

# Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert

Von

Josef Krames in Wien

(Mit 12 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. März 1924)

In seinen vorangehenden Arbeiten<sup>1</sup> zeigte der Verfasser an der Hand verschiedener besonderer Beispiele, daß die Striktionslinie einer algebraischen Regelfläche in verschiedener Weise in eine »eigentliche Striktionslinie« und einzelne Erzeugende der Fläche zerfallen kann, und leitete darüber auch einige Sätze ab.<sup>2</sup> Diesen Ergebnissen ist, wie bei anderer Gelegenheit noch ausführlicher gezeigt werden soll, folgender Satz hinzuzufügen:

*Eine im Endlichen verlaufende (reelle oder imaginäre) Torsallinie, deren Kuspidualpunkt im Unendlichen liegt, gehört im allgemeinen einfach, in besonderen Fällen doppelt gezählt zur Striktionslinie.*

Im folgenden werden zunächst alle Regelflächen dritter Ordnung aufgesucht, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. Nach »R. 3. O«, p. 583, gehören vier Minimalerzeugende dieser Flächen zur Striktionslinie und ihre eigentliche Striktionslinie ist eine (im allgemeinen nicht zerfallende) Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art. Es gibt  $\infty^2$  bezüglich der Hauptgruppe wesentlich verschiedene Formen dieser Flächen. Unter ihnen befindet sich die in »R. 3. O« behandelte Fläche, bei der die genannte Raumkurve in eine Ellipse und zwei Minimalgerade zerfällt, ferner eine Reihe von Cayley'schen Flächen und mannigfache

---

<sup>1</sup>Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist«, diese Ber., Bd. 127 (1918), IIa, p. 563—584 (auf diese Arbeit soll in der Folge immer mit »R. 3. O.« verwiesen werden), »Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises«, diese Ber., Bd. 128 (1919), IIa, p. 623—634, und »Die Regelflächen dritter Ordnung, mit einem geraden kubischen Kreis als Striktionslinie«, diese Ber., Bd. 132 (1923), IIa, p. 165—175.

<sup>2</sup>Vgl. »R. 3. O.«, p. 580 f., und die zuletzt genannte Arbeit, p. 165. Bezüglich der dort angegebenen Literatur sei hier mitgeteilt; daß der Satz, daß die Ordnung der Striktionslinie einer algebraischen Regelfläche gleich der doppelten Rangzahl der Fläche ist, bereits von R. Sturm in dessen Arbeit »Über Fußpunktcurven und Flächen usw.«, Math. Ann., VI, 1873 (also vor Adler und Migotti) angegeben wurde. Diese Berichtigung verdanke ich einer freundlichen Mitteilung meines verehrten Lehrers Prof. Th. Schmid (Wien).

andre Sonderfälle. Von letzteren sind jene von besonderem Interesse, die eine Torsallinie mit unendlichfernem Kuspidualpunkt besitzen, also einfache Beispiele von Regelflächen bilden, deren Striktionslinie in der oben genannten Weise zerfällt. Es gibt  $\infty^1$  verschiedene Formen dieser Flächen. Für sie ist die genannte Torsallinie (im allgemeinen) einfach zur Striktionslinie zu zählen. Ihre eigentliche Striktionslinie reduziert sich daher auf eine Raumkurve dritter Ordnung, nämlich einen sogenannten schiefen kubischen Kreis. Merkwürdigerweise gibt es unter diesen Flächen auch einen Sonderfall, und zwar ist dies der einzige, für den diese Torsallinie doppelt gezählt zur Striktionslinie gehört. Die

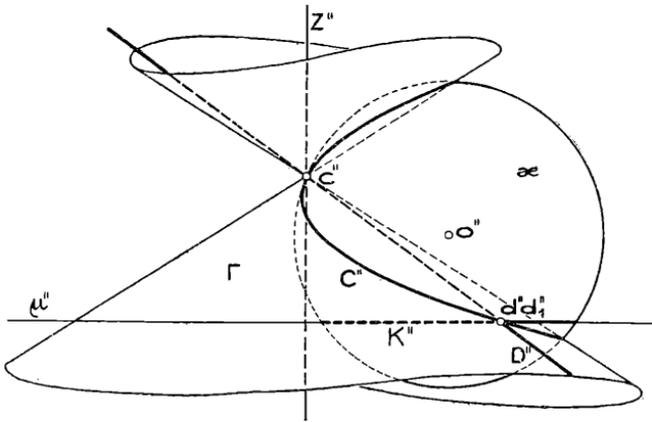


Fig. 1.

eigentliche Striktionslinie dieser speziellen Fläche ist ein Kreis. Diese Fläche hat unter anderem auch die interessante Eigenschaft, mit ihrem Striktionsband kongruent zu sein.

### Nr. 1. Definition der allgemeinen Flächen $\Theta$ .

Jede Regelfläche dritter Ordnung  $\Phi$  wird bekanntlich von jeder ihrer Tangentialebenen  $\pi$  neben der in  $\pi$  enthaltenen Erzeugenden  $P$  nach einem Kegelschnitt geschnitten. Ist  $\Phi$  insbesondere von der Art, daß ihre unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt  $I$  in zwei Punkten  $i_1$  und  $i_2$  oskuliert, so gibt es unter den Ebenen  $\pi$  stets eine und nur eine Ebene  $\mu$ , die aus  $\Phi$  einen Kreis  $K$  ausschneidet, wobei die uneigentliche Gerade  $U$  von  $\mu$  gleich  $[i_1 i_2]$  ist. Wir bezeichnen im folgenden jede solche Fläche mit  $\Theta$ . Um die allgemeinste Fläche  $\Theta$  zu bestimmen, denken wir uns durch den Kreis  $K$  eine Kugel  $\alpha$  gelegt.  $\alpha$  schneidet  $\Theta$  neben  $K$  in einer Raumkurve vierter Ordnung (erster Art)  $C$ , die  $I$  in den Punkten  $i_1$  und  $i_2$  berührt und auf der Doppellinie  $D$  von  $\Theta$

einen Doppelpunkt besitzt.<sup>1</sup>  $C$  liegt daher auch auf einem Drehkegel  $\Gamma$ , dessen Scheitel  $c$  auf  $\kappa$  liegt und dessen Achse zur Ebene  $\mu$  von  $K$  senkrecht steht. Stellen wir die Kugel  $\kappa$  samt dem Kreis  $K$  und dem Kegel  $\Gamma$  im Aufriß so dar, daß die gemeinsame Symmetrieebene von  $\kappa$  und  $\Gamma$  parallel zu  $\Pi_2$  ist, so ist  $K''$  eine Strecke und  $C''$  ein Kegelschnitt, und zwar (wie man mit Hilfe der Punkte  $i_1, i_2$  leicht erkennt) eine Parabel (s. Fig. 1).

$C$  und  $K$  haben außer  $i_1$  und  $i_2$  zwei Punkte  $d$  und  $d_1$  gemeinsam, von welchen der eine, z. B.  $d$ , der Doppellinie  $D$  von  $\Theta$  angehört, während der andere ein Berührungspunkt von  $\Theta$  und  $\kappa$  ist.<sup>2</sup> Da mithin  $D$  durch die Punkte  $c$  und  $d$  festgelegt ist, ist die Fläche  $\Theta$  durch die Kurven  $K, C$  und  $D$  als Leitlinien bestimmt.

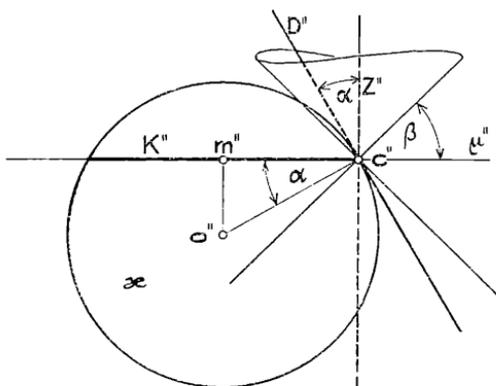


Fig. 2.

Daß die so erzeugte Fläche tatsächlich von dritter Ordnung ist, folgt aus dem bekannten Satz über die Ordnung einer durch drei Leitlinien bestimmten Regelfläche.

Legt man durch  $K$  irgendeine andere Kugel  $\kappa_1$ , so ist ihre Schnittkurve mit  $\Theta$  immer eine Kurve  $C_1$  von derselben Art wie  $C$ , also mit einem Doppelpunkt auf  $D$ .  $\kappa_1$  kann insbesondere so gewählt werden, daß sie  $D$  zur Tangente hat. Es rückt dann der Doppelpunkt  $c$  von  $C$  in den Punkt  $d$  auf  $K$ , und  $D$  ist eine der Doppelpunktstangenten von  $C$ . Jede Fläche  $\Theta$  kann daher auf folgende Art festgelegt werden:

Gegeben sei eine Kugel  $\kappa$ , auf ihr ein Kreis  $K$  (s. Fig. 2) und ein Drehkegel  $\Gamma$ , dessen Scheitel  $c$  auf  $K$  liegt und dessen Achse  $Z$  zur Ebene  $\mu$  von  $K$  senkrecht steht. Alle Geraden  $E$ , die  $K$ , die Schnittkurve  $C$  von  $\kappa$  und  $\Gamma$  und

<sup>1</sup> Vgl. E. Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse einzweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. Leipzig, 1870, p. 83.

