Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Das Rechnen mit Faltprodukten in seiner Anwendung auf die räumlichen Gebilde zweiten Grades

Von

Emil Müller in Wien

w. M. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. Juni 1924)

Die in diesen Berichten, Abt. II *a*, Bd. 131 (1922), p. 461 bis 490, erschienene Arbeit »Das Rechnen mit Faltprodukten in seiner Anwendung auf die Direktorkreise von Kegelschnitten« — in der Folge kurz mit »R. m. F.« bezeichnet — gab die Grundlagen für die Anwendung dieser Rechenmethode auf die Gebilde 2. Grades in der Ebene.[1] Die vorliegende Arbeit bringt als Fortsetzung die Grundlagen für die Anwendung derselben Methode auf die räumlichen Gebilde 2. Grades. Die Erhöhung der Stufenzahl des Operationsgebietes bewirkt, daß nun neben den zueinander dualen Punkt- und Ebenengrößen 2. Grades noch die (quadratische Strahlkomplexe darstellenden) Strahlgrößen 2. Grades auftreten. Der Hauptzweck der Arbeit besteht wieder in der Darlegung der neuen Rechenmethode, der man jedenfalls den Vorzug großer Kürze, zumal beim Rechnen mit den Komplexgrößen, wird zugestehen müssen. Hierzu sei nämlich bemerkt, daß nur an verhältnismäßig wenigen Stellen dem Leser die Ausführung kleiner Zwischenrechnungen überlassen bleibt, daß also die Rechnungskürze nicht bloß scheinbar ist. Es lag nicht in meiner Absicht, eingehendere Untersuchungen auf Teilgebieten vorzunehmen. Trotzdem ergab sich als unmittelbarer Ausfluß der Methode manches Neue, wofür sich Beispiele unter den bezifferten Sätzen und Gleichungen finden. Die Verfolgung des Gedankens, stets mit den algebraischen Größen statt zugehörigen Gleichungen zu rechnen, leitete mich (schon 1902) zur Aufstellung der keinen Strahlkomplex darstellenden »fundamentalen Strahlgröße« $Q^{(2)}$, von der einige Eigenschaften in Nr. 6 abgeleitet sind. Die Einführung dieser Größe an Stelle der »Identität zwischen den Plücker'schen Linienkoordinaten« scheint mir entschiedene Vorteile zu bieten. Die räumliche Metrik soll in Verbindung mit den räumlichen »Direktorgebilden« der Gegenstand einer nächsten Arbeit sein.

[1] Anwendungen dieser Arbeit zur eingehenderen Untersuchung eines Gegenstandes bringt der Aufsatz »Kombinantenkegelschnitte von Kegelschnittbüscheln« auf p. 1 bis 15 dieses Bandes.

1. Algebraische Größen 2. Grades im Raum.

Bezeichnen e_1, e_2, e_3, e_4 vier voneinander unabhängige Größen 1. Stufe (eigentliche oder uneigentliche Punkte), so läßt sich jede algebraische Punktgröße 2. Grades $a^{(2)}$ im Raum (quarternäre Größe) auf die Form

$$a^{(2)} = \Sigma\, \mathfrak{a}_{ik}\, e_i\, e_k \quad \begin{pmatrix} i = 1,..,4 \\ k = 1,..,4 \end{pmatrix} \mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki} \qquad (1)$$

bringen. Setzt man

$$\left.\begin{array}{c} [e_1\, e_2\, e_3\, e_4] = 1, \\ {[e_2\, e_3\, e_4]} = \varepsilon_1,\ -[e_1\, e_3\, e_4] = \varepsilon_2,\ [e_1\, e_2\, e_4] = \varepsilon_3,\ -[e_1\, e_2\, e_3] = \varepsilon_4, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

dann ist

$$[e_i\, \varepsilon_i] = 1,\ [e_i\, \varepsilon_k] = 0\ (i \neq k) \text{ und } [\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4] = 1,$$

ferner

$$e_1 = -[\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4],\ e_2 = [\varepsilon_1\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4],\ e_3 = -[\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_4],\ e_4 = [\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3].$$

Nach der Definition des Faltproduktes hat man nun

$$\{a^{(2)}\, \varepsilon_i\} = \mathfrak{a}_{i1}\, e_1 + \mathfrak{a}_{i2}\, e_2 + \mathfrak{a}_{i3}\, e_3 + \mathfrak{a}_{i4}\, e_4 \qquad (3)$$

und, wenn man diese Größe 1. Stufe mit a_i bezeichnet,

$$a^{(2)} = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3 + a_4\, e_4 \qquad (4)$$

oder auch

$$a^{(2)}[\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4] = -\{a^{(2)}\, \varepsilon_1\}[\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4] + \{a^{(2)}\, \varepsilon_2\}[\varepsilon_1\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4] - \ldots$$
$$\ldots + \{a^{(2)}\, \varepsilon_4\}[\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3]. \qquad (4')$$

Wegen $\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki}$ gilt die Beziehung

$$[a_1\, e_1] + [a_2\, e_2] + [a_3\, e_3] + [a_4\, e_4] = 0. \qquad (5)$$

Besteht umgekehrt für 4 Punkte a_i diese Gleichung, so muß für alle 6 Kombinationen $i\,k$ der 4 Zeiger $\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki}$ sein; $\Sigma\, a_i\, e_i\ (i = 1,..,4)$ stellt also dann eine algebraische Größe $a^{(2)}$ dar, für die $\{a^{(2)}\, \varepsilon_i\} = a_i$ ist.

Die Gleichung (5) sagt aus, daß jedes Tetraeder mit seinem polaren Tetraeder bezüglich der Fläche $a^{(2)}$ hyperboloidisch liegt, d. h. daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken dieser Tetraeder einer Regelschar 2. Grades angehören.

Liegen umgekehrt die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Tetraeder $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ und $e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ hyperboloidisch, so besteht eine Zahlbeziehung

$$\mathfrak{l}_1\, [a_1\, e_1] + \mathfrak{l}_2\, [a_2\, e_2] + \mathfrak{l}_3\, [a_3\, e_3] + \mathfrak{l}_4\, [a_4\, e_4] = 0.$$

Setzt man $\mathfrak{l}_i a_i = a'_i$, so läßt sie sich schreiben

$$\Sigma [a'_i e_i] = 0 \qquad (i = 1, .., 4).$$

Da ihre Form mit der der Gleichung (5) übereinstimmt, sind $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ und $e_1 e_2 e_3 e_4$ polare Tetraeder einer bestimmten Fläche 2. Grades, also auch die ursprünglichen Tetraeder, weil ja a'_i und a_i dieselbe Lage haben. Mithin gilt der Satz:

Die hyperboloidische Lage zweier Tetraeder ist notwendig und hinreichend dafür, daß sie hinsichtlich einer Fläche 2. Grades polar sind.

Hieraus folgt dann unmittelbar der Satz von M. Chasles:[1] *Gehören die Verbindungslinien zugeordneter Ecken zweier Tetraeder einer Regelschar 2. Ordnung an, so gilt gleiches von den Schnittlinien der entsprechenden Flächen dieser Tetraeder.*

Werden die Punkte a_i Vielfache der e_i, hat also $a^{(2)}$ die Form

$$a^{(2)} = \Sigma \mathfrak{a}_i e_i^2,$$

so bilden die Punkte e_1, e_2, e_3, e_4 ein Poltetraeder von $a^{(2)}$. Zu einer nichtsingulären $a^{(2)}$ gibt es ∞^6 Poltetraeder.

Wie in R. m. F., Nr. 1, zeigt man auch hier:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $a^{(2)}$ eine Größe sei, die bereits einem Gebiet i-ter Stufe ($i < 4$) angehört oder, wie man auch sagt, den Rang i besitzt,[2] *ist $\{a^{(2)\,i+1}\} = 0$ und $\{a^{(2)\,i}\} \neq 0$.*

Hat die Größe $a^{(2)}$ die Normalform (4), so sagt $\{a^{(2)} \varepsilon_i\} = a_i$ aus, daß man das Faltprodukt $\{a^{(2)} \varepsilon_i\}$ dadurch erhält, daß man in $a^{(2)}$ die a_i wie Zahlen betrachtet und die Größe mit ε_i äußerlich multipliziert Dies gilt auch für die Faltung von $a^{(2)}$ mit einer beliebigen Ebene $\gamma = \Sigma \mathfrak{c}_i \varepsilon_i$ ($i = 1, .., 4$). Denn es ist

$$\{a^{(2)} \gamma\} = \Sigma \mathfrak{c}_i \{a^{(2)} \varepsilon_i\} = \Sigma \mathfrak{c}_i a_i = \Sigma a_i [e_i \gamma].$$

Wegen $\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki} = [a_k \varepsilon_i]$ läßt sich Gleichung (3) auch schreiben

$$\{a^{(2)} \varepsilon_i\} = \Sigma [a_k \varepsilon_i] e_k \qquad (k = 1, .., 4);$$

demnach ist

$$\{a^{(2)} \gamma\} = [a_1 \gamma] e_1 + [a_2 \gamma] e_2 + [a_3 \gamma] e_3 + [a_4 \gamma] e_4.$$

---

[1] Aperçu historique, 2e éd., Paris 1875, p. 403. Wegen weiterer Literatur hierzu vgl. Enzykl. math. Wissensch., III C 2 (Staude), Anm. 166.

[2] Vgl. R. m. F., p. 463, Fußnote 2.

Es gilt also auch hier (wie in R. m. F., Nr. 2) der Satz:

Nimmt man die Größe $a^{(2)}$ in obiger Normalform an, so erhält man ihr Faltprodukt mit einer Ebene (einem Blatt) γ, wenn man entweder die Faktoren a_i oder die Faktoren e_i mit γ äußerlich multipliziert (»faltet«).

Zufolge dieses Satzes erhält man für das Faltprodukt von $a^{(2)}$ mit dem algebraischen Produkt $\gamma\,\delta$ zweier Ebenen, wegen $\{a^{(2)}\,.\,\gamma\,\delta\} = \{a^{(2)}\gamma\,.\,\delta\}$ die Gleichungen

$$\{a^{(2)}\ \ \gamma\,\delta\} = \Sigma\,[a_i\,\gamma]\,[e_i\,\delta] = \Sigma\,[a_i\,\delta]\,[e_i\,\gamma] \qquad (i = 1,..,4). \tag{6}$$

Für Ebenengrößen gilt alles dual wie für Punktgrößen. Stellt nun

$$\beta^{(2)} = \beta_1\,\varepsilon_1 + \beta_2\,\varepsilon_2 + \beta_3\,\varepsilon_3 + \beta_4\,\varepsilon_4 \tag{7}$$

mit

$$\Sigma\,[\beta_i\,\varepsilon_i] = 0$$

eine Ebenengröße 2. Grades in der Normalform dar, so folgt unter Verwendung des distributiven Gesetzes für Faltprodukte und unter Beachtung von (6)

$$\{a^{(2)}\,\beta^{(2)}\} = \Sigma\,[a_i\,\beta_i]. \tag{8}$$

Verschwindet diese bilineare Invariante, so sagt man, $a^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ sind *apolar*. Gehören die Ecken p_1, p_2, p_3, p_4 eines Poltetraeders von $a^{(2)}$ der Fläche $\beta^{(2)}$ an, so ist. wegen $a^{(2)} = \Sigma\,\alpha_i\,p_i^2$, $\{a^{(2)}\,\beta^{(2)}\} = 0$. Aus dem Bestehen dieser Gleichung schließt man umgekehrt auf bekannte Weise, daß ∞^3 Poltetraeder von $a^{(2)}$ der Fläche $\beta^{(2)}$ eingeschrieben und ∞^3 Poltetraeder von $\beta^{(2)}$ der Fläche $a^{(2)}$ umgeschrieben sind.

$$\{a^{(2)}\,\xi^2\} = 0 \text{ oder } \{\beta^{(2)}\,x^2\} = 0,$$

wo ξ eine veränderliche Ebene und x einen veränderlichen Punkt bezeichnet, sind die Gleichungen der $a^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ zugehörigen Flächen 2. Klasse, beziehungsweise 2. Ordnung.

