924)

§ 1. Über die Integraldarstellung der Parameterlösungen.

Die Betrachtung linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten kann auf den Fall

$$L_0(x)\frac{d^n y}{d x^n}+L_1(x)\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}+\ldots+L_{n-1}(x)\frac{d y}{d x}+L_n y=0 \quad (1)$$

abgestellt werden, wo die Grade der Polynome $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$,. höchstens n, $n-1$, $n-2$,.. betragen, und demgemäß $L_n(x)=L_n$ eine Konstante bedeutet. Dieser Differentialgleichung soll das Integral

$$\int_x^c \Omega(x, c, v)\, d v \quad (2)$$

zugleich mit seinen nach c genommenen Differentialquotienten aller Ordnungen genügen, derart, daß jeder mögliche Integrationsweg eine Lösung von (1) produziert und die Kenntnis von Ω die vollständige Integration von (1) bewirkt.

Als Vorbedingungen für die Funktion Ω sind dabei, in Verallgemeinerung der früheren Sätze bezüglich des Falles $n=2$ angenommen:

1. Für $v=x$ verschwindet Ω, $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial^{n-3} \Omega}{\partial x^{n-3}}$ und geht $\frac{\partial^{n-2} \Omega}{\partial x^{n-2}}$ in eine von c unabhängige, durch

$$L_0(x)\varphi'(x)+L_1(x)\varphi(x)=0 \quad (3)$$

(bis auf einen konstanten Faktor) definierte Funktion $\varphi(x)$ über.

2. Für $v=c$ verschwindet $\frac{\partial^{n-1} \Omega}{\partial x^{n-1}}$. Wird daher der Ausdruck (2) als Funktion der beiden Variabeln x und $\varepsilon=c-x$ aufgefaßt, so beginnt seine Entwicklung nach Potenzen von ε mit $\varphi(x)\frac{(-1)^n \varepsilon^{n-1}}{(n-1)!}$. Ihm korrespondiert eine andere Lösung $\overline{Y}$

von (1), deren Potenzreihenentwicklung mit $\frac{1}{L_0(x)} \frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!}$ beginnt und die unter einem auch der Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} \bar{L}_\varkappa(x) \frac{\partial^{n-\varkappa} \bar{Y}}{\partial c^{n-\varkappa}} = 0, \qquad \bar{L}_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} (-1)^\lambda \binom{n-\lambda}{n-\varkappa} L_\lambda^{(\varkappa-\lambda)}(x) \tag{4}$$

genügt, denn das analog zu (2) gebildete Integral

$$\int_x^c \bar{\Omega}(c, x, v)\, dv,$$

wo $\bar{\Omega}$ aus Ω dadurch entsteht, daß die Koeffizienten der Polynome L durch die korrespondierenden der $\bar{L}$ ersetzt werden, stellt eine Lösung von (4) vor, deren Potenzreihenentwicklung $\bar{\varphi}(x) \frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$ lautet, wenn $\bar{\varphi}(x)$ die zu (3) analoge Bedingung $\bar{L}_0(x)\bar{\varphi}'(x) + \bar{L}_1(x)\bar{\varphi}(x) = 0$ erfüllt. Also ist

$$\bar{Y} = \frac{1}{L_0(x)\bar{\varphi}(x)} \int_x^c \bar{\Omega}(c, x, v)\, dv. \tag{5}$$

Um die Funktion Ω zu bestimmen, substituiert man das Integral (2) in die vorgelegte Differentialgleichung, die sich dadurch in

$$\int_x^c \left[L_0(x) \frac{\partial^n \Omega}{\partial x^n} + L_1(x) \frac{\partial^{n-1}\Omega}{\partial x^{n-1}} + \ldots + L_n \Omega \right] dv = L_0(x) \left(\frac{\partial^{n-1}\Omega}{\partial x^{n-1}} \right)^{v=x}$$

verwandelt, oder weil die rechte Seite vermöge der obigen Bedingung (2) mit

$$-\int_x^c \frac{\partial}{\partial v} \left[L_0(v) \frac{\partial^{n-1}\Omega}{\partial x^{n-1}} \right] dv$$

übereinstimmt, in die Form $\int_x^c K\, dv = 0$

$$K = \frac{\partial}{\partial v} \left[L_0(v) \frac{\partial^{n-1}\Omega}{\partial x^{n-1}} \right] + \sum_{\varkappa=0}^{n} L_\varkappa(x) \frac{\partial^{n-\varkappa}\Omega}{\partial x^{n-\varkappa}}. \tag{6}$$

Es steht nun frei, die Funktion Ω wie in dem früher behandelten Fall $n = 2$ eindeutig aus der Bedingung $K = 0$ zu bestimmen, aber auch mit Hilfe irgendeiner sowohl für $v = x$ als für $v = c$ verschwindenden Funktion $K_1(x, c, v)$ aus der Bedingung

$$K + \frac{\partial K_1}{\partial v} = 0.$$

Denkt man die gesuchte Funktion Ω in eine Potenzreihe nach $x-v$ entwickelt

$$\Omega = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{n+h-2}}{(n+h-2)!} \Omega_h(c, v), \tag{7}$$

wobei wegen der oben an Ω gestellten Forderungen

$$\Omega_0(c,x) = \varphi(x), \quad \Omega_h(c,c) = 0 \text{ für } h > 0 \tag{8}$$

sein muß, ebenso die Polynome

$$L_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=\varkappa}^{n} \frac{(x-v)^{\lambda-\varkappa}}{(\lambda-\varkappa)!} L_\varkappa^{(\lambda-\varkappa)}(v),$$

so ergibt sich für K aus (6) der Ausdruck

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(x-v)^{h-1}}{(h-1)!} \frac{\partial}{\partial v} [L_0(v)\,\Omega_h(c,v)] - \sum_{h=2}^{\infty} \frac{(x-v)^{h-2}}{(h-2)!} L_0(v)\,\Omega_h(c,v) +$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{\lambda=\varkappa}^{n} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{\lambda+h-2}}{(\varkappa+h-2)!} \frac{L_\varkappa^{(\lambda-\varkappa)}(v)}{(\lambda-\varkappa)!} \Omega_h(c, v), \tag{9}$$

dessen zweite Zeile man unter Vertauschung der Summationen über $\varkappa$ und λ