<sup>2</sup> Vgl. E. Weyr, a. a. O.

eine der Doppelpunktstangenten von  $C$  schneiden, bilden dann immer eine Regelfläche  $\Theta$ .

Es gibt somit  $\infty^2$  wesentlich verschiedene Formen dieser Flächen. Wir bezeichnen die Mitte von  $\kappa$  mit  $o$ , den Radius von  $K$  mit  $r$ , ferner den Neigungswinkel des Kugelradius  $[oc]$  gegen  $\mu$  mit  $\alpha$  und den Winkel der Erzeugenden von  $\Gamma$  gegen  $\mu$  mit  $\beta$ . Man erkennt dann ohne weiters, daß jede Fläche  $\Theta$  durch Angabe der Größen  $r$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  eindeutig bestimmt ist, von welchen  $r$  für die Form der Fläche unwesentlich ist.

Die Doppelgerade  $D$  ist nach obigem dadurch bestimmt, daß sie die Kugel  $\kappa$  berührt und dem Kegel  $\Gamma$  angehört. Der Winkel  $\widehat{D}\mu$ ,

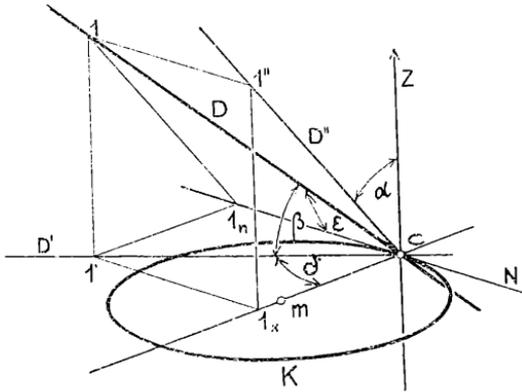


Fig.

ist somit  $= \beta$ . Um  $D$  festzulegen, betrachten wir den Normalriß  $D'$  von  $D$  auf  $\mu$  und bezeichnen seinen Neigungswinkel gegen den Kreisdurchmesser  $[cm]$  ( $m =$  Mitte von  $K$ ) mit  $\delta$  (s. Fig. 3). Bezeichnen wir den Normalriß von  $D$  auf die Ebene  $[mc|\mu]$  wie oben mit  $D''$ , so ist, wie man aus Fig. 2 erkennt, der Winkel  $\widehat{D''Z} = \alpha$ . Daraus ergibt sich mit Hilfe von Fig. 3 (s. Punkt 1 und seine Projektionen) die einfache Beziehung

$$\cos \delta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

Wir können daher jede Fläche  $\Theta$  auch durch Angabe der Größen  $\alpha$ ,  $\delta$  oder  $\beta$ ,  $\delta$  festlegen. Für nichtzerfallende, reelle Flächen  $\Theta$  sind diese an die Grenzen gebunden:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} > \alpha \geq 0 \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

## Nr. 2. Grundeigenschaften der Fläche $\Theta$ und spezielle Formen.

Um beliebige Erzeugende von  $\Theta$ , insbesondere die Torsallinien zu erhalten, legen wir durch den Kreis  $K$  einen Kegel zweiten Grades  $\gamma_x$ , dessen Scheitel ein beliebiger Punkt  $x$  auf  $D$  ist. Jene beiden, von  $D$  verschiedenen Erzeugenden  $X_1$  und  $X_2$  von  $\gamma_x$ , die auch die Kurve  $C$  treffen, sind dann Erzeugende von  $\Theta$ . Die Schnittpunkte  $x_1$  und  $x_2$  von  $X_1$  und  $X_2$  mit  $C$  sind gemeinsame Punkte der beiden Kegel  $\Gamma$  und  $\gamma_x$  und der Kugel  $\kappa$ . Man kann sie daher auch erhalten, indem man den zweiten Schnittkreis  $K_x$  von  $\gamma_x$  mit  $\kappa$  ermittelt und  $K_x$  mit  $\Gamma$  zum Schnitt bringt. Statt dessen genügt es, die Ebene  $\mu_x$  von  $K_x$  mit  $\Gamma$  zu schneiden. Da nämlich  $K_x$  auch durch  $c$  geht, scheidet  $\mu_x$  aus  $\Gamma$  zwei Erzeugende  $R_x$  und  $S_x$  aus, die die gesuchten Punkte  $x_1$  und  $x_2$  enthalten. Um die Erzeugenden  $X_1$  und  $X_2$  zu erhalten, ist aber bloß nötig, die Ebenen  $\rho_x = [R_x D]$  und  $\sigma_x = [S_x D]$  zu betrachten, denen  $X_1$  und  $X_2$  angehören. Letztere sind dann durch die Schnittpunkte von  $\sigma_x$  und  $\tau_x$  mit  $K$  festgelegt.

Läßt man  $x$  die Doppelgerade  $D$  durchlaufen und führt man für jede Lage obige Konstruktion durch, so erhält man sämtliche Erzeugende von  $\Theta$ . Dabei bilden die Ebenen  $\mu_x$  der Kreise  $K_x$  ein Ebenenbüschel, dessen Achse  $T$  in der Tangentialebene  $\tau$  von  $\kappa$  im Punkt  $c$  liegt.  $T$  ist dabei die vierte harmonische Gerade zur Tangente  $N$  an  $K$  in  $c$  bezüglich der Doppellinie  $D$  und deren konjugierter Tangente in  $\tau$ <sup>1</sup>. Mit Hilfe von  $T$  können die Erzeugenden

<sup>1</sup> Um dies zu beweisen, kann folgender Weg eingeschlagen werden: Man denke sich die Kugel  $\kappa$  auf irgendeine Weise auf eine Ebene  $\Pi$  stereographisch abgebildet. Jeder Kreis  $K_i$  von  $\kappa$  geht dann in einen Kreis  $K_i^s$  von  $\Pi$  über, wobei das Bild  $p_i^s$  des Poles  $p_i$  der Ebene  $\pi_i$  von  $K_i$  die Mitte von  $K_i^s$  ist. Da die zentrische Involution  $\mathfrak{I}_x$  mit dem Zentrum  $x$  und dessen Polarebene  $\pi_x$  bezüglich  $\kappa$  als Involutionsebene die Kugel in sich selbst überführt, kann der Kreis  $K_x$  auch erhalten werden, wenn man jenen Kreis auf  $\kappa$  sucht, der dem Kreis  $K$  in  $\mathfrak{I}_x$  entspricht. Bezeichnen wir den Schnittkreis von  $\pi_x$  und  $\kappa$  mit  $P_x$ , so geht die Involution  $\mathfrak{I}_x$  durch die stereographische Projektion in die Inversion (Transformation durch reziproke Radien) an dem Bildkreis  $P_x^s$  von  $P_x$  über. Man erhält daher das Bild  $K_x^s$  von  $K_x$ , indem man zu  $K^s$  den bezüglich  $P_x^s$  inversen Kreis aufsucht. Durchläuft  $x$  die Doppellinie  $D$ , so bilden seine Polarebenen ein Ebenenbüschel, dessen Achse die zu  $D$  konjugierte (also zu  $D$  senkrechte) Tangente  $\bar{D}$  von  $\kappa$  in  $c$  ist. Somit bilden die stereographischen Bilder der Kreise  $P_x$  ein parabolisches Kreisbüschel  $\mathfrak{P}$  mit dem gemeinsamen Berührungspunkt  $cs$ , und das Bild  $K^s$  von  $K$  enthält gleichfalls diesen Punkt. Man erhält also die Bilder  $K_x^s$  der Kreise  $K_x$ , indem man die inversen Kreise von  $K^s$  bezüglich der einzelnen Kreise von  $\mathfrak{P}$  aufsucht. Bezeichnet man die Tangente von  $K^s$  in  $cs$  mit  $N^s$ , die gemeinsame Tangente der  $P_x^s$  mit  $\bar{D}^s$ , so folgt aus der Winkeltreue der Inversion, daß das Linienelement  $\{cs, N^s\}$  durch jede dieser Inversionen in das Linienelement  $\{cs, T^s\}$  übergeht, wobei  $T^s$  das Spiegelbild von  $N^s$  bezüglich  $\bar{D}^s$  ist. Die Kreise  $K_x^s$  berühren daher  $T^s$  in  $cs$ , bilden also gleichfalls ein parabolisches Büschel. Aus den Eigenschaften der stereographischen Projektion folgt daraus unmittelbar die

von  $\Theta$  verhältnismäßig einfach konstruiert werden, insbesondere z. B. jene beiden Erzeugenden  $A$  und  $B$ , die zu  $D$  parallel sind. Durch die Erzeugenden ist jetzt auch die einfache Leitlinie  $L$  von  $\Theta$  bestimmt. Man erhält sie als Schnittlinie irgend zweier Verbindungsebenen  $\lambda_x = [X_1 X_2]$  von je zwei Erzeugenden, die sich in einem Punkt von  $D$  treffen. Mit Hilfe von  $L$  könnten jetzt auch die Torsallinien gefunden werden. Um sie zu erhalten, suchen wir jedoch zweckmäßiger jene Lagen des Punktes  $x$ , für die  $X_1$  und  $X_2$