Im Raum treten gleichberechtigt neben den algebraischen Punkt- und Ebenengrößen noch die *Strahl-(Stab-)Größen* auf.

Aus den Einheitspunkten e_i lassen sich sechs verschiedene äußere Produkte 2. Stufe bilden, $E_{ik} = [e_i\,e_k]$. Wählen wir für sie die einfachern Bezeichnungen

$$\begin{aligned} E_1 &= [e_2\,e_3], & E_2 &= [e_3\,e_1], & E_3 &= [e_1\,e_2], \\ E_4 &= [e_1\,e_4], & E_5 &= [e_2\,e_4], & E_6 &= [e_3\,e_4], \end{aligned} \tag{9}$$

dann ist, $i+3$ immer mod. 6 genommen,

$$\left.\begin{aligned} [E_i\,E_{i+3}] &= [e_1\,e_2\,e_3\,e_4] = 1, \\ [E_i\,E_k] &= [E_k\,E_i] = 0 \ \text{ für } k \neq i+3. \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{10}$$

Unter Anwendung des allgemeinen Grassmann'schen Ergänzungsbegriffs (Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 89 bis 91) ist $E_{i+3} = |E_i$, und die letzten zwei Gleichungen sind identisch mit

$$[E_i|E_i] = 1, \quad [E_i|E_k] = 0. \tag{11}$$

Eine Stabsumme

$$A = \Sigma\, \mathfrak{a}_i E_i \quad (i = 1, 2, .\ ., 6)$$

heiße auch eine *lineare Komplexgröße*; sie bestimmt nämlich mittels der Gleichung $[A X] = 0$ die Strahlen eines linearen Komplexes (Strahlgewindes), der für $[A A] = 0$, und nur dafür, ein spezieller (ein Strahlgebüsch oder Nullkomplex) wird.[1] Stellt man den Strahl X in der Form $X = \Sigma\, \mathfrak{x}_i|E_i$ dar, so lautet die Gleichung des zu A gehörigen Komplexes $\Sigma\, \mathfrak{a}_i \mathfrak{x}_i = 0$.

Aus den 6 Größen E_i lassen sich 21 verschiedene algebraische Produkte 2. Grades bilden, nämlich die 6 Quadrate E_i^2 und die 15 Produkte $E_i E_k$. Jede aus ihnen abgeleitete *algebraische Strahlgröße 2. Grades*

$$A^{(2)} = \Sigma\, \mathfrak{a}_{ik} E_i E_k \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ \ ., 6, \ \ \mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki} \tag{12}$$

heiße auch eine *Komplexgröße 2. Grades* oder eine *quadratische Komplexgröße;* sie bestimmt mittels der Gleichung

$$\{A^{(2)} X^2\} = \Sigma\, \mathfrak{a}_{ik} [E_i X] [E_k X] = \Sigma\, \mathfrak{a}_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k = 0$$

den zugehörigen quadratischen Strahlkomplex.

Nach der Definition der Faltprodukte hat man unter Berücksichtigung der Gleichungen (11)

$$\{A^{(2)}|E_i\} = \Sigma\, \mathfrak{a}_{ik} E_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 6). \tag{13}$$

Bezeichnet man diese lineare Komplexgröße mit A_i, so ist nach Gleichung (12)

$$A^{(2)} = A_1 E_1 + A_2 E_2 + \ \ . + A_6 E_6 . \tag{14}$$

Die linearen Komplexgrößen (oder Stabsummen) bilden ein Gebiet 6. Stufe, in welchem nun wieder äußere Produkte definiert werden können.[2] Um diese Produkte durch eine Bezeichnung von den auf das Punktgebiet 4. Stufe bezüglichen zu unterscheiden, schließen wir die Faktoren A_i wohl wieder durch eckige Klammern ein, fügen aber der Schlußklammer die Stufenzahl 6 des bezüglichen

---

[1] Vgl. E. Müller, Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Grassmannschen Ausdehnungslehre, Monatsh. Math. Phys., *2* (1891), p. 267 bis 290, Nr. 1.

[2] E. Müller, a. a. O., Nr. 3.

Gebietes als Marke bei. $[A_1 A_2]_6$ bezeichne also das äußere Produkt der beiden Komplexgrößen; es bestimmt das A_1 und A_2 enthaltende Komplexbüschel oder ihr gemeinsames Strahlnetz. Die Einheiten $E_1, \ldots, E_6$ geben 15 solche von Null verschiedene äußere Produkte.

Wegen $\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki}$ gilt für die in (14) auftretenden Stabsummen A_i, wie aus ihrer Definition durch (13) hervorgeht, die zu (5) analoge Gleichung

$$[A_1 E_1]_6 + [A_2 E_2]_6 + \cdot \quad + [A_6 E_6]_6 = 0; \tag{15}$$

denn nach der Ausrechnung verschwinden die Koeffizienten aller Produkte $[E_i E_k]_6$. Besteht umgekehrt für irgend 6 Stabsummen $A_i = \Sigma\, \mathfrak{a}_{ik} E_k$ $(k = 1, \ldots, 6)$ die Gleichung (15), dann ist in ihnen $\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki}$, und es stellt die algebraische Größe $\Sigma\, A_i E_i$ eine Komplexgröße 2. Grades $A^{(2)}$ dar, für die $\{A^{(2)} | E_i\} = A_i$ ist.

Wegen $A_i = \{A^{(2)} | E_i\}$ sind die A_i die Polarkomplexe der Kanten des Tetraeders $e_1 e_2 e_3 e_4$ bezüglich $A^{(2)}$. Gleichung (15) sagt also, nebenbei bemerkt, aus: *Die Kanten eines Tetraeders bestimmen mit den Polarkomplexen ihrer Gegenkanten bezüglich eines Strahlkomplexes 2. Grades 6 Komplexbüschel von der besondern Lage, daß jedes Komplexgebiet 5. Stufe, das fünf dieser Büschel schneidet, immer auch das sechste schneidet.* Dies ist ein Sonderfall des liniengeometrischen Seitenstückes zu dem oben erwähnten Satz über die hyperboloidische Lage zweier Poltetraeder einer Fläche 2. Grades.

Faltet man Gleichung (12) mit einer Stabsumme

$$C = \Sigma\, \mathfrak{c}_i | E_i \quad (i = 1,\ 2, ., 6) \tag{16}$$

und beachtet, daß $\{A^{(2)} | E_i\} = A_i$ ist, so erhält man

$$\{A^{(2)} C\} = \Sigma\, \mathfrak{c}_i A_i.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf zwei Arten schreiben. Wegen $\mathfrak{c}_i = [E_i C]$ ist einmal

$$\Sigma\, \mathfrak{c}_i A_i = \Sigma\, A_i [E_i C].$$

Wegen

$$A_i = \sum_k \mathfrak{a}_{ik} E_k = \sum [A_i | E_k]\, E_i$$

läßt sich die letzte Gleichung ferner schreiben

$$\Sigma\, \mathfrak{c}_i A_i = \sum_i [A_i (\Sigma\, \mathfrak{c}_k | E_k)]\, E_i = \Sigma\, [A_i C]\, E_i.$$

Es bestehen mithin die Gleichungen

$$\{A^{(2)} C\} = \Sigma\, A_i [E_i C] = \Sigma\, [A_i C]\, E_i \quad (i = 1, \ldots, 6). \tag{17}$$

Sie sagen aus: *Wählt man die Größe $A^{(2)}$ in der Normalform (12), so erhält man ihr Faltprodukt mit einer Stabsumme C, indem man entweder die Faktoren A_i oder die Faktoren E_i mit C äußerlich multipliziert (»faltet«).*

Bezeichnet D eine zweite Stabsumme, so erhält man für das Faltprodukt von $A^{(2)}$ mit dem algebraischen Produkt CD, wegen der Assoziativität dieser Bildung, aus Gleichung (17)

$$\{A^{(2)}.CD\} = \Sigma [A_i C][E_i D] = \Sigma [A_i D][E_i C]. \quad (i = 1, . . , 6). \quad (18)$$

Ist $\{A^{(2)}.CD\} = 0$, so nennen wir *C und D bezüglich $A^{(2)}$ konjugiert.* Diese Gleichung sagt aus, daß das Polargewinde $\{A^{(2)}C\}$ von C bezüglich $A^{(2)}$ zu D apolar (nach F. Klein involutorisch) ist; es ist dann auch $\{A^{(2)}D\}$ zu C apolar. Für C und D als Strahlen (Nullkomplexe) sagt die Gleichung aus, daß das Polargewinde des einen Strahls durch den andern geht. Für X als Strahl ist

$$\{A^{(2)}.CX\} = \{\{A^{(2)}C\}.X\} = 0$$

die Gleichung des Polargewindes von C. Die zu C bezüglich $A^{(2)}$ konjugierten Gewinde bilden ein Gebiet 5. Stufe, zu dem das Polargewinde von C apolar ist; wir nennen dieses Gebiet das zu C bezüglich $A^{(2)}$ *polare Gebiet.* $\{A^{(2)}C^2\} = 0$ bestimmt *die zu $A^{(2)}$ gehörige* quadratische Mannigfaltigkeit jener Gewinde, die bezüglich $A^{(2)}$ zu sich selbst konjugiert sind; die Achsen der Nullgewinde (Strahlgebüsche) dieser Mannigfaltigkeit geben die Strahlen des zu $A^{(2)}$ gehörigen Komplexes. Wir sagen von den zu den Gewinden dieser quadratischen Mannigfaltigkeit bezüglich $A^{(2)}$ polaren Gewindegebieten, daß sie $A^{(2)}$ *berühren.*

Das algebraische Produkt $S_1 S_2$ zweier Stabsummen läßt sich in der Form $^1/_{4i}(S_1 + iS_2)^2 - {}^1/_{4i}(S_1 - iS_2)^2$ schreiben. Mithin läßt sich jede Komplexgröße $A^{(2)}$ als Vielfachensumme von hinreichend vielen Quadraten von Stabsummen darstellen. Wegen $\mathfrak{a}_i S_i^2 = (\sqrt{\mathfrak{a}_i}\, S_i)^2$ kann man, ähnlich wie für algebraische Punkt- und Ebenengrößen 2. Grades, den Satz aussprechen:[1]

Jede Komplexgröße 2. Grades läßt sich als Summe von Quadraten linearer Komplexgrößen darstellen.

Dieser Satz spielt bei der Ableitung von Umformungsgesetzen eine wichtige Rolle.

Es sei hervorgehoben, daß im allgemeinen eine Komplexgröße 2. Grades sich nicht als Summe von Stabquadraten darstellen läßt (vgl. Nr. 6).

---

[1] Allgemeiner gilt: *Jede Komplexgröße n-ten Grades läßt sich als Summe von n-ten Potenzen linearer Komplexgrößen darstellen.*

Für zwei quadratische Komplexgrößen $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, die in den Formen $A^{(2)} = \Sigma A_i E_i$ und $B^{(2)} = \Sigma B_i | E_i$ gegeben gedacht sind, folgt aus Gleichung (18) unter Verwendung des distributiven Gesetzes

$$\{A^{(2)} B^{(2)}\} = \Sigma [A_i B_i]. \tag{19}$$

Verschwindet diese bilineare Invariante, so sollen $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ zueinander *apolar* heißen.