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{\lambda+h-2}}{(\lambda+h-2)!} \binom{\lambda+h-2}{\varkappa+h-2} L_\varkappa^{(\lambda-\varkappa)}(v)\,\Omega_h(c,v) \tag{10}$$

schreiben kann. Es hebt sich der Subtrahend in der ersten Zeile von (9) mit der Teilsumme $\lambda = 0$ aus (10), während sich der Minuend mit der Teilsumme $\lambda = 1$ zusammenziehen läßt. Man erhält so, bei Gebrauch der abkürzenden Bezeichnung

$$g_{h\lambda}(v) = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \binom{\lambda+h-2}{\varkappa+h-2} L_\varkappa^{(\lambda-\varkappa)}(v) \tag{11}$$

den Ausdruck (6) nach Potenzen von $(x-v)$ geordnet,

$$K = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^h}{h!} K_h,$$

$$K_h = L_0(v) \frac{\partial\, \Omega_{h+1}}{\partial v} + g_{h+2,1}(v)\,\Omega_{h+1} + \sum_{\lambda=2}^{n} g_{h-\lambda+2,\lambda}(v)\,\Omega_{h-\lambda+2}. \tag{12}$$

(Für $h < \lambda - 2$ ist rechts $\Omega_{h-\lambda}$ gleich Null zu verstehen.) Durch die Substitution

$$\Omega_h(c, v) = \frac{\varphi(v)}{L_0(v)^h} F_h(c, v) \tag{13}$$

vereinfacht sich der Koeffizient K_h in

$$K_h = \frac{\varphi(v)}{L_0(v)^h} \Phi_h, \quad \Phi_h = \frac{\partial F_{h+1}}{\partial v} + \sum_2^n L_0(v)^{\lambda-2} g_{h-\lambda+2,\lambda}(v) F_{h-\lambda+2}. \tag{14}$$

Die Bedingung $K = 0$ oder $\Phi_h = 0$ liefert demnach eine die Funktionen $F_h(c, v)$ als Polynome von c und v eindeutig bestimmende Rekursion, denn $F_1, F_2, ..$ verschwinden, sowie $\Omega_1, \Omega_2,$ für $v = c$. Das erste Polynom F_0 besitzt wegen $\Omega_0(c, v) = \varphi(v)$ den Wert 1.

In der Rekursion $\Phi_h = 0$ kommt, wie noch hervorzuheben, die Konstante $L_1(0)$ nicht vor, weil $g_{h2}, g_{h3}, .$ nur $L_1'(v), L_1''(v), .$ enthalten, aber nicht $L_1(v)$.

Die weitere Entwicklung von F_h nach Potenzen von $c-v$,

$$F_h(c, v) = \sum_\nu \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} F_{h\nu}(v), \tag{15}$$

welche für Ω, vgl. (7), (13), einen Ansatz

$$\Omega = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(v) \frac{(x-v)^{n+h-2}}{(n+h-2)!} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} \frac{F_{h\nu}(v)}{L_0(v)^h} \tag{16}$$

involviert, führt zu einer solchen von $\Phi_h = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} \Phi_{h\nu}$

$$\Phi_{h\nu} = -F_{h+1,\nu+1} + F'_{h+1,\nu} + \sum_{\lambda=2}^{n} g_{h-\lambda+2,\lambda} F_{h-\lambda+2,\nu} \tag{17}$$

(die hier allein auftretende Variable v ist nicht ausdrücklich vermerkt). Daher bestimmt die Bedingung $K = 0$ oder $\Phi_{h\nu} = 0$ die Polynome F mit dem zweiten Index $\nu+1$ aus jenen mit dem zweiten Index ν. Hierbei ist mit Ausnahme von $F_{00} = 1$ sowohl $F_{0\nu}$ als F_{h0} gleich Null.

Anstatt Ω in eine Potenzreihe nach $x-v$ zu entwickeln, wie in (7), kann dies auch bezüglich $c-v$ geschehen

$$\Omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} \omega_\nu(x, v), \tag{18}$$

dann wird gemäß den obigen Bedingungen für Ω

$$\omega_0(x, v) = \varphi(v) \frac{(x-v)^{n-2}}{(n-2)!},$$

und $\omega_1, \omega_2, \ldots$ müssen durch $(x-v)^{n-1}$ teilbar sein. Die Rekursion, welche aus der Bedingung $K = 0$ entsteht, indem man in (6) den Koeffizienten einer jeden Potenz $(c-v)^\nu$ nullsetzt

$$L_0(v) \frac{\partial^{n-1} \omega_{\nu+1}}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial}{\partial v}\left[L_0(v) \frac{\partial^{n-1} \omega_\nu}{\partial x^{n-1}}\right] + \sum_{\varkappa=0}^{n} L_\varkappa(x) \frac{\partial^{n-\varkappa} \omega_\nu}{\partial x^{n-\varkappa}}, \quad (19)$$

bestimmt daher diese Funktionen ω eindeutig und deren Rückführung auf Polynome von x, v wird durch die Substitution

$$\omega_\nu(x, v) = \frac{\varphi(v)}{L_0(v)^\nu} f_\nu(x, v) \quad (20)$$

geleistet. Jetzt entwickelt man auch $f_\nu(x, v)$ nach Potenzen von $x-v$

$$f_\nu(x, v) = \sum_h \frac{(x-v)^{n+h-2}}{(n+h-2)!} f_{h\nu}(v), \quad (21)$$

wodurch zwischen dem Polynom $f_{h\nu}(v)$ und dem früheren $F_{h\nu}(v)$ der Zusammenhang $f_{h\nu}(v) = F_{h\nu}(v)/L_0(v)^{\nu-h}$, und für ersteres, nach (17), die Rekursion

$$f_{h+1,\nu+1} = L_0 f'_{h+1,\nu} + (h+1-\nu) L'_0 f_{h+1,\nu} + \sum_{\lambda=2}^{n} g_{h-\lambda+2,\lambda} f_{h-\lambda+2,\nu} \quad (22)$$

entsteht. Die Polynome $f_{h\nu}$ reduzieren sich auf Konstante, wenn $L'_0, L'_1, L_2, L_3, \ldots$ konstant sind.