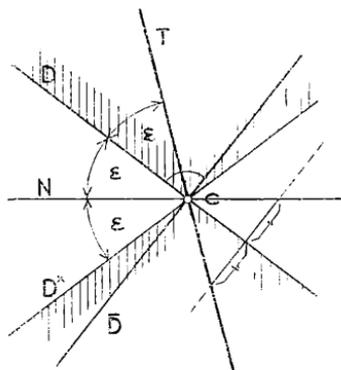


Fig. 4.

unendlich naherücken. Es ist dies offenbar dann und nur dann der Fall, wenn  $\rho_x = [R_x D]$  und  $\sigma_x = [S_x D]$ , somit auch  $R_x$  und  $S_x$  unendlich nahe sind, wenn also die Ebene  $\mu_x$  von  $K_x$  den Kegel  $\Gamma$  berührt. Die Torsallinien können daher erhalten werden, indem man aus  $T$  die Tangentialebenen an  $\Gamma$  legt und deren Berührungserzeugenden  $S_1, S_2$  mit  $D$  durch Ebenen  $\sigma_1, \sigma_2$  verbindet;  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  enthalten dann  $T_1$ , beziehungsweise  $T_2$ , schneiden daher  $K$  und  $C$  in Punkten dieser Geraden.

Die Torsallinien von  $\Theta$  sind somit reell, sobald  $T$  außerhalb des Kegels  $\Gamma$  liegt, hingegen imaginär, wenn  $T$  im Innern von  $\Gamma$  verläuft. Für den Fall, daß  $T$  eine Erzeugende von  $\Gamma$  ist, fallen die Torsallinien zusammen; die betreffende Fläche  $\Theta$  ist dann eine sogenannte Cayley'sche Fläche dritter Ordnung.

Um entscheiden zu können, wann diese drei Möglichkeiten eintreten, denken wir uns die Tangentialebene  $\tau$  von  $x$  in die Zeichenfläche gelegt (s. Fig. 4) und ermitteln zunächst den Winkel  $\varepsilon$ , den die Doppelgerade  $D$  mit der Kreistangente  $N$  in  $c$  (vgl. p. 5) einschließt.

Aus Fig. 3 ergibt sich

$$\cos \varepsilon = \cos \widehat{DN} = \cos \beta \sin \delta. \quad (2)$$

Nennen wir die zu  $D$  bezüglich  $x$  konjugierte, also zu  $D$  senkrechte Kugeltangente  $\bar{D}$ , so ist die Achse  $T$  des Ebenenbüschels  $(\mu_x)$  — als vierte harmonische Gerade zu  $N$  bezüglich  $D$  und  $\bar{D}$  — das Spiegelbild von  $N$  bezüglich  $D$ .  $T$  schließt daher

---

Behauptung des Textes. Das somit gewonnene Ergebnis läßt sich sofort auf beliebige Flächen zweiten Grades übertragen. — Die Verwendbarkeit der stereographischen Projektion zur Übertragung von Sätzen der räumlichen Geometrie auf solche über Kreise in der Ebene (und umgekehrt) wurde von meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. E. Müller (in Spezialvorlesungen an der Technischen Hochschule in Wien) ausführlich dargelegt.

mit  $N$  den Winkel  $\widehat{TN} = 2\widehat{DN} = 2\varepsilon$  ein. Da die zweite in  $\tau$  enthaltene Erzeugende des Kegels  $\Gamma$  das Spiegelbild  $D^\times$  von  $D$  bezüglich  $N$  ist und der zwischen  $D$  und  $D^\times$  liegende,  $N$  enthaltende Teil der Ebene  $\tau$  dem Außengebiet von  $\Gamma$  angehört, ergibt sich, daß die Torsallinien von  $\Theta$  reell, zusammenfallend oder konj. imaginär sind, jenachdem  $\varepsilon > \frac{\pi}{3}$ ,  $= \frac{\pi}{3}$  oder  $< \frac{\pi}{3}$  ist, oder wegen (2), jenachdem

$$\cos \beta \sin \delta = \cos \beta \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}^* < \frac{1}{2}, = \frac{1}{2} \text{ oder } > \frac{1}{2} \quad (3)$$

ist. Sobald also die Größen  $\beta$ ,  $\delta$  die Bedingung

$$\cos \beta \sin \delta = \frac{1}{2} \quad (3a)$$

erfüllen, ist die durch  $\beta$  und  $\delta$  bestimmte Fläche  $\Theta$  eine Cayley'sche Fläche und soll mit  $\Theta^\times$  bezeichnet werden.

Obige Ergebnisse sollen gleich auf einige Sonderfälle der Flächen  $\Theta$  angewendet werden. Aus (3) erkennt man z. B., daß die durch  $\delta = 0$  gekennzeichneten speziellen Flächen  $\Theta$ , die mit  $\Theta^0$  bezeichnet werden sollen, stets reelle Torsallinien besitzen. Sie entstehen, sobald die Kugel  $\kappa$  und der Kegel  $\Gamma$  die Tangentialebene im Punkt  $c$  gemeinsam haben, sobald also die beiden Doppelpunktstangenten der Kurve  $C$  zusammenfallen und  $C$  somit in  $c$  eine Spitze hat. Jede solche Fläche ist bezüglich der gemeinsamen Symmetrieebene von  $\kappa$  und  $\Gamma$  symmetrisch.

Ist  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , so ist, da  $\beta \neq 0$  und  $\neq \frac{\pi}{2}$  sein kann, nach (1)

(s. p. 4)  $\alpha = 0$ . Diese speziellen Flächen entstehen also, sobald  $\lambda$  ein Hauptkreis von  $\kappa$  ist. Sie sind bezüglich einer Achse, nämlich der Geraden  $M = [cm]$  achsial-symmetrisch. Wir bezeichnen sie mit  $\bar{\Theta}$ . Nach (3) sind ihre Torsallinien reell oder imaginär, jenachdem

$$\beta < \frac{\pi}{3} \text{ oder } > \frac{\pi}{3}$$

ist. Für  $\beta = \frac{\pi}{3}$  ist Gleichung (3a) erfüllt, man erhält somit eine Fläche  $\bar{\Theta}$ , die gleichzeitig eine Cayley'sche Fläche ist. Diesen Sonderfall wollen wir mit  $\Theta_I$  bezeichnen. Unter den Flächen  $\bar{\Theta}$  befindet sich auch die schon erwähnte, im »R. 3. O.« behandelte Fläche; sie ergibt sich nämlich für  $\beta = \frac{\pi}{4}$

\*) Siehe Gleichung (1), p. 4.

Um jene Flächen  $\Theta$  zu erhalten, die eine Torsallinie mit unendlichfernem Kuspidalpunkt besitzen, beachten wir, daß dieser Kuspidalpunkt  $k_u$  der Doppelgeraden  $D$  angehört, die fragliche Torsallinie also parallel zu  $D$  sein muß. Der Kuspidalpunkt  $k_u$  liegt somit dann und nur dann im Unendlichen, wenn die beiden früher erwähnten, zu  $D$  parallelen Erzeugenden  $A$  und  $B$  unendlich nahe rücken. Um zu untersuchen, wann dies eintreten kann, stellen wir die Kugel  $\kappa$ , den Kreis  $K$  und die Gerade  $D$  im Aufriß so dar, daß  $\mu \perp \Pi_2$  und  $D \parallel \Pi_2$  ist (s. Fig. 5). Hierauf führen wir die auf p. 5 angegebene Konstruktion zur Ermittlung beliebiger Erzeugender von  $\Theta$  für den uneigentlichen Punkt  $k_u$  von  $D$  durch. Der Kegel  $\gamma_x$  durch  $K$  wird dann zu einem Zylinder  $\gamma_d$ , dessen

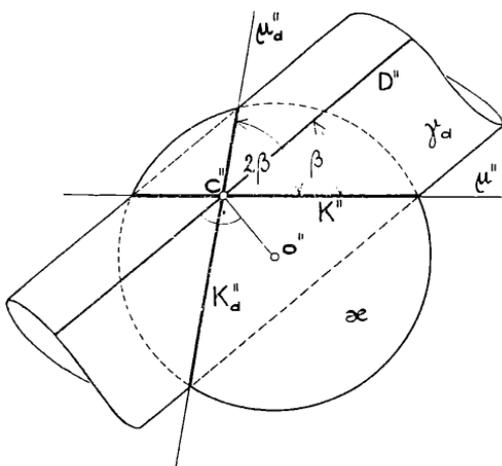


Fig. 5.