Nach bekannten Überlegungen sieht man, daß es ∞^{15} Gruppen von je sechs Stabsummen $S_1, S_2, .., S_6$ gibt, die paarweise bezüglich $A^{(2)}$ konjugiert sind. Wir nennen jede solche Gruppe ein *Polhexaeder* von $A^{(2)}$. Bezeichnet S'_i das äußere Produkt der fünf von S_i verschiedenen Größen eines Polhexaeders $S_1, S_2, .., S_6$, und zwar in solcher Reihenfolge genommen, daß $[S_i S'_i]_6 = [S_1 S_2 . \; . S_6]_6$ ist, so läßt sich S'_i auch als jene Stabsumme auffassen, die zu den fünf von S_i verschiedenen Größen des Hexaeders apolar ist; $A^{(2)}$ kann dann sicherlich in der Form

$$A^{(2)} = \Sigma \, \alpha_{ik} S'_i S'_k$$

dargestellt werden. Nun ist wegen $[S_i S'_k] = 0$ für $k \neq i$ die zu S_i polare Größe 5. Stufe

$$\{A^{(2)} S_i\} = \sum_k \alpha_{ik} [S_i S'_i] \, S'_k = [S_i S'_i] \sum_k \alpha_{ik} S'_k \quad (k = 1, 2, .., 6).$$

Da diese Größe mit S'_i identisch sein soll, müssen alle Koeffizienten α_{ik} mit Ausnahme von α_{ii} verschwinden. Mithin hat $A^{(2)}$, wenn man α_i statt α_{ii} schreibt, die Form

$$A^{(2)} = \Sigma \, \alpha_i S'^2_i \quad (i = 1, 2, .., 6). \tag{20}$$

Umgekehrt hat jede Strahlgröße 2. Grades dieser Form $S_1, S_2, .., S_6$ als Polhexaeder.

Sei nun für eine zweite quadratische Strahlgröße $B^{(2)}$ $\{B^{(2)} S'^2_i\} = 0$ $(i = 1, 2, .., 6)$, so ist $\{A^{(2)} B^{(2)}\} = 0$, d. h. die beiden Größen sind apolar, wenn $B^{(2)}$ die 6 Gebiete 5. Stufe S'_i berührt. Umgekehrt folgert man aus dem Bestehen der Gleichung $\{A^{(2)} B^{(2)}\} = 0$ nach bekannter Schlußweise, daß es Polhexaeder von $A^{(2)}$ gibt, die $B^{(2)}$ umschrieben sind, sowie Polhexaeder von $B^{(2)}$, die $A^{(2)}$ umschrieben sind. Wir können mithin sagen:[1] *Die Apolarität zweier Komplexgrößen zweiten Grades deckt sich mit der Tatsache, daß es Polhexaeder der einen Größe gibt, deren Gebiete 5. Stufe die andere Größe berühren. Für nicht singuläre Größen in allgemeiner Lage gibt es ∞^{10} solche Polhexaeder.*

---

[1] Schon enthalten in dem allgemeinen Satz, den J. Rosanes, Math. Ann. *23* (1884), p. 415, mittels der später folgenden Gleichung (52) bewiesen hat.

2. Einige einfache Faltprodukte von räumlichen Größen 2. Grades.

Zu Strahlgrößen 2. Grades gelangt man durch Vollfaltung zweier Punkt- oder Ebenengrößen 2. Grades. Nehmen wir die Punktgröße $a^{(2)}$ in der Normalform (1) gegeben an, so ist ihr Faltprodukt mit dem algebraischen Produkt $p\,q$ zweier Punkte gegeben durch

$$2\{a^{(2)}.\,p\,q\} = \Sigma\,[a_i\,p]\,[e_i\,q] + \Sigma\,[a_i\,q]\,[e_i\,p] \quad (i = 1,..,4).$$

Wegen $[a_i\,p] = \sum_k \mathfrak{a}_{ik}\,[e_k\,p]$ $(k = 1,..,4)$ ist nun

$$\Sigma\,[a_i\,p]\,[e_i\,q] = \sum_{ik} \mathfrak{a}_{ik}\,[e_k\,p]\,[e_i\,q] = \sum_k [e_k\,p]\left[\left(\sum_i \mathfrak{a}_{ik}\,e_i\right)q\right] =$$

$$= \sum_k [e_k\,p]\,[a_k\,q] = \sum_i [e_i\,p]\,[a_i\,q],$$

mithin

$$\{a^{(2)}.\,p\,q\} = \Sigma\,[a_i\,p]\,[e_i\,q] = \Sigma\,[a_i\,q]\,[e_i\,p]. \tag{21}$$

Die Faltung von $a^{(2)} = \Sigma\,a_i\,e_i$ mit $p\,q$ geschieht also in der Art, daß man die ersten Faktoren mit p und die zweiten mit q faltet, oder umgekehrt.

Sind jetzt $a^{(2)} = \Sigma\,a_i\,e_i$ und $b^{(2)} = \Sigma\,b_i\,e_i$ zwei Punktgrößen 2. Grades in der Normalform (1), so folgt aus Gleichung (21) bei Anwendung der Distributivität

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \Sigma\,([a_i\,b_k] - [a_k\,b_i])\,[e_i\,e_k]$$

oder nach (9) und unter Verwendung der in R. m. F., Nr. 2, eingeführten Bezeichnung

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} E_1 + \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix} E_2 + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} E_3 + \begin{bmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix} E_4 +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} E_5 + \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} E_6. \tag{22}$$

Für $a^{(2)} = b^{(2)}$ folgt hieraus

$$^1/_2\,\{a^{(2)}\,a^{(2)}\} = [a_2\,a_3]\,E_1 + [a_3\,a_1]\,E_3 + . \quad + [a_3\,a_4]\,E_6. \tag{23}$$

Die dualen Gleichungen gelten für das Faltprodukt zweier Ebenengrößen 2. Grades $\alpha^{(2)} = \Sigma\,\alpha_i\,\varepsilon_i = \Sigma\,\alpha_i|e_i$ und $\beta^{(2)} = \Sigma\,\beta_i\,\varepsilon_i = \Sigma\,\beta_i|e_i$, nämlich

$$\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\} = \begin{bmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}|E_1 + \begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{bmatrix}|E_2 + \quad + \begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{bmatrix}|E_6, \tag{22'}$$

$$^1/_2\,\{\alpha^{(2)}\alpha^{(2)}\} = [\alpha_2\,\alpha_3]|E_1 + [\alpha_3\,\alpha_1]|E_2 \,.\;\;.+[\alpha_3\,\alpha_4]|E_6. \tag{23'}$$

Das Faltprodukt einer quadratischen Strahlgröße $A^{(2)} = \Sigma A_i E_i$ $(i = 1,.., 6)$ mit einer quadratischen Punktgröße $c^{(2)} = \Sigma c_i e_i$ $(i = 1,.., 4)$ gibt eine quadratische Ebenengröße. Wie oben zeigt man die Gültigkeit der mit (21) ähnlichen Gleichung[1]

$$\{A^{(2)}.\,p\,q\} = \Sigma\,[A_i\,p]\,[E_i\,q] = \Sigma\,[A_i\,q]\,[E_i\,p]. \tag{24}$$

Eine einfache Rechnung ergibt dann

$$\{A^{(2)}c^{(2)}\} = ([A_1\,c_4]-[A_5\,c_3]+[A_6\,c_2])\,\varepsilon_1 +$$
$$+([A_2\,c_4]+[A_4\,c_3]-[A_6\,c_1])\,\varepsilon_2+([A_3\,c_4]-[A_4\,c_2]+[A_5\,c_1])\,\varepsilon_3-$$
$$-([A_1\,c_1]+[A_2\,c_2]+[A_3\,c_3])\,\varepsilon_4. \tag{25}$$

Ersetzt man hierin $A^{(2)}$ durch den Ausdruck für $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\}$ aus Gleichung (22), so bekommt man

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\} = \begin{bmatrix}a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\\ c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\varepsilon_1 - \begin{bmatrix}a_1 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\varepsilon_2 + \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_4\end{bmatrix}\varepsilon_3 - \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_4\end{bmatrix}\varepsilon_4. \tag{26}$$

Die Koeffizienten der ε_i sind Ebenen, deren Darstellungen sich (wie R. m. F., Nr. 2) ergeben, wenn man die Matrizen wie Determinanten entwickelt, jedoch unter Beachtung der Reihenfolge der Zeilen und Spalten, und die Produkte als äußere betrachtet. Die Gleichheit von Zeilen einer solchen Matrix bewirkt kein Nullwerden des Ausdrucks.

Für $a^{(2)} = b^{(2)} = c^{(2)}$ werden bei der Entwicklung alle sechs Glieder jeder Matrix gleich, und Gleichung (26) geht über in

$$^1/_6\,\{a^{(2)}a^{(2)}a^{(2)}\} = {}^1/_6\,\{a^{(2)\,3}\} =$$
$$= [a_2\,a_3\,a_4]\,\varepsilon_1 - [a_1\,a_3\,a_4]\,\varepsilon_2 + [a_1\,a_2\,a_4]\,\varepsilon_3 - [a_1\,a_2\,a_3]\,\varepsilon_4, \tag{27}$$

worin auch, nach Gleichung (3), $a_i = \{a^{(2)}\,\varepsilon_i\}$ gesetzt werden könnte.

Das Faltprodukt einer Ebenengröße 2. Grades mit einer Punktgröße 2. Grades ergibt eine Zahl. Ist die Ebenengröße in der Normalform (7) gegeben, etwa $\alpha^{(2)} = \Sigma\,\alpha_i\,\varepsilon_i$, so besteht für sie wieder die Gleichung

---

[1] Bezeichnet X einen Strahl, so beweist man auf ähnliche Weise die Gleichung

$$\{A^{(2)}X\} = \Sigma\,[A_i\,X]\,E_i = \Sigma\,[E_i\,X]\,A_i$$

$$\{\alpha^{(2)} . p\, q\} = \Sigma\, [\alpha_i\, p]\, [\varepsilon_i\, q] = \Sigma\, [\alpha_i\, q]\, [\varepsilon_i\, p], \tag{28}$$

daher für eine quadratische Punktgröße $d^{(2)} = \Sigma\, d_i\, e_i$ in der Normalform

$$\{\alpha^{(2)} d^{(2)}\} = -\Sigma\, [\alpha_i\, d_i] \quad (i = 1, . . , 4)$$

und, wenn man hierin $\alpha^{(2)}$ durch $\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)}\}$ aus Gleichung (26) ersetzt,

$$\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} d^{(2)}\} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Der Ausdruck rechts besteht aus 24 Gliedern. Für $a^{(2)} = b^{(2)} = c^{(2)} = d^{(2)}$ werden sie alle gleich $[a_1\, a_2\, a_3\, a_4]$, und man erhält

$$\{a^{(2)} a^{(2)} a^{(2)} a^{(2)}\} = \{a^{(2)\,4}\} = 24\, [a_1\, a_2\, a_3\, a_4] = \\ = 24\, [\{a^{(2)} \varepsilon_1\}\, \{a^{(2)} \varepsilon_2\}\, \{a^{(2)} \varepsilon_3\}\, \{a^{(2)} \varepsilon_4\}]. \tag{30}$$

Diese Gleichung hätte sich auch unmittelbar aus (27) durch Faltung mit $a^{(2)}$ oder durch Faltung von (23) mit sich selbst ergeben.