Beispielsweise findet man für die Differentialgleichung

$$x y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \ldots = 0$$

die Generierende

$$f = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{f_{h\nu}}{\nu!} \xi^h \eta^\nu$$

aus der (22) entsprechenden Differentialgleichung

$$(1+\eta) \frac{\partial f}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = f \sum_2^n \alpha_\lambda \xi^{\lambda-1}, \quad f = 1 \text{ für } \xi = 0$$

in expliziter Darstellung

$$\lg f = \sum_{1}^{n-1} \alpha_{\lambda+1}\, \xi^{\lambda}\, \frac{(1+\eta)^{\lambda}-1}{\lambda}$$

Von den möglichen Modifikationen der Bedingung $K = 0$ sei zunächst nur eine solche betrachtet, welche bezüglich der in (16) auftretenden Funktionen $F_{h\nu}$ wieder diejenigen mit dem zweiten Index $\nu+1$ und ν in Beziehung bringt. Dies trifft zu, wenn die oben mit K_1 bezeichnete Funktion

$$K_1 = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(v)\, \frac{(x-v)^h}{h!}\, \frac{(c-v)^{\nu}}{\nu!}\, \frac{F'_{h\nu}(v)}{L_0(v)^{h-1}} \tag{23}$$

gewählt wird. Die gesuchte Rekursion der Polynome $F_{h\nu}(v)$ ergibt sich aus der Bedingung $K + \frac{\partial K_1}{\partial v} = 0$ durch Nullsetzung des Koeffizienten von $(x-v)^h (c-v)^{\nu}$

$$F_{h+1,\nu+1} + L_0 F'_{h,\nu+1} = L_0 F''_{h\nu} - g_{h1} F'_{h\nu} + \sum_{\lambda=2}^{n} L_0^{\lambda-2} g_{h-\lambda+2,\lambda} F_{h-\lambda+2,\nu}. \tag{24}$$

Für gewisse einfache Typen von Differentialgleichungen (vgl. §§ 2 bis 4) reichen schon die bisher entwickelten Formeln, sowie einfache Differenziationsprozesse aus, um die explizite Integration zu erzielen. Die Quadraturdarstellung der Parameterlösungen hat eben den Zweck, diese durch (mehrfache) Quadraturen **über explizit angebbare Funktionen** auszudrücken, namentlich durch Quadraturen über hypergeometrische Reihen von mehreren Veränderlichen. Denn eine nichtexplizite, bloß rekursive Bestimmung von Ω würde keinen Fortschritt gegenüber der früher für die Parameterlösungen gegebenen Darstellung bedeuten, deren Prinzip, wie noch zu bemerken ist, sich auf lineare partielle Differentialgleichungen ausdehnen läßt, indem man für die Lösung y einer solchen, von der Ordnung n mit den Unabhängigen x, x_1, x_2 den Ansatz

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(c-x)^{\lambda}}{\lambda!} f_{\lambda}(x, x_1, x_2, \ldots) +$$

$$+ \sum_{\lambda=n}^{\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \frac{(c-x)^{\lambda}}{\lambda!} \frac{(c_1-x_1)^{\lambda_1}}{\lambda_1!} \frac{(c_2-x_2)^{\lambda_2}}{\lambda_2!} \cdots \Psi_{\lambda\lambda_1\lambda_2\ldots}(x, x_1, x_2 \ldots)$$

zugrunde legt (allerdings liegt hierin eine Bevorzugung der Unabhängigen x), wobei dann wiederum die gleichwie $f_0, \ldots f_{n-1}$ von den c unabhängigen Funktionen Ψ eine eindeutige rekursive Bestimmung erfahren.

Insbesondere, wenn in der vorgelegten Differentialgleichung der Koeffizient von $\partial^n y / \partial x^n$ nicht verschwindet, so reduziert sich der obige Ansatz auf $\sum_0^\infty \frac{(c-x)^\lambda}{\lambda!} \Psi_\lambda(x, x_1, x_2, \ldots)$ mit willkürlich vorzugebenden $\Psi_0, \Psi_1, \ldots \Psi_{n-1}$.

§ 2. Die Differentialgleichung $x^2 y''' + p\,x\,y'' + q\,y' + r\,y = 0$.

Für dieses Beispiel resultiert die Lösung

$$y = \int_x^c \frac{dv}{v^p} \int_v^x \sum_{\varkappa=0}^\infty \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{q_\varkappa\, r^\lambda\, \zeta_0^\varkappa\, \zeta_1^\lambda}{\varkappa!\,(\varkappa+\lambda)!\,\lambda!^2}\, du \tag{25}$$

als Doppelintegral über eine hypergeometrische Doppelreihe, deren Elemente durch

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{(c-v)(u-v)}{v^2}, \quad \zeta_1 = \frac{(c-v)(u-v)(x-u)}{u\,v} \\ q_{\varkappa+1} &= q_\varkappa\,[q+\varkappa p+\varkappa(\varkappa-1)], \quad q_0 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

gegeben sind. Beweis:

Gemäß (16) besitzt hier die Funktion Ω die Gestalt

$$\Omega = \sum_{h=0}^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(x-v)^{h+1}}{(h+1)!} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} \frac{F_{h\nu}(v)}{v^{p+2h}}, \tag{27}$$

ferner sind die zur Aufstellung der Rekursionen benötigten Funktionen g, vgl, (11)

$$g_{h1} = (p+2h-2)\,v, \quad g_{h2} = q+hp+h(h-1), \quad g_{h3} = r$$

und die Bedingungen (24) für die Polynome $F_{h\nu}$ lauten

$$F_{h+1,\nu+1} + v^2 F'_{h,\nu+1} = v^2 F''_{h\nu} - (p+2h-2)\,v\,F'_{h\nu} + \mathfrak{q}_h F_{h\nu} + r\,v^2 F_{h-1,\nu}$$