Erzeugenden gegen  $\mu$  unter dem Winkel  $\beta$  geneigt sind. Der zweite Schnittkreis  $K_d$  von  $\gamma_d$  und  $\kappa$  erscheint sodann aus Gründen der Symmetrie gleichfalls als Strecke und man erkennt aus der Figur, daß seine Ebene  $\mu_d$  mit  $\mu$  den Winkel  $2\beta$  einschließt. Damit aber  $A$  und  $B$  zusammenfallen, müßte nach früherem  $\mu_d$  den Kegel  $\Gamma$  berühren,  $\pi - 2\beta$  also  $= \beta$  sein. Dies gilt aber nur für  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . Somit ist das Ergebnis:

Die Flächen  $\Theta$ , für die  $\beta = \frac{\pi}{3}$  ist, besitzen eine Torsallinie mit unendlichfernem Kuspidalpunkt.

Wir wollen diese Flächen  $\Theta^k$  nennen. Aus (3) folgt, daß ihre Torsallinien immer reell sind, was damit übereinstimmt, daß auch  $k_u$  stets reell ist. Jede Fläche  $\Theta^k$  ist durch Angabe der Größe  $\delta$



legbaren parabolischen Zylinders  $\zeta$ , nämlich

$$\zeta. \quad \frac{1}{\sin^2 \beta} \bar{\delta}^2 + 2 r \operatorname{tg} \alpha \bar{\delta} - 2 r \bar{x} = 0. \quad (4a)$$

Um mit Hilfe der Kurve  $C$  eine beliebige Erzeugende von  $\Theta$  zu ermitteln, führen wir zunächst ein schiefwinkeliges Koordinatensystem ein, bei welchem die  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Achse mit der früheren  $X$ -, beziehungsweise  $Y$ -Achse zusammenfallen und die  $Z$ -Achse durch die in  $D$  liegende  $\bar{Z}$ -Achse ersetzt ist. Aus Fig. 6 ergeben sich hierfür die Transformationsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x} + \bar{z} \sin \beta \operatorname{tg} \alpha \\ \bar{y} &= \bar{y} - \bar{z} \cos \beta \sin \delta \\ \bar{z} &= \bar{z} \sin \beta \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Danach gehen die erste Gleichung von (4) und die Gleichung (4a) über in

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \quad & \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2 \bar{x} \bar{z} \operatorname{tg} \alpha \sin \beta - 2 \bar{y} \bar{z} \cos \beta \sin \delta = 0 \\ \zeta \quad & \bar{z}^2 - 2 r \bar{x} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Die schiefwinkligen Koordinaten ersetzen wir nun durch ein schiefes Zylinderkoordinatensystem gemäß den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \rho \cos \varphi \\ \bar{y} &= \rho \sin \varphi \\ \bar{z} &= z \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

worin  $\rho$  den parallel zu  $\mu$  gemessenen Radiusvektor eines beliebigen Punktes von der  $\bar{Z}$ -Achse ( $=D$ ) bedeutet und  $\varphi$  die Amplitude dieser Strecke gegen die positive  $\bar{X}$ -Richtung angibt (s. Fig. 6). Hiernach erhalten  $\Gamma$  und  $\zeta$  die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \quad & \rho + 2 \operatorname{tg} \alpha \sin \beta z \cos \varphi - 2 \cos \beta \sin \delta z \sin \varphi = 0 \\ \zeta \quad & z - \sqrt{2 r \rho \cos \varphi} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

die durch folgende ersetzt werden können

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 8 r \cos^2 \beta \cos \varphi \cos^2 (\varphi + \delta) \\ z &= -4 r \cos \beta \cos \varphi \cos (\varphi + \delta) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

die gleichfalls die Kurve  $C$  darstellen.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Die erste dieser Gleichungen stellt die schiefe Projektion von  $C$  auf die  $[X Y]$ -Ebene ( $=\mu$ ) für Sehstrahlen parallel zur  $Z$ -Achse ( $=D$ ) dar, die zweite das durch  $C$  legbare Konoid mit der Richtebene  $\mu$  und der Leitlinie  $D$ .

Um eine beliebige Erzeugende  $E$  von  $\Theta$  festzulegen, legen wir durch  $D$  ( $= \bar{Z}$ ) eine beliebige Ebene  $\nu$  und suchen deren Schnittpunkte  $e_k$  und  $e_c$  mit dem Kreis  $K$  und der Kurve  $C$ . Da  $D$  bei  $c$  bereits drei Punkte von  $C$  und einen von  $K$  enthält, gibt es in jeder solchen Ebene eine und nur eine Erzeugende  $E$ . Die Gleichungen von  $K$  sind

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 2 r \cos \varphi \\ &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Bezeichnen wir die Amplitude der Spur von  $\nu$  auf  $\mu$  mit  $\varphi_c$ , so ergeben sich aus (9) und (10) als Zylinderkoordinaten der Punkte  $e_k$  und  $e_c$  die Werte

$$e_k. \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_k &= 2 r \cos \varphi_c \\ z_k &= 0 \\ \varphi_k &= \varphi_c \end{aligned} \right. \quad \text{und } e_c. \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_c &= 8 r \cos^2 \beta \cos \varphi_c \cos^2 (\varphi_c + \delta) \\ z_c &= -4 r \cos \beta \cos \varphi_c \cos (\varphi_c + \delta) \\ \varphi_c &= \varphi_c. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Besitzt ein beliebiger Punkt  $e$  von  $E$  die Koordinaten  $\rho$ ,  $\varphi_c$  und so ist

$$(\rho_k - \rho) z_c - (\rho_k - \rho_c) z = 0$$

die Gleichung von  $E$  in den laufenden Koordinaten  $\rho$  und  $z$ . Für variables  $\varphi_c$  ( $= \varphi$ ) erhält man daraus mit Hilfe von (11) die Zylinderkoordinatengleichung von  $\Theta$

$$[1 - 4 \cos^2 \beta \cos^2 (\varphi + \delta)] z - 2 \cos \beta \cos (\varphi + \delta) (\rho - 2 \cos \varphi r) = 0 \quad (12)$$

Aus dieser ergeben sich mittels (7) folgende Gleichungen von  $\Theta$  in schiefwinkligen Koordinaten, ausgedrückt durch die Parameter  $\varphi$ ,  $\rho$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \rho \cdot \cos \varphi \\ \bar{y} &= \rho \sin \varphi \\ \bar{z} &= -\frac{4 \cos \beta r \cos \varphi \cos (\varphi + \delta)}{1 - 4 \cos^2 \beta \cos^2 (\varphi + \delta)} + \rho \frac{2 \cos \beta \cos (\varphi + \delta)}{1 - 4 \cos^2 \beta \cos^2 (\varphi + \delta)} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Um diese in rechtwinklige Koordinaten überzuführen, üben wir auf (13) die zu (5) inverse Transformation

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - \operatorname{tg} \alpha z \\ \bar{y} &= y + \cot \beta \sin \delta z \\ \bar{z} &= z \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

aus und erhalten hiernach

$$\left. \begin{aligned} x &= -2 \operatorname{tg} \alpha \sin 2 \beta \cos \varphi \mathfrak{N} r + (\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin 2 \beta \mathfrak{N}) \rho \\ y &= 4 \cos^2 \beta \sin \delta \cos \varphi \mathfrak{N} r + (\sin \varphi - 2 \cos^2 \beta \sin \delta \mathfrak{N}) \rho \\ z &= -2 \sin 2 \beta \cos \varphi \mathfrak{N} r + \sin 2 \beta \mathfrak{N} \rho, \\ \text{wobei } \mathfrak{N} &= \frac{\cos(\varphi + \delta)}{1 - 4 \cos^2 \beta \cos^2(\varphi + \delta)} \text{ ist.} \end{aligned} \right\} (15)$$

Damit ist  $\Theta$  durch die Parameter  $\varphi, \rho$  in der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1(\varphi) + \rho \cdot l_1(\varphi) \\ y &= p_2(\varphi) + \rho \cdot l_2(\varphi) \\ z &= p_3(\varphi) + \rho \cdot l_3(\varphi) \end{aligned} \right\} (16)$$

dargestellt, worin die Funktionen  $p$  die Grundkurve  $D$  bestimmen und die  $l$  Richtungsparameter der Erzeugenden sind. Um diese in Richtungskosinus zu verwandeln, berechnen wir den Ausdruck  $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$  und ersetzen hierauf mittels der Gleichung

$$\rho = \mathfrak{N} : \sqrt{l^2}$$

den Parameter  $\rho$  durch  $\mathfrak{N}$ . Für  $l^2$  erhält man

$$l^2 = \frac{1}{[1 - 4 \cos^2 \beta \cos^2(\varphi + \delta)]^2},$$

wir haben also  $\rho = \mathfrak{N} (1 - 4 \cos^2 \beta \cos^2(\varphi + \delta))$  zu setzen und erhalten aus (15) unter Verwendung von Gleichung (1) (s. p. 4) folgende Gleichungen von  $\Theta$