Die zu (24) bis (30) dualen Gleichungen für Ebenengrößen seien nicht besonders angeführt.

Durch Faltung der Gleichung (27) mit sich selbst erhält man nach leichter Umformung und unter Beachtung von (23)

$$\{a^{(2)\,3} . a^{(2)\,3}\} = {}^3/_2\, \{a^{(2)\,4}\}\, \{a^{(2)\,2}\}. \tag{31}$$

Schreibt man Gleichung (27) in der Form

$$\alpha^{(2)} = \alpha_1\, \varepsilon_1 + \alpha_2\, \varepsilon_2 + \alpha_3\, \varepsilon_3 + \alpha_4\, \varepsilon_4,$$

so wird nach der zu (27) dualen Gleichung

$${}^1/_6\, \{\alpha^{(2)\,3}\} = [\alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4]\, e_1 - [\alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4]\, e_2 + [\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_4]\, e_3 - [\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3]\, e_4.$$

Setzt man hierin für die α_i die entsprechenden Punktprodukte aus (27), so erhält man

$${}^1/_6\, \{\alpha^{(2)\,3}\} = [a_1\, a_2\, a_3\, a_4]^2\, (a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3 + a_4\, e_4) = [a_1\, a_2\, a_3\, a_4]^2\, a^{(2)}$$

oder mit Rücksicht auf (30)

$$\{\{a^{(2)\,3}\}^3\} = \frac{9}{4}\, \{a^{(2)\,4}\}^2\, a^{(2)}. \tag{32}$$

Diese Beziehung führt, wenn man (31) mit $\{a^{(2)\,3}\}$ faltet, zur Gleichung

$$\{a^{(2)\,2} . a^{(2)\,3}\} = {}^3/_2\, \{a^{(2)\,4}\}\, a^{(2)}. \tag{32'}$$

Durch Faltung von (32) mit $\{a^{(2)3}\}$ folgt ferner

$$\left\{\{a^{(2)3}\}^4\right\} = \frac{9}{4}\{a^{(2)4}\}^3. \tag{33}$$

Zu diesen wichtigen Gleichungen gelten natürlich wiederum die dualen.

Aus der Gleichung (27) folgt durch Faltung mit einem Punkt r

$$\begin{aligned} {}^1/_6\{a^{(2)3}\,r\} = [a_2\,a_3\,a_4]\,[\varepsilon_1\,r] - [a_1\,a_3\,a_4]\,[\varepsilon_2\,r] + \\ + [a_1\,a_2\,a_4]\,[\varepsilon_3\,r] - [a_1\,a_2\,a_3]\,[\varepsilon_4\,r] \end{aligned}$$

und, wenn man mit dieser Ebene (Polarebene von r) $a^{(2)}$ faltet,

$$\begin{aligned} {}^1/_6\left\{a^{(2)}\{a^{(2)3}\,r\}\right\} = [a_1\,a_2\,a_3\,a_4]\,([\varepsilon_1 r]\,e_1 + [\varepsilon_2 r]\,e_2 + [\varepsilon_3 r]\,e_3 + [\varepsilon_4 r]\,e_4) = \\ = -[a_1\,a_2\,a_3\,a_4]\,r. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtung von (30) läßt sich diese Gleichung schließlich schreiben

$$\left\{a^{(2)}\{a^{(2)3}\,r\}\right\} = -\frac{1}{4}\{a^{(2)4}\}\,r. \tag{34}$$

Setzt man zur Abkürzung ${}^1/_2\{a^{(2)2}\} = A^{(2)}$, so ist nach Gleichung (23) und der Fußnote zu Gl. (24) für einen beliebigen Strahl X

$$\{A^{(2)}X\} = \Sigma\,[A_i\,X]\,E_i$$

und, wenn man diese Gleichung mit (23) faltet,

$$\left\{A^{(2)}\{A^{(2)}X\}\right\} = \Sigma\,[A_i X]\,A_{i+3} = [a_1\,a_2\,a_3\,a_4]\,X$$

oder wegen (30)

$$\left\{a^{(2)2}\,\{a^{(2)2}X\}\right\} = {}^1/_6\{a^{(2)4}\}X. \tag{35}$$

3. Einige Umformungen zusammengesetzter Faltprodukte.

Zur Ableitung von Umformungsgesetzen zusammengesetzter Faltprodukte empfiehlt es sich, wie bei den Größen 2. Grades in der Ebene (R. m. F., Nr. 3), die Darstellung der algebraischen Größen als Quadratensumme von Elementen (Punkten, Geraden, Ebenen) zu benutzen.

Um z. B. eine Umformung des Ausdrucks

$$\mathfrak{P} = \left\{\{a^{(2)}X^2\}\,\{b^{(2)}X^2\}\right\}$$

zu erhalten, setzen wir $a^{(2)} = \Sigma\,a_i^2$, $b^{(2)} = \Sigma\,b_i^2$. Dann hat man, in abgekürzter Schreibweise,

$$\mathfrak{P} = \Sigma \{a_i^2 X^2 . b_k^2 X^2\} = \Sigma [a_i X . b_k X]^2 = \Sigma [a_i b_k X]^2 X^2 =$$
$$= X^2 \Sigma \{a_i^2 b_k^2 X^2\} = \{a^{(2)} b^{(2)} X^2\} X^2,$$

also die Gleichung

$$\Big\{\{a^{(2)} X^2\} \{b^{(2)} X^2\}\Big\} = \{a^{(2)} b^{(2)} X^2\} X^2; \tag{36}$$

deren duale lautet

$$\Big\{\{\alpha^{(2)} X^2\} \{\beta^{(2)} X^2\}\Big\} = \{\alpha^{(2)} \beta^{(2)} X^2\} X^2. \tag{36'}$$

Größen der Form $\{\alpha^{(2)} \xi^2\}$, $\{\beta^{(2)} \xi^2\}$, $\{\gamma^{(2)} \xi^2\}$ sind Strahlgrößen 2. Grades in der Ebene ξ. Handelt es sich um Faltprodukte dieser Größen, jedoch bezüglich des Gebietes 3. Stufe der Ebene ξ, so wollen wir sie mit $\Big\{\{\alpha^{(2)} \xi^2\} \{\beta^{(2)} \xi^2\}\Big\}_\xi$ oder $\Big\{\{\alpha^{(2)} \xi^2\} \{\beta^{(2)} \xi^2\} \{\gamma^{(2)} \xi^2\}\Big\}_\xi$ bezeichnen, also durch Anfügen der Marke ξ von den auf den Raum bezüglichen Produkten unterscheiden. Setzt man $\alpha^{(2)} = \Sigma \alpha_i^2$, $\beta^{(2)} = \Sigma \beta_i^2$, $\gamma^{(2)} = \Sigma \gamma_i^2$, so erhält man ähnlich wie vorhin

$$\Big\{\{\alpha^{(2)} \xi^2\} \{\beta^{(2)} \xi^2\}\Big\}_\xi = \Sigma [\alpha_i \xi . \beta_k \xi]_\xi^2$$

und

$$\Big\{\{\alpha^{(2)} \xi^2\} \{\beta^{(2)} \xi^2\} \{\gamma^{(2)} \xi^2\}\Big\}_\xi = \Sigma [\alpha_i \xi . \beta_k \xi . \gamma_l \xi]_\xi^2,$$

wo die Marke ξ an den äußeren Produkten ebenfalls bedeutet, daß diese sich auf die Ebene ξ beziehen.

Setzt man nun $\xi = [x_1 x_2 x_3]$, so ist

$$[\alpha_i \xi] = [\alpha_i x_3] [x_1 x_2] + [\alpha_i x_1] [x_2 x_3] + [\alpha_i x_2] [x_3 x_1],$$

und analoge Ausdrücke erhält man für $[\beta_i \xi]$ und $[\gamma_i \xi]$. Aus ihnen folgt

$$[\alpha_i \xi . \beta_k \xi]_\xi = ([\alpha_i x_3] [\beta_k x_1] - [\alpha_i x_1] [\beta_k x_3]) [x_1 x_2 . x_2 x_3]_\xi + \qquad =$$
$$= [x_1 x_2 x_3] ([\alpha_i \beta_k . x_3 x_1] x_2 + [\alpha_i \beta_k . x_1 x_2] x_3 + [\alpha_i \beta_k . x_2 x_3] x_1) =$$
$$= [x_1 x_2 x_3] [\alpha_i \beta_k \xi]$$

oder

$$[\alpha_i \xi . \beta_k \xi]_\xi = [\alpha_i \beta_k \xi] \xi. \tag{*}$$

Analog erhält man

$$[\alpha_i \xi . \beta_k \xi . \gamma_l \xi]_\xi = [\alpha_i \beta_k \gamma_l . x_1 x_2 x_3] [x_1 x_2 . x_2 x_3 . x_3 x_1]_\xi =$$
$$= [\alpha_i \beta_k \gamma_l \xi] [x_1 x_2 x_3]^2$$

oder

$$[\alpha_i \xi . \beta_k \xi . \gamma_l \xi]_\xi = [\alpha_i \beta_k \gamma_l \xi] \xi^2. \tag{**}$$

Das Einsetzen der Ausdrücke (*) und (**) in die obigen Gleichungen gibt

$$\left\{\{\alpha^{(2)}\xi^2\}\{\beta^{(2)}\xi^2\}\right\}_\xi = \{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\xi^2\}\xi^2 \tag{37}$$

$$\left\{\{\alpha^{(2)}\xi^2\}\{\beta^{(2)}\xi^2\}\{\gamma^{(2)}\xi^2\}\right\}_\xi = \{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\gamma^{(2)}\xi^2\}\xi^4. \tag{38}$$

Solche Gleichungen entsprechen dem »Übertragungsprinzip« von Clebsch in der Invariantentheorie.

Häufige Anwendung findet der

Satz 1: Folgen einander in einem fortschreitenden n-faltigen Produkt die n-ten Potenzen zweier ineinanderliegenden Elemente (Punkt, Strahl, Ebene), so darf man diese Faktoren vertauschen.

Betrachtet man nämlich das Faltprodukt $\mathfrak{P}$ bis einschließlich der im Satz erwähnten Faktoren, die etwa A^n und b^n heißen mögen, führt statt aller darin als Faktoren auftretenden algebraischen Größen Summen von n-ten Potenzen der betreffenden Elemente ein und multipliziert aus, so erhält man eine Summe von n-ten Potenzen fortschreitender, äußerer (= kombinatorischer) Produkte von Elementen. Nach Nr. 123 der Ausdehnungslehre von 1861 darf man aber in jedem solchen Produkt die ineinanderliegenden Faktoren A und b vertauschen. Durch entsprechende Rückverwandlungen erhält man die ursprüngliche Form von $\mathfrak{P}$, worin nur A^n und b^n vertauscht sind.

Es ist demnach

$$\{a^{(2)}x^2\xi^2\} = \{a^{(2)}\xi^2\}x^2 \quad \text{für } x \text{ und } \xi \text{ inzident,}$$

$$\{a^{(2)}X^2\xi^2\} = \{a^{(2)}\xi^2\}X^2 \quad \text{für } X \text{ und } \xi \text{ inzident.}$$

Eine algebraische Größe $\mathfrak{A}^{(n)}$ (Punkt-, Strahl- oder Ebenengröße) heiße mit einem Element (d. h. einer einfachen Größe 1. Grades) $\mathfrak{A}^{(1)}$ inzident, wenn $\mathfrak{A}^{(n)}$ als Summe der n-ten Potenzen von Elementen darstellbar ist, die alle mit $\mathfrak{A}^{(1)}$ inzident sind; dann ergibt sich aus Satz 1 leicht der allgemeinere

Satz 2: Sind in einem n-faltigen fortschreitenden Produkt eine algebraische Größe n-ten Grades und die n-te Potenz eines mit dieser Größe inzidenten Elementes benachbarte Faktoren, so darf man sie vertauschen.