$$\mathfrak{q}_h = q+hp+h(h-1),$$

sie zeigen, daß $F_{h\nu}$ für $h \geqq \nu$ den Grad $2h-2\nu$ besitzt, hingegen für $h < \nu$ verschwindet. Der Ansatz

$$F_{h\nu} = (-1)^h \sum_{\lambda=0}^{h-\nu} a_{h\nu}^{(\lambda)}\, r^\lambda\, v^{h-\nu+\lambda} \tag{28}$$

ergibt hieraus als Bedingungen für die Koeffizienten a

$$a^{(\lambda)}_{h+1,\nu+1} = (h+\lambda-\nu-1)\, a^{(\lambda)}_{h,\nu+1} - \mathfrak{q}_{\nu-\lambda}\, a^{(\lambda)}_{h\nu} + a^{(\lambda-1)}_{h-1,\nu},$$

wobei, wie man durch Schluß von ν auf $\nu+1$ nachweist, $a^{(\lambda)}_{h\nu}$ für $\nu<\lambda$ verschwindet, und nun führt man statt der $a^{(\lambda)}_{h\nu}$ mittels der Beziehung

$$a^{(\lambda)}_{h\nu} = q_{\nu-\lambda}\, \alpha^{(\lambda)}_{h\nu}, \quad q_0 = 1, \quad q_\varkappa = \mathfrak{q}_0\, \mathfrak{q}_1 \cdot\cdot \mathfrak{q}_{\varkappa-1} \tag{29}$$

numerische Größen $\alpha^{(\lambda)}_{h\nu}$ ein, für welche man die independente Formel

$$\alpha^{(\lambda)}_{h\nu} = (-1)^{\nu-\lambda} \binom{h-\nu-1}{h-\nu-\lambda} \frac{(h-\lambda)!}{\lambda!\,(\nu-\lambda)!} \tag{30}$$

verifiziert. Insbesondere ist $a^{(0)}_{h\nu}$ bei $h \neq \nu$ gleich Null.

Die so ermittelten Werte der $a^{(\lambda)}_{h\nu}$ verwendet man zur Berechnung von Ω gemäß den Formeln (27), (28) und kann, wenn h durch $\lambda+\nu+n$ ersetzt wird, in Ω die auf n bezügliche Summierung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n-1}{n} \left(\frac{v-x}{v}\right)^n \frac{(\nu+n)!}{(\lambda+\nu+n+1)!}$$

durch eine Quadratur vollziehen, nämlich durch das Integral

$$\frac{1}{\lambda!} \int_0^1 \frac{t^\nu (1-t)^\lambda\, dt}{\left(1+\dfrac{x-v}{v}\, t\right)^\lambda}.$$

Durch die Transformation $t = \dfrac{u-v}{x-v}$ und Einführung des Summationsbuchstaben $\varkappa = \nu-\lambda$ resultiert alsdann die zu beweisende Formel (25). Und zwar konvergiert die Doppelreihe in (25) vermöge der Definition des Quotienten $q_{\varkappa+1}/q_\varkappa$, wenn $|\zeta_0| < 1$ ist, während ζ_1 unbeschränkt bleibt. (Nach einem Horn'schen Satze, Math. Annalen, Bd. 34, p. 569.)

§ 3. Die Differentialgleichung $x^{n-p} \dfrac{d^n y}{d x^n} + \gamma y = 0.$

Geht man von derjenigen Parameterlösung Y dieser Differentialgleichung aus, deren Entwicklung nach Potenzen von ε mit $\varepsilon^{n-1}/(n-1)!$ beginnt, so lautet nach einem früheren Satze die Differentialgleichung von Y in bezug auf ε

$$(x+\varepsilon)^{n-p} \frac{\partial^n Y}{\partial \varepsilon^n} = (-1)^{n-1} \gamma Y$$

oder in bezug auf $\rho = \varepsilon / x_2^2$

$$(1+\rho)^{n-p} \frac{\partial^n Y}{\partial \rho^n} = (-1)^{n-1} \gamma x^p Y. \tag{31}$$

Es handelt sich also um eine Lösung von (31), welche, nach Potenzen von ρ entwickelt, den Anfangsterm $\frac{x^{n-1} \rho^{n-1}}{(n-1)!}$ besitzt.

Zunächst entwickelt man Y nach Potenzen von γ

$$Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma^\nu Y_\nu, \quad (1+\rho)^{n-p} \frac{\partial^n Y_\nu}{\partial \rho^n} = (-1)^{n-1} \gamma x^p Y_{\nu-1} \tag{32}$$

mit der Festsetzung $Y_0 = \frac{(x\rho)^{n-1}}{(n-1)!}$ und der Forderung, daß $Y_1, Y_2,$ durch ρ^n teilbar sein sollen, was die Y_ν eindeutig bestimmt. Es wird dann Y_ν durch $\rho^{\nu n + n - 1}$ teilbar. Setzt man also

$$Y_\nu = x^{n-1} [(-1)^{n-1} x^p]^\nu H_\nu(\rho), \tag{33}$$

so haben die Funktionen $H_\nu(\rho)$ die Rekursion

$$(1+\rho)^{n-p} H_\nu^{(n)}(\rho) = H_{\nu-1}(\rho) \tag{34}$$

zu erfüllen. Dabei soll für die ganze Zahl p die Annahme $0 < p < n$ gelten.