$$\left. \begin{aligned} x &= -4 \cos^2 \beta \cos \delta \cos \varphi \mathfrak{N} r + [\cos \varphi \\ &\quad - 4 \cos^2 \beta \cos^2(\varphi + \delta) \cos \varphi + 2 \cos^2 \beta \cos \delta \cos(\varphi + \delta)] \mathfrak{N} \rho \\ y &= 4 \cos^2 \beta \sin \delta \cos \varphi \mathfrak{N} r + [\sin \varphi \\ &\quad - 4 \cos^2 \beta \cos^2(\varphi + \delta) \sin \varphi - 2 \cos^2 \beta \sin \delta \cos(\varphi + \delta)] \mathfrak{N} \rho \\ z &= -4 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi \mathfrak{N} r + 2 \sin \beta \cos \beta \cos(\varphi + \delta) \mathfrak{N} \rho \end{aligned} \right\} (17)$$

die gleichfalls von der Form (16) sind, nur ist jetzt

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1.$$

Mit Hilfe obiger Resultate können spezielle Erzeugende von  $\Theta$  sofort angegeben werden. Setzen wir z. B. in (12) für  $\cos(\varphi + \delta)$  die Werte

$$\cos(\varphi_a + \delta) = \frac{1}{2 \cos \beta} \quad \text{und} \quad \cos(\varphi_b + \delta) = \frac{-1}{2 \cos \beta} \quad (18a)$$

ein, so reduziert sich (12) auf

$$\left. \begin{aligned} \rho_a &= \frac{r}{\cos \beta} (\cos \delta - \sqrt{1 - 4 \cos^2 \beta} \sin \delta), \text{ beziehungsweise} \\ \rho_b &= -\frac{r}{\cos \beta} (\cos \delta + \sqrt{1 - 4 \cos^2 \beta} \sin \delta), \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

d. h.  $\rho_a, \varphi_a$  und  $\rho_b, \varphi_b$  sind die Zylinderkoordinaten der auf p. 6 erwähnten, zu  $D$  parallelen Erzeugenden  $A$  und  $B$ . Um die in der Ebene  $\mu$  liegende Erzeugende  $M$  zu erhalten, setzen wir in (12)  $z = 0$  und erhalten als Gleichungen der Schnitte  $K$  und  $M$  von  $\Theta$  mit  $\mu$

$$\Re = 2 r \cos \varphi \text{ und}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

$M$  ist daher stets senkrecht zu  $D'$  (vgl. Fig. 6) und damit auch senkrecht zu  $D$ . Die in  $\mu$  liegende Erzeugende  $M$  ist also bei allen Flächen  $\Theta$  senkrecht zur Doppellinie.

Für späteres ist es zweckmäßig, den Winkel  $\varphi$  anstatt von  $X = [cm]$  von dieser Erzeugenden  $M$  aus zu rechnen. Wir transformieren daher  $\varphi$  mittels der Gleichung

$$\varphi = \chi - \delta + \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

in  $\chi$ . Danach erhält die Zylinderkoordinatengleichung (12) von  $\Theta$  die Form

$$[1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi] z + 2 \cos \beta \sin \chi [\rho + 2 \sin(\chi - \delta) r] = 0 \quad (20)$$

und an die Stelle von (16) treten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= -4 \cos^2 \beta \cos \delta \Re r + [2 \cos^2 \beta \cos \delta \sin \chi \\ &\quad - \sin(\chi - \delta)(1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi)] \Re \\ \eta &= 4 \cos^2 \beta \sin \delta \Re r + [2 \cos^2 \beta \sin \delta \sin \chi \\ &\quad + \cos(\chi - \delta)(1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi)] \Re \\ \delta &= -4 \sin \beta \cos \beta \Re r - 2 \sin \beta \cos \beta \sin \chi \Re \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

wobei für

$$\Re = \frac{\sin \chi \sin(\chi - \delta)}{1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi}$$

zu setzen ist. Die den Erzeugenden  $A$  und  $B$  entsprechenden Größen  $\cos(\varphi_a + \delta)$  und  $\cos(\varphi_b + \delta)$  [vgl. (18a) und (18b)] verwandeln sich in

$$\sin \chi_a = \frac{-1}{2 \cos \beta} \text{ und } \sin \chi_b = \frac{1}{2 \cos \beta}. \quad (22)$$

Wir wollen auch noch die unendlichferne Kurve  $R$  der allgemeinen Fläche  $\Theta$  näher untersuchen. Zu diesem Zweck ermitteln wir die Schnittkurve  $R^z$  ihres Richtkegels  $\Delta$  mit der Ebene  $z=1$ , also eine Zentralprojektion von  $R$ . Legen wir den Scheitel von  $\Delta$  in den Ursprung und setzen wir für

$$\lim_{z=\infty, \rho=\infty} \frac{\rho}{z} = \bar{\rho},$$

so ergibt sich aus (20) als Gleichung von  $R^z$

$$2 \cos \beta \sin \chi \cdot \bar{\rho} - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi + 1 = 0.$$

Ersetzt man in dieser  $\bar{\rho}$  und  $\chi$  mittels der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\ \sin \chi &= \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \end{aligned} \right\}$$

durch die parallel zu  $M$ , beziehungsweise  $D'$  gemessenen rechtwinkligen Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ , so ergibt sich

$$\eta (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2 \cos \beta} \xi^2 + \left( \frac{1}{2 \cos \beta} - 2 \cos \beta \right) \eta^2 = 0.$$

$R^z$  ist somit immer eine symmetrische Fußpunktskurve der Parabel<sup>1</sup> und man sieht, daß ihre Form von der Größe des Winkels  $\delta$  unabhängig ist.

Alle Flächen  $\Theta$  mit gleichem » $\beta$ « haben somit kongruente Richtkegel.

Die zirkularen Kurven werden bekanntlich von den um ihren außerordentlichen Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreisen in den absoluten Punkten berührt.<sup>2</sup> Bei den oben genannten Kurven gibt es unter diesen insbesondere einen nullteiligen Kreis  $I^z$ , der die Kurve in den genannten Punkten oskuliert.<sup>3</sup> Seine Gleichung lautet

$$\xi^2 + (\eta - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta = 0.$$

$I^z$  ist, wie man sich leicht überzeugt, gleichzeitig jener Kreis, den man erhält, wenn man den absoluten Kegelschnitt  $I$  aus dem Ursprung auf die Ebene  $z=1$  (zentral) projiziert. Obige Ergebnisse stehen sonach mit unseren früheren Ausführungen in Einklang. Für  $\beta = \frac{\pi}{4}$  ist  $R^z$

<sup>1</sup> Vgl. etwa H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. Leipzig, 1908, p. 36.

Vgl. z. B. H. Wieleitner, a. a. O., p. 37, wo für den Fall der zirkularen Kurven dritter Ordnung ein hübscher Satz über diese Kreise abgeleitet wird.

<sup>3</sup> Auf diese Tatsache hat mich Prof. Th. Schmid (Wien) aufmerksam gemacht.

insbesondere eine (gerade) Strophoide.<sup>1</sup> Dies gilt also auch für die in »R. 3. O.« behandelte Fläche. Für  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , also für die Flächen  $\Theta^k$ , ist  $R^z$  eine Zissoide (des Diokles).

**Nr. 4. Die Striktionslinie der allgemeinen Fläche  $\Theta$ .**

Sind die Gleichungen einer Regelfläche in der Form (16) gegeben, wobei  $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$  ist, so sind die Gleichungen ihrer Striktionslinie bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 + \mathfrak{R}_0 l_1 \\ y &= p_2 + \mathfrak{R}_0 l_2 \\ z &= p_3 + \mathfrak{R}_0 l_3 \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

wobei für

$$\mathfrak{R}_0 = - \frac{[p'|l']}{l^2} = - \frac{p'_1 l'_1 + p'_2 l'_2 + p'_3 l'_3}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$$

zu setzen ist (unter den Strichen die Ableitungen nach  $\chi$  zu verstehen).

Um dies auf unsere Flächen anzuwenden, berechnen wir aus (21) die Größe  $\mathfrak{R}_0$ . Zunächst erhält man

$$\left. \begin{aligned} l^2 &= 1 + 8 \cos^2 \beta + 16 \cos^2 \beta (\cos^2 \beta - 1) \sin^2 \chi \\ [p'|l'] &= 12 \cos^2 \beta \cos \chi (1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi) \mathfrak{M}' r \\ \text{und} \quad \mathfrak{M}' &= \frac{\sin (2 \chi - \delta) - 4 \cos^2 \beta \sin \delta \sin^2 \chi}{(1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi)^2} \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Somit ergibt sich

$$\mathfrak{R}_0 = 12 \cos^2 \beta r \cos \chi \cdot \frac{4 \cos^2 \beta \sin \delta \sin^2 \chi - \sin (2 \chi - \delta)}{(1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi) (1 + 8 \cos^2 \beta - 16 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \sin^2 \chi)} \quad (25)$$

und damit ist nach obigem die Striktionslinie  $S$  von  $\Theta$  gegeben.