Denn ersetzt man in dem Produkt die Größe $\mathfrak{A}^{(n)}$ durch die Summe der n-ten Potenzen der mit $\mathfrak{A}^{(1)}$ inzidenten Elemente und multipliziert aus, so erhält man Produkte der in Satz 1 erwähnten Art, worin dann $\mathfrak{A}^{(1)n}$ mit dem benachbarten Summanden von $\mathfrak{A}^{(n)}$ vertauscht werden darf.

Liegt z. B. die Strahlgröße $B^{(2)}$ in ξ, so ist

$$\{a^{(2)}B^{(2)}\xi^2\} = \{a^{(2)}\xi^2\}B^{(2)}.$$

Zu den in R. m. F., p. 472, abgeleiteten Gleichungen (19) und (18) gibt es im Raum Seitenstücke, und sie werden auf gleiche Weise gefunden.

Setzt man nämlich $a^{(2)} = \Sigma a_i^2$, $b^{(2)} = \Sigma b_i^2$, $\gamma^{(2)} = \Sigma \gamma_i^2$, so ist

$$\{a^{(2)} b^{(2)} \gamma^{(2)}\} = \Sigma [a_i b_k \gamma_l]^2 = \Sigma ([a_i \gamma_l] b_k - [b_k \gamma_l] a_i)^2 =$$
$$= \Sigma [a_i \gamma_l]^2 b_k^2 + \Sigma [b_k \gamma_l]^2 a_i^2 - 2 \Sigma [a_i \gamma_l][b_k \gamma_l] a_i b_k =$$
$$= \Sigma \{a_i^2 \gamma_l^2\} b_k^2 + \Sigma \{b_k^2 \gamma_l^2\} a_i^2 - 2 \Sigma \{a_i^2 \gamma_l\}\{b_k^2 \gamma_l\}.$$

Wird, wie a. a. O., p. 470, Gleichung (12), das teilfaltige Produkt $\Sigma \{a_i^2 \gamma_l\}\{b_k^2 \gamma_l\}$, mit $\{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)}\}$ bezeichnet, so lautet diese Gleichung

$$\{a^{(2)} b^{(2)} \gamma^{(2)}\} = \{a^{(2)} \gamma^{(2)}\} b^{(2)} + \{b^{(2)} \gamma^{(2)}\} a^{(2)} - 2 \{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)}\}. \quad (39)$$

Man zeigt, wie a. a. O., p. 471, daß $\{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)}\}$ die *gemischte polare Fläche* 2. Klasse von $\gamma^{(2)}$ bezüglich $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ darstellt, d. h. den Ort aller Ebenen, deren Pole bezüglich $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ hinsichtlich $\gamma^{(2)}$ konjugiert sind. Insbesondre stellt $\{(a^{(2)} a^{(2)}) \gamma^{(2)}\}$ die *polare Fläche* von $\gamma^{(2)}$ bezüglich $a^{(2)}$ dar. Es ist ferner auch hier

$$\{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)} . \delta^{(2)}\} = \{(a^{(2)} b^{(2)}) \delta^{(2)} . \gamma^{(2)}\}, \quad (40)$$

daher $\{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)} \xi^2\} = 0$ die Gleichung der gemischten polaren Fläche von $\gamma^{(2)}$ bezüglich $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$.

Für ein fortschreitendes n-faltiges Produkt von Größen n-ten Grades gelten dieselben assoziativen Beziehungen wie für das entsprechende fortschreitende äußere Produkt der entsprechenden Größen 1. Grades, was man auf dieselbe Art wie die Sätze 1 und 2 beweist. Daher ist z. B.

$$\{a^{(2)} b^{(2)} \quad \gamma^{(2)} \delta^{(2)}\} = \{a^{(2)} b^{(2)} \gamma^{(2)} \delta^{(2)}\}. \quad (41)$$

Wegen dieser Beziehung folgt aus (39) durch Faltung mit $\delta^{(2)}$

$$\{a^{(2)} b^{(2)} \quad \gamma^{(2)} \delta^{(2)}\} =$$
$$= \{a^{(2)} \gamma^{(2)}\}\{b^{(2)} \delta^{(2)}\} + \{a^{(2)} \delta^{(2)}\}\{b^{(2)} \gamma^{(2)}\} - 2 \{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)} \delta^{(2)}\}. \quad (42)$$

Aus dieser Gleichung und der dualen für $\{\gamma^{(2)} \delta^{(2)} \quad a^{(2)} b^{(2)}\}$ schließt man

$$\{(a^{(2)} b^{(2)}) \gamma^{(2)} \delta^{(2)}\} = \{(\gamma^{(2)} \delta^{(2)}) a^{(2)} b^{(2)}\}. \quad (43)$$

Für $a^{(2)} = b^{(2)}$ und $\gamma^{(2)} = \delta^{(2)}$ geht (42) über in

$$\tfrac{1}{2} \{a^{(2)2} . \gamma^{(2)2}\} = \{a^{(2)} \gamma^{(2)}\}^2 - \{(a^{(2)} a^{(2)}) \gamma^{(2)2}\}. \quad (44)$$

Wie Gleichung (39) beweist man die beiden folgenden Gleichungen

$$\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} . \delta^{(2)}\} = \{a^{(2)} \delta^{(2)}\} \{b^{(2)} c^{(2)}\} + \{b^{(2)} \delta^{(2)}\} \{c^{(2)} a^{(2)}\} +$$
$$+ \{c^{(2)} \delta^{(2)}\} \{a^{(2)} b^{(2)}\} - 2 \{(a^{(2)} b^{(2)}) \delta^{(2)} . c^{(2)}\} - 2 \{(b^{(2)} c^{(2)}) \delta^{(2)} . a^{(2)}\} -$$
$$- 2 \{(c^{(2)} a^{(2)}) \delta^{(2)} . b^{(2)}\}, \quad (45)$$

$$\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} d^{(2)}\} \varphi^{(2)} = \{a^{(2)} \varphi^{(2)}\} \{b^{(2)} c^{(2)} d^{(2)}\} +$$
$$. + \{d^{(2)} \varphi^{(2)}\} \{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)}\} - 2 \{(a^{(2)} b^{(2)}) \varphi^{(2)} . c^{(2)} d^{(2)}\} - .$$
$$. - 2 \{(c^{(2)} d^{(2)}) \varphi^{(2)} . a^{(2)} b^{(2)}\}, \quad (46)$$

in denen eine Fülle besondrer Beziehungen steckt. In ihnen kann jede der polaren Bildungen, wie z. B. $-2 \{(a^{(2)} b^{(2)}) \delta^{(2)}\}$, nach Gleichung (39) durch $\{a^{(2)} b^{(2)} \delta^{(2)}\} - \{a^{(2)} \delta^{(2)}\} b^{(2)} - \{b^{(2)} \delta^{(2)}\} a^{(2)}$ ersetzt werden. Durch solche Ersetzungen geht (45), bei Weglassung der Gradanzeige, über in

$$\{a\, b\, c . \delta\} = \{a\, b\, \delta\, c\} + \{b\, c\, \delta\, a\} + \{c\, a\, \delta\, b\} -$$
$$- \{a\, \delta\} \{b\, c\} - \{b\, \delta\} \{c\, a\} - \{c\, \delta\} \{a\, b\}. \quad (45')$$

Für $a^{(2)} = b^{(2)} = c^{(2)}$ z. B. geht (45) über in

$$\{a^{(2)3} . \delta^{(2)}\} = 3 \{a^{(2)} \delta^{(2)}\} \{a^{(2)2}\} - 6 \{(a^{(2)} a^{(2)}) \delta^{(2)} . a^{(2)}\} \quad (47)$$

und für $a^{(2)} = b^{(2)} = c^{(2)} = d^{(2)}$ die Gleichung (46) über in

$$\{a^{(2)4}\} \varphi^{(2)} = 4 \{a^{(2)} \varphi^{(2)}\} \{a^{(2)3}\} - 12 \{(a^{(2)} a^{(2)}) \varphi^{(2)} . a^{(2)2}\}. \quad (48)$$

Wählt man in (48) $\varphi^{(2)} = \varphi^2$, wo φ eine Ebene bezeichnet, so erhält man wegen $\{(a^{(2)} a^{(2)}) \varphi^2\} = \{a^{(2)} \varphi\}^2$

$$\{a^{(2)4}\} \varphi^2 = 4 \{a^{(2)} \varphi^2\} \{a^{(2)3}\} - 12 \left\{a^{(2)2} \{a^{(2)} \varphi\}^2\right\}$$

oder

$$12 \left\{a^{(2)2} \{a^{(2)} \varphi\}^2\right\} = 4 \{a^{(2)} \varphi^2\} \{a^{(2)3}\} - \{a^{(2)4}\} \varphi^2. \quad (49)$$

Für $\{a^{(2)} \varphi^{(2)}\} = 0$, also *für eine Tangentialebene* φ *von* $a^{(2)}$ folgt insbesondre

$$12 \left\{a^{(2)2} \{a^{(2)} \varphi\}^2\right\} = - \{a^{(2)4}\} \varphi^2. \quad (50)$$

Die Faltung von (49) mit der Punktgröße $b^{(2)}$ gibt

$$12 \left\{a^{(2)2} b^{(2)} \{a^{(2)} \varphi\}^2\right\} = 4 \{a^{(2)3} b^{(2)}\} \{a^{(2)} \varphi^2\} - \{a^{(2)4}\} \{b^{(2)} \varphi^2\}. \quad (51)$$

Die dazu duale Gleichung für einen Punkt x lautet

$$12 \left\{\alpha^{(2)2} \beta^{(2)} \{\alpha^{(2)} x\}^2\right\} = 4 \{\alpha^{(2)3} \beta^{(2)}\} \{\alpha^{(2)} x^2\} - \{\alpha^{(2)4}\} \{\beta^{(2)} x^2\}. \quad (51')$$

Seitenstücke zu den vorhergehenden Gleichungen gibt es natürlich in Gebieten beliebiger Stufenzahl. Für ein Gebiet r-ter Stufe lautet z. B. das Seitenstück zur letzten Gleichung[1]

$$r(r-1)\left\{\alpha^{(2)\,r-1}\,\beta^{(2)}\,\{\alpha^{(2)}\,x\}^2\right\} = r\left\{\alpha^{(2)\,r-1}\,\beta^{(2)}\right\}\left\{\alpha^{(2)}\,x^2\right\}-\left\{\alpha^{(2)\,r}\right\}\left\{\beta^{(2)}\,x^2\right\}, \quad .(52)$$

worin $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ $(r-1)$-stufige Größen 2. Grades bedeuten.