Betrachtet man nun die $p(\nu+1)$-te Ableitung von $H_\nu(\rho)$ in dem Zusammenhang

$$H_\nu(\rho) = \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^{p\nu+p-1}}{(p\nu+p-1)!} \frac{\mathfrak{H}_\nu(t)\, dt}{(1+t)^{p\nu}} \tag{35}$$

und berechnet hieraus die linke Seite von (34)

$$\int_0^\rho [(1+t)+(\rho-t)]^{n-p} \frac{(\rho-t)^{p\nu+p-1-n}}{(p\nu+p-1-n)!} \frac{\mathfrak{H}_\nu(t)\, dt}{(1+t)^{p\nu}},$$

welcher Ausdruck durch Binomialentwicklung von $[(1+t)+ +(\rho-t)]^{n-p}$ in

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-p} \binom{n-p}{\varkappa} \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^{p\nu-1-\varkappa}}{(p\nu+p-1-n)!} \frac{\mathfrak{H}_\nu(t)\, dt}{(1+t)^{p\nu-\varkappa}} \tag{36}$$

übergeht, so erhält man durch $\varkappa$-malige partielle Integration des in (36) auftretenden Integrals

$$\sum_{\kappa=0}^{n-p} \binom{n-p}{\kappa} \int_0^{\rho} \frac{(\rho-t)^{p\nu-1}}{(p\nu+p-1-n)!} \frac{1}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\underline{/\;\kappa}}{p\nu-\kappa}} \frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}} \frac{\mathfrak{H}_{\nu}(t)}{(1+t)^{p\nu-\kappa}}\, dt \quad (37)$$

und man braucht nur diesen Ausdruck nach den Differentialquotienten von $\mathfrak{H}_{\nu}(t)$ zu ordnen, um zu ersehen, daß mit Ausnahme des einen Differentialquotienten $\mathfrak{H}_{\nu}^{(n-p)}(t)$ alle übrigen, darunter auch $\mathfrak{H}_{\nu}(t)$ selbst, wegfallen. Denn aus

$$\frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}} \frac{\mathfrak{H}_{\nu}(t)}{(1+t)^{p\nu-\kappa}} = \sum_{i=0}^{\kappa} (-1)^{\kappa-i} \binom{\kappa}{i} \frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\underline{/\;\kappa-i}}{p\nu-\kappa}}{(1+t)^{p\nu-i}} \mathfrak{H}_{\nu}^{(i)}(t)$$

folgt als Koeffizient von $\mathfrak{H}_{\nu}^{(i)}(t)$ in (37)

$$\int_0^{\rho} \frac{(\rho-t)^{p\nu-1}}{(p\nu+p-1-n)!} \frac{1}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\underline{/\;i}}{p\nu-i}} \frac{1}{(1+t)^{p\nu-i}} \sum_{\kappa=i}^{n-p} (-1)^{\kappa-i} \binom{n-p}{\kappa} \binom{\kappa}{i}$$

und hierin verschwindet die Summe über κ nur in dem Falle $i = n-p$ nicht, wo sie gleich 1 ist. Dadurch wird die Rekursion (34)

$$\int_0^{\rho} \frac{(\rho-t)^{p\nu-1}}{(p\nu-1)!} \frac{\mathfrak{H}_{\nu}^{(n-p)}(t)\, dt}{(1+t)^{p\nu+p-n}} = \int_0^{\rho} \frac{(\rho-t)^{p\nu-1}}{(p\nu-1)!} \frac{\mathfrak{H}_{\nu-1}(t)\, dt}{(1+t)^{p\nu-p}}$$

erfüllt, wenn $\mathfrak{H}_{\nu}(t)$ und $\mathfrak{H}_{\nu-1}(t)$ in die Relation

$$(1+t)^{n-2p} \mathfrak{H}_{\nu}^{(n-p)}(t) = \mathfrak{H}_{\nu-1}(t), \quad \mathfrak{H}_0(t) = \frac{t^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \quad (38)$$

gebracht werden. Genau dieselbe Rekursion entsteht aber, wenn $n-p$ für n in (34) geschrieben wird, oder wenn für die Differentialgleichung

$$x^{n-2p} \frac{d^{n-p} y_1}{dx^{n-p}} + \gamma y_1 = 0$$

die mit $\dfrac{\varepsilon^{n-p-1}}{(n-p-1)!}$ beginnende Parameterlösung

$$Y_1 = x^{n-p-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} [(-1)^{n-p-1} \gamma x^p]^{\nu} \mathfrak{H}_{\nu}(\rho)$$

gesucht wird. So ermäßigt man schrittweise die Ordnung der zu betrachtenden Differentialgleichung jedesmal um p, bis man zu einer Differentialgleichung

$$\frac{d^m y_\varkappa}{d x^m} + \gamma x^{p-m} y_\varkappa = 0, \; n = \varkappa p + m, \; 0 < m \leqq p \tag{39}$$

und ihrer mit $\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}$ beginnenden Parameterlösung

$$Y_\varkappa = x^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} [(-1)^{m-1} \gamma x^p]^\nu h_\nu(\rho) \tag{40}$$

gelangt, für welche man die Polynome $h_\nu(\rho)$ aus der Rekursion

$$h_\nu^{(m)}(\rho) = (1+\rho)^{p-m} h_{\nu-1}(\rho), \; h_0(\rho) = \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!} \tag{41}$$

zu bestimmen hat. Dabei ist $h_\nu(\rho)$ durch $\rho^{\nu m + m - 1}$ teilbar und demnach

$$h_\nu(\rho) = \sum_{\lambda=0}^{\nu(p-m)} a_{\nu\lambda} \frac{\rho^{\nu m + m - 1 + \lambda}}{(\nu m + m - 1 + \lambda)!}, \; a_{00} = 1, \; a_{0\lambda} = 0 \text{ für } \lambda > 0 \tag{42}$$

darzustellen. Es wird also $H_\nu(\rho)$ ein $\varkappa$-faches Integral

$$\int_0^\rho \frac{(\rho - t_1)^{p\nu+p-1}}{(p\nu+p-1)!} \frac{d t_1}{(1+t_1)^{p\nu}} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - t_2)^{p\nu+p-1}}{(p\nu+p-1)!} \frac{d t_2}{(1+t_2)^{p\nu}}$$
$$\int_0^{t_{\varkappa-1}} \frac{(t_{\varkappa-1} - t_\varkappa)^{p\nu+p-1}}{(p\nu+p-1)!} \frac{h_\nu(t_\varkappa)\, d t_\varkappa}{(1+t_\varkappa)^{p\nu}}$$

und durch die Einführung von

$$\zeta = \frac{(\rho - t_1)(t_1 - t_2)\ldots(t_{\varkappa-1} - t_\varkappa)}{(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_\varkappa)}, \quad f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\zeta^{p\nu}}{[(p\nu+p-1)!]^\varkappa}$$

erhält man die gesuchte Parameterlösung

$$x^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} [(-1)^{n-1} \gamma x^p]^\nu \int_0^\rho d t_1 \int_0^{t_1} d t_2 \, .$$
$$\int_0^{t_{\varkappa-1}} [(\rho - t_1)(t_1 - t_2)\ldots(t_{\varkappa-1} - t_\varkappa)]^{p-1} f(\zeta)\, h_\nu(t_\varkappa)\, d t_\varkappa \, .$$

Die Transformation der Variabeln

$$v_1 = x(1+t_1), \quad v_2 = x(1+t_2),$$

liefert Y als $\varkappa$-faches Integral mit den Grenzen x, c für v_1; x, v_1 für v_2 usf.