Zur leichteren Untersuchung der einzelnen Formen von  $S$  ermitteln wir ihren Schrägriß  $S^d$  auf die Ebene  $\mu$  für die Sehstrahlenrichtung parallel zu  $D$ . Da  $\mathfrak{R}_0$  den Abstand des Zentralpunktes einer beliebigen Erzeugenden von deren Schnittpunkt mit  $D$  bedeutet und nach (19)

$$\rho = \mathfrak{R} (1 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \chi)$$

ist, ist

<sup>1</sup> Siehe Note 3, p. 14.

$$\rho = 12 \cos^2 \beta r \cos \chi \frac{4 \cos^2 \beta \sin \delta \sin^2 \chi - \sin(2\chi - \delta)}{1 + 8 \cos^2 \beta - 16 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \sin^2 \chi} \quad (26)$$

die Polargleichung von  $S^d$ , bezogen auf die Achse  $M$ . Ersetzt man hierin die Koordinaten  $\rho, \chi$  durch die rechtwinkligen Koordinaten  $\xi, \eta$  (wobei die  $E$ -Achse mit  $M$  zusammenfällt und die  $H$ -Achse  $= D'$  ist; s. Fig. 6), so erhält man

$$(\xi^2 + \eta^2) [(1 + 8 \cos^2 \beta) \xi^2 + (1 - 4 \cos^2 \beta)^2 \eta^2] - 12 \cos^2 \beta r \xi [\sin \delta \xi^2 - \sin \delta (1 - 4 \cos^2 \beta) \eta^2 - 2 \xi \eta \cos \delta] = 0. \quad (27)$$

$S^d$  ist also eine zirkuläre Kurve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkt im Ursprung. Dies stimmt damit überein, daß  $S$  nach »R. 3. O.«, p. 583, die absoluten Punkte  $i_1$  und  $i_2$  von  $K$  enthält und  $D$  eine Trisekante von  $S$  ist.<sup>1</sup>

Gleichung (26) wird, wie man sich durch Rechnung überzeugen kann, von den Koordinaten  $\rho_a, \chi_a$  und  $\rho_b, \chi_b$  [s. p. 13 (18b) und (22)] von  $A$  und  $B$  identisch erfüllt. Der durch  $S^d$  parallel zu  $D$  gelegte Zylinder vierten Grades  $\Psi$  enthält daher die Erzeugende  $A$  und  $B$ . Da  $D$  für  $\Psi$  eine dreifache Erzeugende ist, ist somit der restliche Schnitt von  $\Psi$  und  $\Theta$  tatsächlich eine Kurve vierter Ordnung. Für  $\chi = 0$  erhält man aus (26) für den Zentralpunkt von  $M$

$$\rho_m = 12 \cos^2 \beta \frac{\sin \delta}{1 + 8 \cos^2 \beta} r.$$

Um zu entscheiden, für welche Flächen  $\Theta$  die Striktionslinie  $S$  in eine Kurve niedrigerer Ordnung und in (eine oder zwei) Erzeugende von  $\Theta$  zerfällt, suchen wir jene Wertverbindungen von  $\beta$  und  $\delta$  auf, für die  $S^d$  zum Teil aus (einer oder zwei) Geraden durch den Ursprung besteht. Dies ist, wie man leicht erkennt, nur dann der Fall, wenn entweder die beiden Klammerausdrücke von (27) einen gemeinsamen Teiler von der Form

$$a_1 \xi + a_2 \eta$$

besitzen oder wenn der zweite Klammerausdruck  $= \text{konst.} \cdot (\xi^2 + \eta^2)$  ist.<sup>2</sup>

Für das erstere erhält man durch Koeffizientenvergleichung die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{1 - 4 \cos^2 \beta}{\sqrt{1 + 8 \cos^2 \beta}} \quad i \\ \frac{a_2}{a_1} &= -\cot \delta \pm \sqrt{\cot^2 \delta - 4 \cos^2 \beta + 1} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

<sup>1</sup> Das Trisekantenhyperboloid von  $S$  kann nämlich nicht zwei windschiefe Erzeugende von  $\Theta$  enthalten, da diese nur je einen Zentralpunkt besitzen können.

<sup>2</sup> Der Fall, daß beide Klammerausdrücke bis auf einen konstanten Faktor gleich sind, würde auf  $\beta = \frac{\pi}{2}$  führen, was ausgeschlossen ist.

die gleichzeitig zu befriedigen sind. Hieraus ersieht man, daß eine reelle Gerade durch den Ursprung nur dann ein Teil von  $S^t$  sein kann, wenn  $\cos \beta = 1/2$  ist. Dies entspricht den Flächen  $\Theta^k$ . Sehen wir ferner von imaginären Werten von  $\beta$  und  $\delta$  ab, so können die Gleichungen (28) nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn  $\cot \delta = 0$ , also  $\delta = \frac{\pi}{2}$  ist. Aus (28) folgt dann

$$8 \cos^4 \beta + 2 \cos^2 \beta - 1 = 0;$$

es müßte also (abgesehen von imaginären Werten) gleichfalls  $\cos \beta = \frac{1}{2}$  sein.

Für den zweiten Fall erhält man die Bedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \cos \delta = 0, \delta = \frac{\pi}{2} \\ 1 - 4 \cos^2 \beta = -1 \end{array} \right\},$$

es müßte also  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  sein. Dies entspricht der in »R. 3. O.« behandelten Fläche. Diese und die Flächen  $\Theta^k$  sind somit die einzigen nicht zerfallenden, reellen Sonderfälle unserer Flächen, deren eigentliche Striktionslinie von niedrigerer als vierter Ordnung ist.

Im folgenden sollen die besonderen Formen der Flächen  $\Theta$  näher untersucht werden.

### Nr. 5. Die Flächen $\Theta^x$ und $\bar{\Theta}$ .

Aus der Bedingungsgleichung für die Cayley'schen Flächen  $\Theta^x$  [s. p. 7 (3a)] und aus Gleichung (1) (s. p. 4) ergibt sich, daß die Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  dieser Flächen — sobald man vom Imaginären absieht — an folgende Grenzen gebunden sind:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3} \leq \beta > 0 \\ \frac{\pi}{2} \geq \delta > \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Setzt man gemäß (3a) in (20) (s. p. 13)

$$\cos \beta = \frac{1}{2 \sin \delta},$$

so erhält man als Zylinderkoordinatengleichung einer Fläche  $\Theta^x$

$$(\sin^2 \delta - \sin^2 \chi) z + \sin \delta \sin \chi [\rho + 2 \sin(\chi - \delta) r] = 0. \quad (30)$$

In Fig. 7 ist eine solche Fläche im Normalriß auf die Kreis-schnittebene  $\mu$  dargestellt. Da die in  $\mu$  liegende Erzeugende  $M$  zu  $D$  senkrecht ist, schließt sie mit der Tangente  $N$  von  $K$  in  $c$  den Winkel  $\delta$  ein. Die Koordinaten der zu  $D$  parallelen Erzeugenden  $A$  und  $B$  von  $\Theta^x$  ergeben sich aus (18a, b), beziehungsweise (22). Man erhält

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}, \rho_a = 0 \text{ und } \varphi_b = \frac{\pi}{2} - 2\delta, \rho_b = 2r \sin 2\delta$$

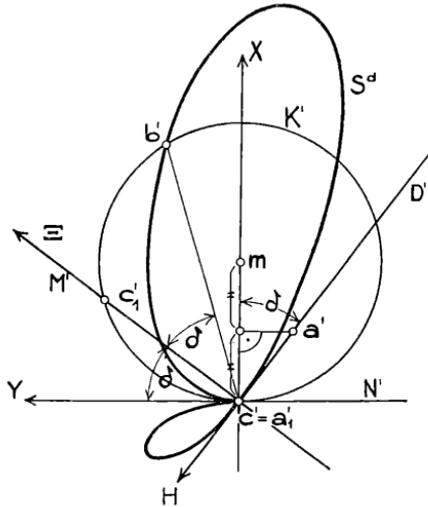


Fig. 7

oder, falls  $\varphi$  durch  $\chi$  ersetzt wird,

$$\chi_a = \delta \text{ und } \chi_b = -\delta.$$

Somit fällt  $A$  in die Doppellinie  $D$ , die gleichzeitig die Torsallinie von  $\Theta^x$  ist und die Erzeugende  $B$  ist durch ihren Schnittpunkt  $b_1$  mit  $K$  bestimmt, für den  $\widehat{M}[cb_1] = -\delta$  ist. Um den Kuspidalpunkt  $a$  von  $D$  zu erhalten, ermitteln wir die Grenzlage des Schnittpunktes  $e_a$  einer beliebigen Erzeugenden  $E$  von  $\Theta^x$  mit  $D$  für den Fall, daß  $E$  unendlich nahe an  $D$  rückt. Die Koordinaten von  $e_a$  sind nach (30)

$$\rho_e = 0, \chi_e = \chi, z_e = -\frac{2 \sin \chi \sin \delta \sin(\chi - \delta)}{\sin^2 \delta - \sin^2 \chi} r.$$

Daraus ergibt sich für den Kuspidalpunkt  $a$

$$z_a = \lim_{\chi \rightarrow \delta} z_e = r \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (31)$$

Darnach hat der Normalriß  $a'$  von  $a$  von  $c'$  die Entfernung

$$\overline{a'c'} = z_a \cos \beta = \frac{z_a}{2 \sin \delta} = \frac{r}{2 \cos \delta}.$$

$a$  liegt somit in der Symmetrieebene der Punkte  $m$  und  $c$ .  $\Theta^\times$  kann demnach auch dadurch erzeugt werden, daß man zwischen den Punkten von  $D$  und  $K$  eine Projektivität durch folgende drei Punktpaare festlegt: Dem unendlich-fernen Punkt  $u$  von  $D$  entspricht  $b_1$ , dem Punkt  $c (= a_1)$ , als Punkt von  $D$  aufgefaßt, ist jener Punkt  $c_1$  zugeordnet, für den  $[c_1c] \perp D$  ist, und dem in der Symmetrieebene von  $m$  und  $a_1$  liegenden Punkt  $a$  von  $D$  entspricht  $a_1$  auf  $K$ .