Bezeichnet $D^{(2)} = \Sigma D_i^2$, wo die D_i Stabsummen bedeuten, eine beliebige Strahlgröße 2. Grades, so gelangt man auf demselben Weg, der zu Gleichung (39) führte, zur Gleichung

$$\begin{aligned}\left\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\;\;D^{(2)}\right\} &= \left\{b^{(2)}\,c^{(2)}\,D^{(2)}\right\}a^{(2)}+\left\{c^{(2)}\,a^{(2)}\,D^{(2)}\right\}b^{(2)}+\\ &+\left\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,D^{(2)}\right\}c^{(2)}-2\left\{(b^{(2)}\,c^{(2)}).\,a^{(2)}\,D^{(2)}\right\}-2\left\{(c^{(2)}\,a^{(2)}).\,b^{(2)}\,D^{(2)}\right\}-\\ &-2\left\{(a^{(2)}\,b^{(2)}).\,c^{(2)}\,D^{(2)}\right\}. \quad (53)\end{aligned}$$

Für $b^{(2)} = c^{(2)} = a^{(2)}$ geht sie über in

$$\left\{a^{(2)\,3}\,D^{(2)}\right\} = 3\left\{a^{(2)\,2}\,D^{(2)}\right\}a^{(2)\,2}-6\left\{(a^{(2)}\,a^{(2)}).\,a^{(2)}\,D^{(2)}\right\}. \quad (54)$$

Aus (53) lassen sich die polaren Bildungen wegschaffen. Nach Gleichung (39) ist nämlich, bei Weglassung der Gradanzeige,

$$\begin{aligned}\{a\,b\,.\,c\,D\} &= \{a\,c\,D\}\,b+\{b\,c\,D\}\,a-2\,\{(a\,b)\,.\,c\,D\},\\ \{b\,c\,.\,a\,D\} &= \{b\,a\,D\}\,c+\{c\,a\,D\}\,b-2\,\{(b\,c)\,.\,a\,D\},\\ \{c\,a\,.\,b\,D\} &= \{c\,b\,D\}\,a+\{a\,b\,D\}\,c-2\,\{(c\,a)\,.\,b\,D\}.\end{aligned}$$

Subtrahiert man von der Summe dieser drei Gleichungen die Gleichung (53), so folgt nach Beifügung der Gradanzeige

$$\begin{aligned}&\left\{a^{(2)}\,b^{(2)}\;\;c^{(2)}\,D^{(2)}\right\}+\left\{b^{(2)}\,c^{(2)}.\,a^{(2)}\,D^{(2)}\right\}+\\ &+\left\{c^{(2)}\,a^{(2)}\;\;b^{(2)}\,D^{(2)}\right\}-\left\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}.\,D^{(2)}\right\} = \left\{b^{(2)}\,c^{(2)}\,D^{(2)}\right\}a^{(2)}+\\ &+\left\{c^{(2)}\,a^{(2)}\,D^{(2)}\right\}b^{(2)}+\left\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,D^{(2)}\right\}c^{(2)}. \quad (55)\end{aligned}$$

Setzt man $D^{(2)} = \{d^{(2)}\,e^{(2)}\}$, so gibt diese Gleichung eine *Beziehung zwischen Faltprodukten von fünf Punktgrößen 2. Grades.*

Für $b^{(2)} = c^{(2)} = a^{(2)}$ erhält man daraus

$$3\left\{a^{(2)\,2}.\,a^{(2)}\,D^{(2)}\right\}-\left\{a^{(2)\,3}.\,D^{(2)}\right\} = 3\left\{a^{(2)\,2}\,D^{(2)}\right\}a^{(2)} \quad (56)$$

und für $c^{(2)} = a^{(2)}$, $D^{(2)} = \{a^{(2)\,2}\}$

$$2\left\{a^{(2)}\,b^{(2)}\;\;a^{(2)\,3}\right\} = 2\left\{a^{(2)\,3}\,b^{(2)}\right\}a^{(2)}+\left\{a^{(2)\,4}\right\}b^{(2)}. \quad (57)$$

---

[1] J. Rosanes, Math. Ann. 23 (1884), p. 414. Für das ternäre Gebiet hat sie zuerst M. Pasch angegeben. (Vgl. ebendort Fußnote.)

Bedeuten p, q, r, s Punkte, so ergeben sich auf dieselbe Weise wie in R. m. F., p. 472, die Gleichung (20) hier die Gleichungen

$$\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}[p\,q]\} = [\{\alpha^{(2)}p\}\{\beta^{(2)}q\}] - [\{\alpha^{(2)}q\}\{\beta^{(2)}p\}] = \begin{vmatrix}\{\alpha^{(2)}p\} & \{\alpha^{(2)}q\}\\ \{\beta^{(2)}p\} & \{\beta^{(2)}q\}\end{vmatrix}, \quad \ldots (58)$$

$$\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\gamma^{(2)}[p\,q\,r]\} = \begin{vmatrix}\{\alpha^{(2)}p\} & .\,. & \{\alpha^{(2)}r\}\\ \{\beta^{(2)}p\} & . & \{\beta^{(2)}r\}\\ \{\gamma^{(2)}p\} & .\,. & \{\gamma^{(2)}r\}\end{vmatrix}, \quad (59)$$

$$\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\gamma^{(2)}\delta^{(2)}\}[p\,q\,r\,s] = \begin{vmatrix}\{\alpha^{(2)}p\} & .\,. & \{\alpha^{(2)}s\}\\ \{\beta^{(2)}p\} & .\,. & \{\beta^{(2)}s\}\\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\ \{\delta^{(2)}p\} & & \{\delta^{(2)}s\}\end{vmatrix} \quad (60)$$

Für $\alpha^{(2)} = \beta^{(2)} = \gamma^{(2)} = \delta^{(2)}$ gehen sie über in

$$\{\alpha^{(2)\,2}[p\,q]\} = 2\,[\{\alpha^{(2)}p\}\{\alpha^{(2)}q\}], \quad (61)$$

$$\{\alpha^{(2)\,3}[p\,q\,r]\} = 6\,[\{\alpha^{(2)}p\}\{\alpha^{(2)}q\}\{\alpha^{(2)}r\}], \quad (62)$$

$$\{\alpha^{(2)\,4}\}[p\,q\,r\,s] = 24\,[\{\alpha^{(2)}p\}\{\alpha^{(2)}q\}\{\alpha^{(2)}r\}\{\alpha^{(2)}s\}]. \quad (63)$$

Setzt man für p, q, r, s die ursprünglichen Einheiten, so folgt leicht aus (58) die Gleichung (22′), aus (59) die duale Gleichung zu (26); (60) ist dann dual zu (29) und (63) dual zu (30).

Gleichung (61) sagt aus, *daß* $\{\alpha^{(2)\,2}[p\,q]\}$ *die Polare des Strahls* $[p\,q]$ *bezüglich* $\alpha^{(2)}$ *darstellt.*

Es soll jetzt noch für den Ausdruck $\{a^{(2)}b^{(2)}c^{(2)}d^{(2)}\}\xi$, wo ξ eine Ebene bedeutet, eine wertvolle Umformung abgeleitet werden. Setzt man wieder $a^{(2)} = \Sigma a_i^2$, $b^{(2)} = \Sigma b_i^2, \ldots, d^{(2)} = \Sigma d_i^2$, dann ist

$$\{a^{(2)}b^{(2)}c^{(2)}d^{(2)}\}\xi = \Sigma\{a_i^2 b_k^2 c_l^2 d_m^2\}\xi = \Sigma[a_i b_k c_l d_m]^2\xi.$$

Multipliziert man die Identität

$$[a_i b_k c_l d_m]\xi = [a_i\xi][b_k c_l d_m] - [b_k\xi][a_i c_l d_m] + [c_l\xi][a_i b_k d_m] - [d_m\xi][a_i b_k c_l]$$

mit $[a_i b_k c_l d_m]$, so läßt sie sich schreiben

$$[a_i b_k c_l d_m]^2\xi = \Big\{\{a_i^2\xi\}[b_k c_l d_m]^2\Big\} + \Big\{\{b_k^2\xi\}[a_i c_l d_m]^2\Big\} + \Big\{\{c_l^2\xi\}[a_i b_k d_m]^2\Big\} + \Big\{\{d_m^2\xi\}[a_i b_k c_l]^2\Big\} = \{a_i^2\xi\,.\,b_k^2 c_l^2 d_m^2\} + \{b_k^2\xi\,.\,a_i^2 c_l^2 d_m^2\} + \{c_l^2\xi\,.\,a_i^2 b_k^2 d_m^2\} + \{d_m^2\xi\,.\,a_i^2 b_k^2 c_l^2\}.$$

Da diese vier Ausdrücke in den Größen a_i^2, b_k^2, c_l^2, d_m^2 linear sind, so folgt

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\}\,\xi = \{a^{(2)}\,\xi\,.\,b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\} + \{b^{(2)}\,\xi\,.\,a^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\} + \\ + \{c^{(2)}\,\xi\,.\,a^{(2)}\,b^{(2)}\,d^{(2)}\} + \{d^{(2)}\,\xi\,.\,a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\},$$

was sich auch schreiben läßt

$$-\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\}\cdot\xi = \{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\;\;d^{(2)}\,\xi\} + \{b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}.\,a^{(2)}\,\xi\} + \\ + \{c^{(2)}\,d^{(2)}\,a^{(2)}\;\;b^{(2)}\,\xi\} + \{d^{(2)}\,a^{(2)}\,b^{(2)}.\,c^{(2)}\,\xi\}. \quad (64)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich eine Menge besondrer Gleichungen.

Für $a^{(2)} = b^{(2)} = c^{(2)} = d^{(2)}$ z. B. erhält man

$$-\{a^{(2)\,4}\}\,\xi = 4\,\{a^{(2)\,3}\,.\,a^{(2)}\,\xi\}, \quad (65)$$

welche Gleichung sich auch aus der zu (34) dualen $\{\alpha^{(2)}\,\{\alpha^{(2)\,3}\,\xi\}\} = -{}^1/_4\,\{\alpha^{(2)\,4}\}\,\xi$ folgern läßt, indem man $\alpha^{(2)} = \{a^{(2)\,3}\}$ setzt und die Gleichungen (32) und (33) beachtet.

Ersetzt man in (64) $c^{(2)}$ und $d^{(2)}$ durch $b^{(2)}$, so erhält man

$$-\{a^{(2)}\,b^{(2)\,3}\}\,\xi = \{b^{(2)\,3}\,.\,a^{(2)}\,\xi\} + 3\,\{a^{(2)}\,b^{(2)\,2}\,.\,b^{(2)}\,\xi\} \quad (66)$$

und durch Faltung dieser Gleichung mit $\{b^{(2)}\,\xi\}$, wegen $\{\xi\,.\,b^{(2)}\,\xi\} = -\{b^{(2)}\,\xi^2\}$ und der Gleichung (65),

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)\,3}\}\,\{b^{(2)}\,\xi^2\} = \frac{1}{4}\{b^{(2)\,4}\}\,\{a^{(2)}\,\xi^2\} + 3\,\Big\{a^{(2)}\,b^{(2)\,2}\,\{b^{(2)}\,\xi\}^2\Big\} \quad (67)$$

Ersetzt man endlich in (64) $c^{(2)}$ durch $a^{(2)}$ und $d^{(2)}$ durch $b^{(2)}$, so gelangt man zur Gleichung

$$-{}^1/_2\,\{a^{(2)\,2}\,b^{(2)\,2}\}\,\xi = \{a^{(2)\,2}\,b^{(2)}.\,b^{(2)}\,\xi\} + \{a^{(2)}\,b^{(2)\,2}\,.\,a^{(2)}\,\xi\}. \quad (68)$$