Dasselbe Verfahren wie zur Darstellung von Y ist auch einzuschlagen für die mit $\frac{1}{x^{n-p}} \frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!}$ beginnende Lösung $\overline{Y} = Y/(x+\varepsilon)^{n-p}$, welche der aus (31) folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho^n}[(1+\rho)^{n-p}\,\overline{Y}] = (-1)^{n-1}\gamma x^p\,\overline{Y}$$

genügt. Die Entwicklung von $\overline{Y}$ nach Potenzen von γ, analog derjenigen von Y in (32), (33)

$$\overline{Y} = x^{p-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}[(-1)^{n-1}\gamma x^p]^\nu\,\overline{H}_\nu(\rho)$$

führt aber zu Funktionen $\overline{H}_\nu(\rho)$, von welchen man die Beziehung $\overline{H}_\nu^{(p\nu+p)}(\rho) = \frac{\mathfrak{H}_\nu(\rho)}{(1+\rho)^{p\nu+n}}$ nachweist und dies besagt, wegen $\overline{H}_\nu(\rho) = H_\nu(\rho)/(1+\rho)^{n-p}$ eine Eigenschaft der Funktionen $\mathfrak{H}_\nu$

$$\int_0^\rho \frac{(\rho-t)^{p\nu+p-1}}{(1+t)^{p\nu}}\mathfrak{H}_\nu(t)\,dt = (1+\rho)^{n-p}\int_0^\rho \frac{(\rho-t)^{p\nu+p-1}}{(1+t)^{p\nu+n}}\mathfrak{H}_\nu(t)\,dt. \quad (43)$$

In den Fällen $m=1$, $m=p$ und $m=p-1$ ist die explizite Bestimmung der Polynome $h_\nu(\rho)$ leicht und dadurch auch in den Fällen $p=1, 2, 3$.

Für $m=1$, respektive $m=p$ ist offenbar

$$h_\nu(\rho) = \frac{1}{\nu!}\left[\frac{(1+\rho)^p-1}{p}\right]^\nu \quad \text{respektive } h_\nu(\rho) = \frac{\rho^{m\nu+m-1}}{(m\nu+m-1)!}. \quad (44)$$

Im Falle $m=p-1$ findet man aus $h_\nu^{(m)}(\rho) = (1+\rho)\,h_{\nu-1}(\rho)$ für die Größen $a_{\nu\lambda}$ in (42) die Rekursion

$$a_{\nu\lambda} = a_{\nu-1,\lambda} + (m\nu+\lambda-1)\,a_{\nu-1,\lambda-1}$$

Definiert man statt der Größen $a_{\nu\lambda}$ andere, $b_{\nu\lambda}$ durch

$$a_{\nu\lambda} = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)\,b_{\nu\lambda} \text{ für } \lambda > 0, \quad a_{\nu 0} = b_{\nu 0}, \quad (45)$$

so lautet die Rekursion der letzteren

$$\nu\, b_{\nu\lambda} = (\nu-\lambda)\,b_{\nu-1,\lambda} + (m\nu+\lambda-1)\,b_{\nu-1,\lambda-1}, \quad (46)$$

und obwohl die $b_{\nu\lambda}$ nur für $\nu \geqq \lambda$ definiert sind, darf man doch außerdem irgendwelche, die Beziehung (46) erfüllende Größen $b_{\nu\lambda}$ für $\nu < \lambda$ hinzufügen (d. h. willkürlich Größen b_{01}, b_{02}, annehmen), um ihre generierende Funktion

$$B = \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{\nu\lambda}\, \xi^\lambda\, \eta^\nu$$

zu bilden. Der sonach aus (46) folgenden Differentialgleichung für B

$$[1-(1+m\,\xi)\,\eta]\,\frac{\partial B}{\partial \eta}+(\xi-\xi^2)\,\frac{\partial B}{\partial \xi} = (1+m\,\xi)\,B$$

entspricht man durch die Annahme

$$B = \frac{1}{P(\xi)-\eta}, \qquad P(\xi) = \frac{1-(1-\xi)^{m+1}}{m+1}, \tag{47}$$

welche eine explizite Angabe der $b_{\nu\lambda}$ ermöglicht.

Beispielsweise sind im Falle $m = 2$ die Größen $b_{\nu\lambda}$ aus

$$\sum_{\lambda=0}^\infty b_{\nu\lambda}\, \xi^\lambda = \left(1-\xi+\frac{1}{3}\,\xi^2\right)^{-\nu-1}$$

zu entnehmen

$$b_{\nu\lambda} = (-1)^\lambda \sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{2}\lambda} \binom{-\nu-1}{\lambda-\varkappa}\binom{\lambda-\varkappa}{\varkappa}\frac{1}{3^\varkappa},$$

und für die gemäß (45) gebildeten Größen

$$a_{\nu\lambda} = \frac{1}{(\nu-\lambda)!}\sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{2}\lambda}\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!\,3^\varkappa}\,\frac{(\nu+\lambda-\varkappa)!}{(\lambda-2\varkappa)!}$$

ergeben bekannte Sätze über die Euler'schen Integrale eine Quadraturdarstellung

$$\frac{a_{\nu\lambda}}{(2\nu+\lambda+1)!} = \frac{1}{(\nu-\lambda)!}\sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{2}\lambda}\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!\,3^\varkappa}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\nu+\varkappa}}{(\nu+\varkappa)!}\, t^{\nu+\lambda-\varkappa}\, d\,t. \tag{48}$$