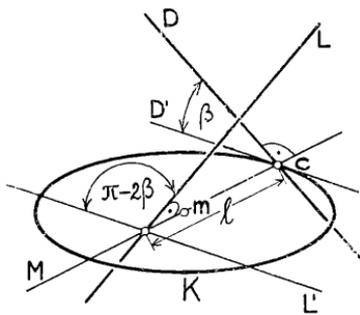


Fig. 8.

Für den Schrägriß  $S^d$  der Striktionslinie  $S$  von  $\Theta^\times$  ergibt sich aus Gleichung (27)

$$(\xi^2 + \eta^2) [(3 + 2 \cot^2 \delta) \xi^2 - \cot^2 \delta \eta^2] - \frac{3r\xi}{\sin \delta} [\xi - \cot \delta \eta]^2 = 0. \quad (32)$$

$S^d$  berührt daher  $D'$  in  $c'$  und besitzt außerdem in  $c'$  eine Spitze, für die  $N'$  die Tangente ist (vgl. Fig. 7),  $S$  im Raum berührt daher  $D$  in  $a$ . Für  $\delta = 0$  ergibt sich die schon erwähnte spezielle Fläche  $\Theta_I$ , die weiter unten näher behandelt werden wird.

Für die Flächen  $\Theta$  (s. p. 7) gelten folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ 0 &< \beta < \frac{\pi}{2} \\ \delta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

Da ferner nach (19)  $\varphi = \chi$  ist, ist die in  $\mu$  liegende Erzeugende  $M$  ein Durchmesser von  $K$ .

$M$  ist gleichzeitig Symmetrieachse der Fläche; da die Doppellinie  $D$  zu  $M$  senkrecht steht, schließt sie mit der Tangente  $N$  an  $K$  den Winkel  $\beta$  ein. Die Gleichungen einer solchen Fläche ergeben sich aus den Gleichungen der allgemeinen Fläche  $\Theta$ , wenn

$\delta = \frac{\pi}{2}$  gesetzt wird. Aus ihnen kann dann die Lage der einfachen

Leitlinie  $L$  ermittelt werden. Es ergibt sich, daß  $L$  die Erzeugende  $M$  im Abstand

$$l = \frac{4 \cos^2 \beta - 1}{2 \cos^2 \beta} r$$

von  $c$  unter rechtem Winkel schneidet und mit  $\mu$  den Winkel  $\pi - 2\beta$  einschließt (s. Fig. 8).

Die Gleichung von  $S^d$  erhält für  $\bar{\Theta}$  die Form

$$(\xi^2 + \eta^2) [(1 + 8 \cos^2 \beta) \xi^2 + (1 - 4 \cos^2 \beta)^2 \eta^2] - 12 \cos^2 \beta r \xi [\xi^2 - (1 - 4 \cos^2 \beta) \eta^2] = 0. \quad (33)$$

Für  $\beta = \frac{\pi}{4}$  reduziert sich dies auf

$$(\xi^2 + \eta^2) [5 \xi^2 + \eta^2 - 6 r \xi] = 0.$$

Dies ist der schon erwähnte Fall der in »R. 3. O.« behandelten Fläche, bei der  $S$  in eine Ellipse und zwei Minimalerzeugenden zerfällt.

$\beta = \frac{\pi}{3}$  ergibt als Sonderfall von  $\bar{\Theta}$  die oben genannte Cayley'sche Fläche  $\Theta_I$ . In diesem Fall ist nämlich obiges  $I = 0$  und  $\pi - 2\beta = \beta$ . Die Leitlinie  $L$  fällt somit in  $D$ , die gleichzeitig die Torsallinie von  $\Theta_I$  ist. Aus (31) folgt, daß der Kuspidualpunkt von  $D$  im Unendlichen liegt. Von den drei Punktepaaren zur Bestimmung einer Fläche  $\Theta^x$  fallen somit zwei zusammen. Um demnach  $\Theta_I$  festzulegen, ermitteln wir ihre Zylinderkoordinatengleichung, indem wir in (30)  $\delta = \frac{\pi}{2}$  setzen. Es ergibt sich

$$\cos^2 \varphi z + \sin \varphi (\rho + 2 r \cos \varphi) = 0. \quad (34)$$

Setzt man hierin  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  und  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ , so sind

$$\left. \begin{aligned} z &= 2 r - \sqrt{2} \rho \\ z &= -2 r - \sqrt{2} \rho \end{aligned} \right\}$$

die Gleichungen von zwei Erzeugenden  $E_1$  und  $E_2$ , die  $D$  im Abstand  $\pm 2 r$  von  $c$  treffen und durch die Endpunkte des zu  $M$  senkrechten Kreisdurchmessers gehen.  $\Theta_I$  kann sodann durch Hinzunahme von  $E_1$  oder  $E_2$  ähnlich wie  $\Theta^x$  eindeutig bestimmt werden. Die Striktionslinie dieser Fläche wird in Nr. 7 näher betrachtet werden.

#### Nr. 6. Die Flächen $\Theta^0$ .

Für die Flächen  $\Theta^0$  ist

$$0 < \beta = \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) < \frac{\pi}{2} \text{ und} \\ \delta = 0.$$

Darnach ist die Zylinderkoordinatengleichung einer solchen Fläche:



Minimalgeraden  $I_1$  und  $I_2$  mit dem reellen Schnittpunkt  $k$  Erzeugende von  $\Theta^0$  sind. Dies hat eine interessante Folgerung.

Betrachten wir nämlich jene Kugel  $\kappa_0$ , die durch  $K$  geht und den Punkt  $k$  enthält. Da  $\kappa^0$  die Ebene  $\bar{\mu}$  in  $k$  berührt, enthält sie außer  $K$  auch die Minimalerzeugenden  $I_1$  und  $I_2$  von  $\Theta^0$ .  $\kappa^0$  schneidet daher aus  $\Theta^0$  neben  $K$ ,  $I_1$  und  $I_2$  nur noch einen Kegelschnitt, und zwar (wegen  $\kappa_0$ ) einen Kreis  $K^\times$  aus. Da aber nach p. 2, Nr. 1  $\Theta^0$  außer  $K$  keinen Kreis enthält, fällt  $K^\times$  mit  $K$  zusammen und es gilt das Ergebnis:

$\kappa^0$  und  $\Theta^0$  berühren einander längs  $K$ .

$\Theta^0$  könnte also auch von allen Tangenten an  $\kappa_0$  erzeugt werden, die  $D$  und  $L$  treffen, sobald  $D$  und  $L$  in der Weise gewählt werden, daß sie die oben angegebene Lage einnehmen.

Aus der Gleichung für  $S^d$

$$(\xi^2 + \eta^2) [(1 + 8 \cos^2 \beta) \xi^2 + (1 - 4 \cos^2 \beta)^2 \eta^2] + 24 \cos^2 \beta r \xi^2 \eta = 0 \quad (37)$$

ergibt sich, daß  $S^d$  in  $c$  eine Spitze (mit  $D'$  als Tangente) hat und außerdem  $M$  in  $c$  berührt.  $S$  im Raum besitzt daher gleichfalls eine Spitze, nämlich im Kuspidalpunkt  $t_1 = [DT_1]$ , und gehört aus Gründen der Symmetrie einem Zylinder zweiten Grades an, dessen Erzeugenden zu  $\Pi_2$  senkrecht stehen.  $S''$  ist demnach eine Hyperbel, und zwar mit einer Asymptote parallel zu  $\mu''$  (s. Fig. 9).

Ist insbesondere  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , so ist  $l_0 = 2r$ , die Torsallinie  $T_1$

daher parallel zu  $D$  und ihr Kuspidalpunkt im Unendlichen. Es liegt dann die bereits erwähnte spezielle Fläche  $\Theta_{II}$  vor, für die die Gleichung von  $S^d$  in

$$\xi^2 (\xi^2 + \eta^2 + 2r\eta) = 0 \quad (38)$$

übergeht. Daraus folgt, wie in nächster Nummer ausführlicher gezeigt werden soll, daß  $S$  identisch mit  $K$  ist.