Ganz ähnlich wie Gleichung (64) ergeben sich ihre beiden Seitenstücke

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\}\,X = \{a^{(2)}\,b^{(2)}\,X\,.\,c^{(2)}\,d^{(2)}\} + \{b^{(2)}\,c^{(2)}\,X\,.\,a^{(2)}\,d^{(2)}\} + \\ + \{c^{(2)}\,a^{(2)}\,X\,.\,b^{(2)}\,d^{(2)}\} + \{c^{(2)}\,d^{(2)}\,X\,.\,a^{(2)}\,b^{(2)}\} + \{a^{(2)}\,d^{(2)}\,X\,.\,b^{(2)}\,c^{(2)}\} + \\ + \{b^{(2)}\,d^{(2)}\,X\,.\,c^{(2)}\,a^{(2)}\}, \quad (69)$$

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\}\,x = \{a^{(2)}\,b^{(2)}\,c^{(2)}\,x\,.\,d^{(2)}\} + \{b^{(2)}\,c^{(2)}\,d^{(2)}\,x\,.\,a^{(2)}\} + \\ + \{c^{(2)}\,d^{(2)}\,a^{(2)}\,x\,.\,b^{(2)}\} + \{d^{(2)}\,a^{(2)}\,b^{(2)}\,x\,.\,c^{(2)}\}. \quad (70)$$

Aus der Form von (69) erkennt man, daß sie auch gültig bleibt, wenn X durch eine Stabsumme S ersetzt wird. Von Sonderfällen dieser Gleichungen erwähnen wir

$$\{a^{(2)\,4}\}\,X = 6\,\{a^{(2)\,2}X\,.\,a^{(2)\,2}\} \quad (71)$$

$$\{a^{(2)\,2} . b^{(2)\,2}\} X = \{a^{(2)\,2} X . b^{(2)\,2}\} + \{b^{(2)\,2} X . a^{(2)\,2}\} + 4 \{a^{(2)} b^{(2)} X . a^{(2)} b^{(2)}\} \tag{72}$$

$$\{a^{(2)\,4}\} x = 4 \{a^{(2)\,3} x . a^{(2)}\}. \tag{73}$$

Die Faltung von (72) mit X ergibt, weil die linke Seite Null wird und Faltprodukte linearer Größen äußere Produkte sind,

$$[\{a^{(2)\,2} X\} \{b^{(2)\,2} X\}] = -2 [\{a^{(2)} b^{(2)} X\} \{a^{(2)} b^{(2)} X\}]. \tag{72'}$$

4. Geometrische Bedeutung einiger Faltprodukte.

Das Produkt $\{a^{(2)} X^2\}$ stellt, wenn es von Null verschieden ist, eine Ebenengröße 2. Grades im Büschel (X), also ein Ebenenpaar dar. $\{a^{(2)} X^2 x^2\} = 0$ ist die Gleichung dieses Ebenenpaars. Da man sie auch $\{a^{(2)} [X x]^2\} = 0$ schreiben kann, so ist $[X x]$ eine Tangentialebene an $a^{(2)}$. Daher: *$\{a^{(2)} X^2\}$ stellt das aus X an die Fläche 2. Klasse $a^{(2)}$ legbare Tangentialebenenpaar dar.* Dual: *$\{\alpha^{(2)} X^2\}$ stellt das Schnittpunktepaar von X mit der Fläche 2. Ordnung $\alpha^{(2)}$ dar.*

Wird $\{a^{(2)} X^2\} = 0$, so gilt für jeden Punkt p des Raums $\{a^{(2)} X^2 p^2\} = \{a^{(2)} [X p]^2\} = 0$. Jede Ebene $[X p]$ durch X ist also Tangentialebene von $a^{(2)}$, daher X eine Erzeugende der Fläche. Umgekehrt folgt für X als Erzeugende, d. h. für jede Ebene $[X p]$ als Tangentialebene, $\{a^{(2)} X^2\} = 0$. Hat $a^{(2)}$ den Rang 3, d. h. ist sie eine Punktgröße in einer Ebene, so wird $\{a^{(2)} X^2\}$ dann und nur dann Null, wenn X Tangente der Kurve ist. Hat endlich $a^{(2)}$ den Rang 2 oder 1, d. h. ist sie ein Punktepaar oder ein Doppelpunkt, so verschwindet $\{a^{(2)} X^2\}$ dann und nur dann, wenn X durch einen der Punkte geht.

Wird $\{\alpha^{(2)} X^2\} = 0$, so gilt, völlig dual wie oben, für jede Ebene π des Raums $\{\alpha^{(2)} X^2 \pi^2\} = \{\alpha^{(2)} [X \pi]^2\} = 0$. Jeder Punkt $[X \pi]$ auf X gehört daher der Fläche $\alpha^{(2)}$ an, X ist also eine Erzeugende der Fläche. Mithin gilt[1] der

Satz 3: $\{a^{(2)} X^2\} = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Erzeugende X der Fläche $a^{(2)}$, beziehungsweise Tangente der Kurve $a^{(2)}$ oder einen Strahl durch einen Punkt des Punktepaars oder Doppelpunktes $a^{(2)}$. $\{\alpha^{(2)} X^2\} = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Erzeugende X der Fläche $\alpha^{(2)}$, beziehungsweise des Kegels $\alpha^{(2)}$ oder einen Strahl in einer der Ebenen des Ebenenpaars oder der Doppelebene $\alpha^{(2)}$.

Auf ähnliche Weise zeigt man:

---

[1] Man zeigt auf gleiche Weise, daß $\{a^{(n)} X^n\} = 0$, beziehungsweise $\{\alpha^{(n)} X^n\} = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß X der Fläche $a^{(n)}$, beziehungsweise $\alpha^{(n)}$ angehört. $\{a^{(n)} X^{n-r}\} = 0$, beziehungsweise $\{\alpha^{(n)} X^{n-r}\} = 0$ sagen aus, daß X eine $(r+1)$-fache Gerade der Flächen ist.

Satz 4: $\{a^{(2)}.\,P\,Q\} = 0$ *oder* $\{\alpha^{(2)}.\,P\,Q\} = 0$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung für zwei reziproke Polaren* P, Q *von* $a^{(2)}$, *beziehungsweise* $\alpha^{(2)}$, *wenn* $a^{(2)}$ *und* $\alpha^{(2)}$ *den Rang 4 haben.*

Denn aus $\{a^{(2)}.\,P\,Q\,.\,x^2\} = \{a^{(2)}.\,[P\,x]\,[Q\,x]\} = 0$ für jeden Punkt x des Raums folgt, daß alle Ebenenpaare durch P und Q bezüglich $a^{(2)}$ konjugiert sein müssen. Analoges gilt für den dualen Fall.

Für einen festen Punkt x ist $\{a^{(2)}\,x^2\}$ eine Strahlgröße 2. Grades im Bündel (x); sie bestimmt also, wenn ξ eine Ebene dieses Bündels bezeichnet, durch die Gleichung $\{a^{(2)}\,x^2\,\xi^2\} = 0$ einen Kegel 2. Klasse in (x). Nun darf man in diesem Produkt die ineinanderliegenden Elemente x, ξ nach Satz 1 vertauschen. Daher ist $\{a^{(2)}\,x^2\,\xi^2\} = \{a^{(2)}\,\xi^2\}\,x^2$ und, wegen $x^2 \neq 0$, die Gleichung des Kegels $\{a^{(2)}\,\xi^2\} = 0$. Da mithin die Tangentialebenen ξ des Kegels $\{a^{(2)}\,x^2\}$ zugleich Tangentialebenen von $a^{(2)}$ sind, so folgt:

$\{a^{(2)}\,x^2\}$ *stellt den Tangentialkegel der Fläche* $a^{(2)}$ *aus dem Punkte* x *dar,*

und dual:

$\{\alpha^{(2)}\,\xi^2\}$ *stellt die Schnittkurve der Fläche* $\alpha^{(2)}$ *mit der Ebene* ξ *dar.*

Die Gleichung $\{a^{(2)}\,x^2\,X^2\} = 0$ sagt aus: X *ist Tangente des Kegels* $\{a^{(2)}\,x^2\}$. Denn wegen $\{a^{(2)}\,x^2\,X^2\} = \{a^{(2)}\,[x\,X]^2\} = 0$ ist $[x\,X]$ Tangentenebene des Kegels. Die duale Gleichung $\{\alpha^{(2)}\,\xi^2\,X^2\} = 0$ sagt aus: X *schneidet die Kurve* $\{\alpha^{(2)}\,\xi^2\}$.

Bezeichnet $A^{(2)}$ eine Strahlgröße 2. Grades, so ist $\{A^{(2)}\,\xi^2\}$ eine Punktgröße 2. Grades, der in der Ebene ξ eine Kurve 2. Klasse zugehört. Setzt man $X = [\xi\,\eta]$, so bestimmt die Gleichung $\{A^{(2)}\,X^2\} = \{A^{(2)}\,[\xi\,\eta]^2\} = \{A^{(2)}\,\xi^2.\,\eta^2\} = 0$ die in ξ befindlichen Strahlen X des Komplexes $A^{(2)}$, ferner jene Ebenen η, die die in ξ liegende Komplexkurve berühren. Daher: $\{A^{(2)}\,\xi^2\}$ *stellt die Komplexkurve in* ξ *und (dual)* $\{A^{(2)}\,x^2\}$ *den Komplexkegel in* x *dar*

Nach (36) besteht die Beziehung

$$\big\{\{a^{(2)}\,X^2\}\,\{b^{(2)}\,X^2\}\big\} = \{a^{(2)}\,b^{(2)}\,X^2\}\,X^2.$$

Das Produkt linker Hand, als Faltprodukt zweier Ebenenpaare desselben Büschels, wird dann und nur dann Null, wenn die Ebenenpaare einander harmonisch trennen. Wegen $X \neq 0$ ist also $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,X^2\} = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür. Diese Gleichung bestimmt also den Komplex aller Strahlen X, aus denen sich an $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ harmonische Tangentialebenenpaare legen lassen; er heißt[1] der *harmonische Komplex* der Flächen $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$. Wir können auch sagen:

[1] Vgl. Enz. math. Wissensch., III C 8 (C. Zindler), Nr. 38, wo auch die wichtigsten Eigenschaften dieses Komplexes und die auf ihn bezügliche Literatur angegeben sind.

Das Faltprodukt $\{a^{(2)} b^{(2)}\}$ *bestimmt den harmonischen Komplex von* $a^{(2)}$ *und* $b^{(2)}$

Aus $\{a^{(2)} b^{(2)} X^2\} = \{a^{(2)} X^2 . b^{(2)}\} = \{a^{(2)} . b^{(2)} X^2\}$ folgt im Hinblick auf Satz 3, daß die Erzeugenden von $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ dem harmonischen Komplex $\{a^{(2)} b^{(2)}\}$ angehören.