Dadurch wird aber in dem Polynom $h_\nu(\rho)$ die Summation bezüglich λ nach dem Binomialsatz ausführbar und

$$h_\nu(\rho) = \sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{2}\nu}\frac{(-1)^\varkappa\,\rho^{2\nu+2\varkappa+1}}{\varkappa!\,3^\varkappa}\int_0^1 \frac{(1+\rho\,t)^{\nu-2\varkappa}}{(\nu-2\varkappa)!}\,\frac{(1-t)^{\nu+\varkappa}}{(\nu+\varkappa)!}\, t^{\nu+\varkappa}\,dt \tag{49}$$

Als Parameterlösung von $y''_x+\gamma\,x\,y_x = 0$, vgl. (39), resultiert durch die Transformation $v = x\,(1+t)$ und wenn noch $\nu+\varkappa = h$

gesetzt wird

$$Y_\varkappa = \sum_{h=0}^{\infty} \int_x^c \frac{(c-v)^h (x-v)^h}{h!} \psi_h(v)\, dv,\quad \psi_h(v) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{3}h} \frac{\gamma^{h-\varkappa}\, v^{h-3\varkappa}}{\varkappa!\,(h-3\varkappa)!\,3^\varkappa}. \tag{50}$$

§ 4. Die Differentialgleichung $x^2 y''' + \alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0$.

Wie in § 2, gilt auch für die Lösung y dieser Differentialgleichung die Form eines Doppelintegrals

$$y = \int_x^c e^{-\alpha v}\, dv \int_v^x \frac{a_\lambda\, b_{\lambda\mu}\, \zeta_1^\lambda \zeta_2^\mu\, du}{(\lambda+\mu)!} \tag{51}$$

über eine hypergeometrische Doppelreihe, deren Elemente durch

$$\zeta_1 = \frac{(c-v)(u-v)(x-u)}{uv},\qquad \zeta_2 = \frac{(c-v)(x-u)}{u}$$

$$\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} = \frac{\gamma+(\lambda+1)\beta+\lambda(\lambda+1)\alpha}{(\lambda+1)^2},$$

$$b_{\lambda\mu} = \frac{[\beta+\lambda\alpha][\beta+(\lambda+1)\alpha]..[\beta+(\lambda+\mu-1)\alpha]}{\mu!}$$

($a_0 = 1$, $b_{\lambda 0} = 1$) gegeben sind. Beweis:

Nach der Methode des vorigen Paragraphen geht man von derjenigen Lösung $Y = \frac{\varepsilon^2}{2} + ..$ aus, für welche als Differentialgleichung in bezug auf ε

$$(x+\varepsilon)^2 \frac{\partial^3 Y}{\partial \varepsilon^3} = \alpha (x+\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \varepsilon^2} - \beta (x+\varepsilon) \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + (\beta+\gamma) Y$$

figuriert oder in bezug auf $\rho = \varepsilon/x$

$$(1+\rho)^2 \frac{\partial^3 Y}{\partial \rho^3} = x \left[\alpha (1+\rho)^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \rho^2} - \beta (1+\rho) \frac{\partial Y}{\partial \rho} + (\beta+\gamma) Y\right]. \tag{52}$$

Die Entwicklung von Y nach Potenzen des hier als Parameter auftretenden x

$$Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+2} H_\nu(\rho),\quad H_0(\rho) = \frac{\rho^2}{2} \tag{53}$$

ergibt eine Rekursion für die Funktionen H

$$(1+\rho)^2 H_\nu'''(\rho) = \alpha (1+\rho)^2 H_{\nu-1}''(\rho) - \beta (1+\rho) H_{\nu-1}'(\rho) + (\beta+\gamma) H_{\nu-1}(\rho) \tag{54}$$

welche dieselben eindeutig bestimmt, wenn $H_1, H_2, \ldots$ durch ρ^3 teilbar sein sollen. Je nachdem $\alpha \neq 0$ oder $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ oder $\alpha = \beta = 0$ ist, wird dann $H_\nu(\rho)$ durch $\rho^{\nu+2}$, $\rho^{2\nu+2}$, $\rho^{3\nu+2}$ teilbar.

Durch ν-malige Differentiation von (54) und die Substitution

$$H_\nu^{(\nu+1)}(\rho) = \frac{\mathfrak{H}_\nu(\rho)}{(1+\rho)^\nu} \tag{55}$$

entsteht eine Beziehung zwischen $\mathfrak{H}_\nu(\rho)$ und $\mathfrak{H}_{\nu-1}(\rho)$

$$(1+\rho)\mathfrak{H}_\nu''(\rho) = \alpha(1+\rho)^2\mathfrak{H}_{\nu-1}''(\rho) + (2\alpha-\beta)(1+\rho)\mathfrak{H}_{\nu-1}'(\rho) + \gamma\,\mathfrak{H}_{\nu-1}(\rho), \tag{56}$$

welche $\mathfrak{H}_\nu(\rho)$ eindeutig bestimmt, denn es verschwindet $\mathfrak{H}_\nu(0)$, während $\mathfrak{H}_\nu'(0) = H_\nu^{(\nu+2)}(0) = \alpha^\nu$ für $\nu > 0$ ist, wie man ersieht, wenn man (54) bloß $(\nu-1)$ mal differentiiert, was $H_\nu^{(\nu+2)}(0) = \alpha\, H_{\nu-1}^{(\nu+1)}(0)$ liefert.