### Nr. 7. Die Flächen $\Theta^k$ .

Um schließlich die Flächen  $\Theta^k$  näher zu untersuchen, beachten wir, daß sich aus (22) für  $\cos \beta = \frac{1}{2}$

$$\chi_a = \frac{\pi}{2}, \quad \chi_b = -\frac{\pi}{2}$$

ergibt. Somit fällt die von den Erzeugenden  $A$  und  $B$  gebildete Torsallinie  $T_1$  in die Ebene  $[DD']$ . Dabei bedeutet  $D'$  den Normalriß von  $D$  auf die Kreisschnittebene  $\mu$  (vgl. Fig. 10). Die einfache Leitlinie  $L$  gehört sodann der Torsalebene  $\tau_1 = [AB]$  an, deren Schnittlinie mit  $\mu$  die Tangente  $T_m$  von  $K$  ist. Die genaue Lage



Vorherige Überlegungen gelten auch für die schon mehrmals genannte Fläche  $\Theta_I$  ( $\delta = \frac{\pi}{2}$ ); für diese kann die Gleichung von  $S^d$  auch aus (32) oder (33) erhalten werden. Es ergibt sich

$$\xi^2(\xi^2 + \eta^2 - r\xi) = 0.$$

$R^d$  besitzt also die Strecke  $cm$  als Durchmesser und die Asymptote von  $R$  fällt in  $D (= T_1)$ .

Für den Sonderfall  $\Theta_{II}$  ( $\delta = 0$ ) ergibt sich für  $S^d$  aus (39) oder (37) die Gleichung (38) (s. p. 22). In diesem Fall ist  $R^d = K$ , somit berührt  $\gamma_k$  die Fläche längs  $T_1$  (vgl. Fig. 11). Diese Gerade gehört daher vierfach gezählt zum Schnitt von  $\gamma_k$  und  $\varphi$  mit  $\Theta^k$  und somit zweifach gezählt zur Striktionslinie. Daraus folgt:

Die eigentliche Striktionslinie von  $\Theta_{II}$  ist der Kreis  $K$ .

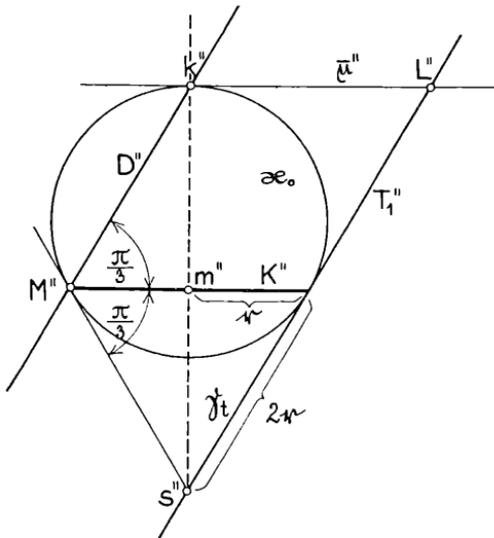


Fig. 11.

In »R. 3. O«, p. 582, Nr. 5, wurde gezeigt, daß die dort behandelte Fläche die einzige Regelfläche dritter Ordnung mit einer (nicht zerfallenden) uneigentlichen Kurve dritter Ordnung, vierter Klasse ist, deren eigentliche Striktionslinie ein Kegelschnitt ist. Die Existenz der Fläche  $\Theta_{II}$  steht damit nicht in Widerspruch, da deren uneigentliche Kurve im unendlichfernen Kuspidualpunkt von  $\Theta_{II}$  eine Spitze hat,<sup>1</sup> somit bloß von dritter Klasse ist. Da letzteres für jede (allgemeine) Regelfläche dritter Ordnung mit einem unendlichfernen Kuspidualpunkt  $t_u$  gilt, besitzt die Striktionslinie  $\mathfrak{S}$  einer solchen Fläche nach »R. 3. O«, p. 579, außer  $t_u$  bloß sechs unendlichferne Punkte.  $\mathfrak{S}$  besteht daher entweder aus einer durch  $t_u$

<sup>1</sup> Siehe p. 15, Schluß von Nr. 3.

gehenden Raumkurve siebenter Ordnung und der (nach dem eingangs erwähnten Satz) einfach zu zählenden Torsallinie durch  $t_{II}$  oder aus einer Kurve sechster Ordnung und der doppelt zu zählenden Torsallinie. Besitzt eine solche Fläche außerdem benachbarte Minimalerzeugende, so zerfällt ihre Striktionslinie weiterhin nach »R. 3. O«, p. 580, Satz 1. Sind die sechs Minimalerzeugenden insbesondere zu je dreien benachbart, so liegen die soeben behandelten Flächen  $\Theta^k$  vor. Unter ihnen ist  $\Theta_{II}$  die einzige (vgl. p. 16 f.), für welche die Torsallinie doppelt gezählt zur Striktionslinie gehört.

Zum Schluß sei noch eine interessante Eigenschaft der zuletzt behandelten Fläche erwähnt. Zu diesem Zweck verwenden wir einen Satz von Darboux, den dieser in seinen »Leçons sur la théorie des surfaces«<sup>1</sup> abgeleitet hat und der etwa folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

*Umschreibt man einer Regelfläche  $\Phi$  die längs ihrer Striktionslinie berührende Torse  $\mathfrak{T}$  und verebnet man diese, wobei man die Erzeugenden von  $\Phi$  mit den hindurchgehenden Tangentialebenen von  $\mathfrak{T}$  fest verbunden läßt, so geht  $\Phi$  in eine Schar von parallelen Geraden über.*

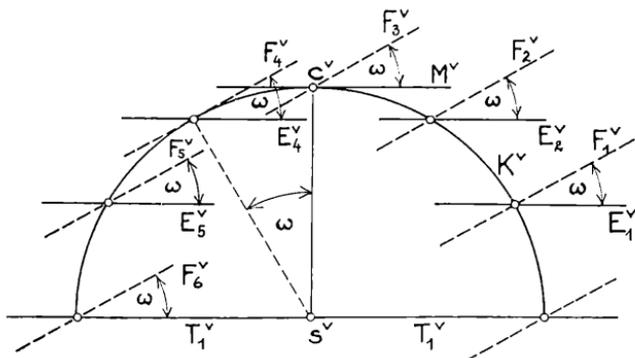


Fig. 12.

Um diesen Satz auf die Fläche  $\Theta_{II}$  anzuwenden, beachten wir, daß  $\Phi_{II}$  längs ihrer Striktionslinie  $K$  von der Kugel  $\kappa_0$  berührt wird, die längs  $K$  umschriebene Torse  $\mathfrak{T}$  somit auch  $\kappa_0$  längs  $K$  berührt.  $\mathfrak{T}$  ist daher ein Drehkegel  $\gamma_b$ , dessen Achse in die Achse  $\bar{K}$  von  $K$  fällt und dessen Erzeugenden gegen die Ebene  $\mu$  von  $K$  unter dem Winkel  $\frac{\pi}{3}$  geneigt sind (s. Fig. 11). Denkt man

sich  $\gamma_t$  längs  $T_1$  aufgeschnitten und verebnet man in obiger Weise, so geht  $K$  in einen Halbkreis  $K^v$  mit dem Radius  $2r$  über (Fig. 12) und die Erzeugenden  $E_i$  von  $\Theta_{II}$  werden zum  $T_1$

<sup>1</sup> IVe partie, Paris, 1896, p. 343.

entsprechenden Durchmesser  $T_1^v$  von  $K^v$  parallel. Dreht man nun in jeder Tangentialebene von  $\gamma_t$  die zugehörige Erzeugende durch einen bestimmten Winkel  $\omega$ , so werden die  $v$ -Bilder  $F^v$  dieser neuen Lagen in der Verebnung von  $\gamma_t$  gegen  $T_1^v$  gleichfalls unter dem Winkel  $\omega$  geneigt sein. Da es gleichgültig ist, an welcher Stelle  $\gamma_t$  aufgeschnitten wird, erkennt man hieraus unmittelbar die Richtigkeit des Satzes:

*Dreht man alle Erzeugenden einer Fläche  $\Theta_{II}$  in ihren Zentral-ebenen um den Zentralpunkt durch einen bestimmten Winkel  $\omega$ , so bilden ihre neuen Lagen eine Regelfläche, die mit  $\Theta_{II}$  kongruent ist.*

Dreht man die Erzeugenden um  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , so erhält man die Zentraltangenten, d. s. die Gemeinlote zwischen je zwei benachbarten Erzeugenden von  $\Theta_{II}$ .

Somit gilt insbesondere:

Das Striktionsband einer Fläche  $\Theta_{II}$  ist mit ihr kongruent.

Aus Fig. 12 ist ferner sofort zu ersehen, daß die neuen Lagen  $F_i^v$  auch dadurch erhalten werden können, daß man die  $E_i^v$  um  $s^v$  durch den Winkel  $\omega$  dreht. Dem entspricht im Raum eine Drehung des Kegels  $\gamma_t$  um dessen Achse durch den Winkel  $2\omega$ . Somit können die nach obigem Satz mit  $\Theta_{II}$  kongruenten Flächen auch dadurch erhalten werden, daß man die ursprüngliche Fläche um die Achse  $\bar{K}$  von  $K$  durch den Winkel  $2\omega$  dreht.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: [133\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Krames Josef

Artikel/Article: [Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. 65-90](#)