Um jetzt eine independente Darstellung der $\mathfrak{H}_\nu(\rho)$ zu erzielen, betrachtet man ihre Generierende $\mathfrak{H} = \sum_0^\infty \mathfrak{H}_\nu(\rho)\, x^\nu$ und erhält aus der mit x^ν multiplizierten und von $\nu = 1$ bis ∞ summierten Rekursion (56), unter Hinzufügung von $(1+\rho)\mathfrak{H}_0''(\rho) = 0$, als Bedingung für $\mathfrak{H}$

$$[1+\rho-\alpha x(1+\rho)^2]\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \rho^2} + (\beta-2\alpha)x(1+\rho)\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \rho} - \gamma x \mathfrak{H} = 0 \tag{57}$$

mit der Vorschrift $\mathfrak{H} = 0$, $\dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \rho} = \dfrac{1}{1-\alpha x}$ für $\rho = 0$. Daher stimmt $\mathfrak{H}$ mit derjenigen Lösung $\bar{Z}$ der Differentialgleichung 2. Ordnung der Form (1)

$$(x-\alpha x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [2-(2\alpha+\beta)x]\frac{\partial z}{\partial x} - (\beta+\gamma)z = 0 \tag{58}$$

überein, deren Potenzreihenentwicklung nach ε mit $\varepsilon/x-\alpha x^2$ beginnt und welche der Differentialgleichung in bezug auf ε, vgl. (4),

$$[(x+\varepsilon)-\alpha(x+\varepsilon)^2]\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \varepsilon^2} + (\beta-2\alpha)(x+\varepsilon)\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varepsilon} - \gamma \bar{Z} = 0,$$

oder (57) in bezug auf ρ genügt.

Eine Parameterlösung z von (58) ist aber nach dem früheren durch

$$z = \int_0^1 \varphi_1(x+\varepsilon t) f(\zeta)\, dt, \quad \zeta = \frac{\varepsilon^2 t(1-t)}{x+\varepsilon t - \alpha(x+\varepsilon t)^2} \tag{59}$$

gegeben, wenn $f(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} a_\lambda \zeta^\lambda$ durch die Rekursion

$$\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} = \frac{\gamma + (\lambda+1)\beta + \lambda(\lambda+1)}{(\lambda+1)^2}, \quad a_0 = 1$$

bestimmt und

$$\varphi_1(x) = x^{-2}(1-\alpha x)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

angenommen wird. Mit dieser Lösung z, deren Entwicklung nach Potenzen von ε den Anfangsterm $\varepsilon \varphi_1(x)$ besitzt, steht $\bar{Z}$ in dem Zusammenhang

$$\bar{Z} = \frac{z}{(c-\alpha c^2)\varphi_1(c)} = z c (1-\alpha c)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}.$$

Durch die Transformation der Integrationsvariabeln $t = \frac{1-\vartheta}{1+\rho\vartheta}$ geht z aus (59) in

$$\frac{\rho}{x(1+\rho)} \int_0^1 \left(1-\alpha x \frac{1+\rho}{1+\rho\vartheta}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} f(\zeta)\, d\vartheta,$$

$$\zeta = \frac{\rho^2 x \vartheta (1-\vartheta)}{1+\rho\vartheta} \left(1-\alpha x \frac{1+\rho}{1+\rho\vartheta}\right)^{-1}$$

über, sonach handelt es sich darum, den für $\bar{Z}$ berechneten Ausdruck

$$\rho[1-\alpha x(1+\rho)]^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \int_0^1 \left[1-\alpha x \frac{1+\rho}{1+\rho\vartheta}\right]^{-\frac{\beta}{\alpha}-\lambda} \cdot \left[\frac{\rho^2 x \vartheta(1-\vartheta)}{1+\rho\vartheta}\right]^\lambda d\vartheta$$

als Potenzreihe von x darzustellen. Hierzu entwickelt man die Binome mit den Exponenten $\frac{\beta}{\alpha}-1$, $-\frac{\beta}{\alpha}-\lambda$, unter Benutzung der Formel

$$(1-\xi)^p (1-b\xi)^q = (1-\xi)^{p+q}\left(1-\xi\frac{b-1}{1-\xi}\right)^q = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{q}{\mu} \frac{(1-b)^\mu \xi^\mu}{(1-\xi)^{\mu-p-q}}$$

und findet als Koeffizienten $\mathfrak{H}_\nu(\rho)$ von x^ν in $\bar{Z}$

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu-\lambda} a_\lambda \binom{-\frac{\beta}{\alpha}-\lambda}{\mu} \binom{\nu}{\lambda+\mu} \rho^{2\lambda+\mu+1} [\alpha(1+\rho)]^{\nu-\lambda} \int_0^1 \frac{\vartheta^{\lambda+\mu}(1-\vartheta)^\lambda}{(1+\rho\vartheta)^{\lambda+\mu}}\, d\vartheta. \quad \ldots (60)$$

Die Einschränkung für $|x|$, unter welcher die Potenzreihe $\mathfrak{H}$ konvergiert, wird, sobald $\mathfrak{H}_\nu(\rho)$ bestimmt ist, weiterhin belanglos.

Nun überträgt man die Werte (60) in den Ausdruck für die Lösung Y

$$Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+2} \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^\nu}{\nu!} \, \frac{\mathfrak{H}_\nu(t)\, d\, t}{(1+t)^\nu}$$

und kann, mit Rücksicht auf die Formel

$$\sum_{\nu=\lambda+\mu}^{\infty} \binom{\nu}{\lambda+\mu} \frac{\eta^\nu}{\nu!} = \frac{\eta^{\lambda+\mu} e^\eta}{(\lambda+\mu)!}, \quad \eta = \alpha x(\rho-t)$$

die Summation über ν ausführen. Dies ergibt

$$Y = x^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^\rho \frac{\eta^{\lambda+\mu} e^\eta}{(\lambda+\mu)!} \, \frac{a_\lambda \binom{-\frac{\beta}{\alpha}-\lambda}{\mu}}{[\alpha(1+t)]^\lambda} \, d\, t \int_0^1 \frac{\vartheta^{\lambda+\mu}(1-\vartheta)^\lambda \, d\, \vartheta}{(1+t\,\vartheta)^{\lambda+\mu}}$$

und man braucht nur die Integrationsvariabeln

$$v = x(1+t), \quad u = x+\vartheta(v-x)$$

einzuführen, sowie $(-1)^\mu \binom{-\frac{\beta}{\alpha}-\lambda}{\mu}$ mit $b_{\lambda\mu}$ zu bezeichnen, um für die Lösung

$$y = -Y\varphi(x+\varepsilon), \quad \varphi(x) = e^{-\alpha x}$$

die Behauptung (51) nachzuweisen. Zur Konvergenz der Doppelreihe in (51) ist $|\alpha\zeta_1| < 1$ hinreichend, während ζ_2 unbeschränkt bleibt.