Für $a^{(2)} = b^{(2)}$ folgt hieraus, daß $\{a^{(2)} a^{(2)}\}$ den Tangentenkomplex von $a^{(2)}$ bestimmt; oder:

$A^{(2)} = \{a^{(2)} a^{(2)}\} = \{a^{(2)2}\}$ *stellt die Fläche* $a^{(2)}$ *als Strahlgröße,* $\{A^{(2)} x^2\}$ *daher den Berührungskegel aus* x *oder, wenn* x *der Fläche angehört, das Quadrat der Tangentialebene dar.*

Die duale Betrachtung ergibt:

$\{\alpha^{(2)} \beta^{(2)}\}$ *bestimmt den harmonischen Komplex von* $\alpha^{(2)}$ *und* $\beta^{(2)}$, *bestehend aus allen Strahlen, auf denen die beiden Flächen harmonische Punktepaare ausschneiden.* $\{\alpha^{(2)} \alpha^{(2)}\}$ *stellt die Fläche* $\alpha^{(2)}$ *als Strahlgröße dar.*

In einer gemeinsamen Tangentialebene an $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ wähle man eine durch deren Berührungspunkt etwa mit $a^{(2)}$ gehende Gerade X; dann stellt $\{a^{(2)} X^2\}$ das Quadrat der Tangentialebene dar. Es ist mithin $\{b^{(2)} . a^{(2)} X^2\} = \{b^{(2)} a^{(2)} X^2\} = \{a^{(2)} b^{(2)} X^2\} = 0$, d. h. X gehört dem Komplex $\{a^{(2)} b^{(2)}\}$ an. Daher: *Der Komplex* $\{a^{(2)} b^{(2)}\}$ *enthält die Tangenten, die man in den Punkten der Berührungskurven von* $a^{(2)}$ *und* $b^{(2)}$ *mit der gemeinsam umschriebenen Torse an diese legen kann. Diese* ∞^2 *Tangenten erfüllen zwei* $(4,4)$ *Kongruenzen, denen auch die Erzeugenden von* $a^{(2)}$ *und* $b^{(2)}$ *angehören.* Dieser Satz bildet das räumliche Seitenstück zu dem Satz in der Ebene (R. m. F., Nr. 4), daß die harmonische Kurve zweier Kurven 2. Klasse durch deren acht Berührungspunkte mit den vier gemeinsamen Tangenten geht.

Setzt man $b^{(2)} = r^2 + s^2 + t^2 + u^2$, so sind r, s, t, u die Ecken eines Poltetraeders von $b^{(2)}$, und man hat $\{a^{(2)} b^{(2)}\} = \{a^{(2)} r^2\} + \{a^{(2)} s^2\} + \{a^{(2)} t^2\} + \{a^{(2)} u^2\}$. Die Ausdrücke rechts stellen die aus den Ecken des Poltetraeders an $a^{(2)}$ gelegten Tangentenkegel dar. Ist der Strahl X eine der gemeinsamen Tangenten dieser vier Kegel, so verschwinden die Faltprodukte der Größen rechts mit X^2, also muß auch $\{a^{(2)} b^{(2)} X^2\} = 0$ sein. Man hat daher den Satz.

Legt man aus den Ecken eines Poltetraeders einer der beiden Flächen $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ *die Tangentenkegel an die andre Fläche, so gehört jede gemeinsame Tangente dieser Kegel dem harmonischen Komplex* $\{a^{(2)} b^{(2)}\}$ *an.*

Von den möglichen Sonderfällen (vgl. Enz. math. Wiss., a. a. O. sollen bloß zwei kurz erwähnt werden.

Es sei $\{b^{(2)4}\}=0$, $\{b^{(2)3}\}\neq 0$, d. h. $b^{(2)}$ bestimme eine Kurve Klasse. Setzt man $b^{(2)}=r^2+s^2+t^2$, so sind r, s, t die Ecken eines Poldreiecks von $b^{(2)}$, und man erhält $\{a^{(2)}b^{(2)}\}=\{a^{(2)}r^2\}+$ $+\{a^{(2)}s^2\}+\{a^{(2)}t^2\}$. Da jeder Strahl, der die drei rechtsstehenden Kegel berührt, auch dem Komplex $\{a^{(2)}b^{(2)}\}$ angehört, so folgt: *Der harmonische Komplex einer Fläche $a^{(2)}$ und einer Kurve $b^{(2)}$ besteht aus den ∞^3 Regelflächen, die sich ergeben, wenn man aus den Ecken eines Poldreiecks von $b^{(2)}$ die Tangentialkegel an $a^{(2)}$ legt und deren gemeinsame Tangenten aufsucht.*

Es sei ferner $\{b^{(2)3}\}=0$, $\{b^{(2)2}\}\neq 0$, d. h. $b^{(2)}$ ein Punktepaar pq, so folgt ganz ähnlich wie vorher: *Der harmonische Komplex einer Fläche $a^{(2)}$ und eines Punktepaars pq besteht aus den ∞^2 Strahlkongruenzen, die sich ergeben, wenn man aus je zweien zu pq harmonischen Punkten an $a^{(2)}$ die Tangentialkegel legt und deren gemeinsame Tangenten aufsucht.*

Diese Sätze sind die in R. m. F., p. 475, angekündigten Seitenstücke zu einem Satz über Kegelschnitte.

$a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ lassen sich aus zwei sie harmonisch trennenden Flächen $c^{(2)}$, $d^{(2)}$ ihrer Schar in der Form

$$a^{(2)}=\mathfrak{c}\,c^{(2)}+\mathfrak{d}\,d^{(2)}$$
$$b^{(2)}=\mathfrak{c}\,c^{(2)}-\mathfrak{d}\,d^{(2)}$$

ableiten, woraus $\{a^{(2)}b^{(2)}\}=\mathfrak{c}^2\{c^{(2)2}\}-\mathfrak{d}^2\{a^{(2)2}\}$ folgt. Diese Gleichung spricht den bekannten Satz[1] von C. Segre und G. Loria aus: *Der harmonische Komplex $\{a^{(2)}b^{(2)}\}$ enthält die ∞^1 Kongruenzen der gemeinsamen Tangenten von je zwei $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ harmonisch trennenden Flächen ihrer Schar.*

Umgekehrt ist jeder in dem Büschel $\mathfrak{c}^2\{c^{(2)2}\}-\mathfrak{d}^2\{d^{(2)2}\}$ enthaltene Strahlkomplex harmonischer Komplex von zwei Flächen 2. Klasse, die in der Schar $[c^{(2)}d^{(2)}]_6$ diese beiden Flächen harmonisch trennen. Daraus folgt schon, daß die sämtlichen Strahlgrößen $\{a^{(2)2}\}$ oder $\{\alpha^{(2)2}\}$ kein lineares Gebiet bilden, sondern erst in dem Gebiete 20. Stufe der zu $Q^{(2)}$ apolaren Komplexe (siehe Nr. 6) enthalten sind.

Setzen wir

$$\sqrt{\frac{2}{3\{c^{(2)4}\}}}\,\{c^{(2)3}\}=\varphi^{(2)} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2}{3\{d^{(2)4}\}}}\,\{d^{(2)3}\}=\psi^{(2)},$$

---

1 Enzykl., a. a. O., Anm. 1092. — Bestehen für gerades n zwischen $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, $d^{(n)}$ analoge Gleichungen wie oben, so wird auch

$$\{a^{(n)}b^{(n)}\}=\mathfrak{c}^2\{c^{(n)2}\}-\mathfrak{d}^2\{d^{(n)2}\}.$$

Der Komplex $\{a^{(n)}b^{(n)}X^{(n)}\}=0$ besteht aus allen Strahlen, für die die Tangentialebenengruppe an $a^{(n)}$ apolar ist zur Tangentialebenengruppe an $b^{(n)}$. Für diesen verallgemeinerten harmonischen Komplex gilt also ein dem obigen ähnlicher Satz, nur stellen nicht $\{c^{(n)2}\}$ und $\{d^{(n)2}\}$ Tangentenkomplexe von Flächen dar.

so ist nach Gleichung (31) $\{c^{(2)\,2}\} = \{\varphi^{(2)\,2}\}$ und $\{d^{(2)\,2}\} = \{\psi^{(2)\,2}\}$, mithin

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \mathfrak{c}^2\{\varphi^{(2)\,2}\} - \mathfrak{d}^2\{\psi^{(2)\,2}\} = \{(\mathfrak{c}\,\varphi^{(2)} + \mathfrak{d}\,\psi^{(2)})\,(\mathfrak{c}\,\varphi^{(2)} - \mathfrak{d}\,\psi^{(2)})\}$$

oder, wenn diese Faktoren mit $\gamma^{(2)}$, $\delta^{(2)}$ bezeichnet werden,

$$\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \{\gamma^{(2)}\,\delta^{(2)}\}.$$

Jedes Faltprodukt zweier Punktgrößen 2. Grades ist also stets auch Faltprodukt zweier Ebenengrößen 2. Grades. Der harmonische Komplex zweier Flächen 2. Klasse ist also, wie bekannt, auch harmonischer Komplex zweier Flächen 2. Ordnung.

Wie in R. m. F., Nr. 4, untersuchen wir auch hier, wann $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = 0$ wird. Diese Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn in Gleichung (22) alle Koeffizienten der E_i, also alle Ausdrücke $[a_i\,b_k] - [a_k\,b_i] = 0$ $(i, k = 1, .., 4)$ sind. Das Verschwinden dieses Ausdrucks sagt aus, daß $a_k\,b_k$ mit $a_i\,b_i$ auf einer Geraden liegt, das Verschwinden aller Ausdrücke, daß alle Punktepaare auf derselben Geraden liegen. Dann aber stellen $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ Punktepaare dieser Geraden dar (vgl. R. m. F., Nr. 1). Ihr Faltprodukt verschwindet dann und nur dann, wenn sie harmonisch liegen. Es gilt also auch für den Raum der[1]

Satz 5: Das Produkt $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\}$ verschwindet dann und nur dann, wenn $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ harmonische Punktepaare einer Geraden sind, worunter auch die Sonderfälle verstanden sein sollen, daß eines der Paare oder beide Doppelpunkte werden.

Für eine nichtsinguläre Größe $a^{(2)}$ kann es dann auch keine zwei inkongruenten Größen $b^{(2)}$ und $b_1^{(2)}$ geben, für die $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \mathfrak{b}\,\{a^{(2)}\,b_1^{(2)}\}$, d. h. $\{a^{(2)}\,(b^{(2)} - \mathfrak{b}\,b_1^{(2)})\} = 0$ wird. Denn sonst müßte es eine von Null verschiedene Punktgröße 2. Grades geben, die mit $a^{(2)}$ ein verschwindendes Faltprodukt liefert, entgegen dem eben bewiesenen Satz 5.

Hingegen kann $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \{a^{(2)\prime}\,b^{(2)\prime}\}$ sein. Nach obigem läßt sich nämlich auf ∞^1 Arten $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \mathfrak{a}_1^2\{f_1^2\} - \mathfrak{a}_2^2\{f_2^2\}$ und $\{a^{(2)\prime}\,b^{(2)\prime}\} = \mathfrak{a}_3^2\{f_3^2\} - \mathfrak{a}_4^2\{f_4^2\}$ setzen, wo die f_i quadratische Punktgrößen bedeuten. Aus $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\} = \{a^{(2)\prime}\,b^{(2)\prime}\}$ folgt also $\mathfrak{a}_1^2\{f_1^2\} -$

---

[1] Der gleichlautende Satz 4 in R. F., p. 475, hätte sich ebenfalls auf diese einfachere Art beweisen lassen.

Die zugehörigen Flächen müssen derselben Regelfläche eingeschrieben sein. Zwischen drei Größen $\{f_i^2\}$ kann eine Zahlbeziehung nur bestehen, wenn die zugehörigen Flächen derselben Torse eingeschrieben sind, d. h. für $f_3 = \mathfrak{m}_1 f_1 + \mathfrak{m}_2 f_2$. Hieraus folgt aber

$$\{f_3^2\} = \mathfrak{m}_1^2\{f_1^2\} + \mathfrak{m}_2^2\{f_2^2\} + 2\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\{f_1 f_2\}.$$

Die Zahlbeziehung zwischen den $\{f_i^2\}$ ist daher nur für $\{f_1 f_2\} = 0$ möglich, d. h. zufolge Satz 5, wenn f_1, f_2 harmonische Punktepaare darstellen. Dann sind die drei Größen $\{f_i^2\}$ Vielfache desselben Strahlquadrates.

$-\mathfrak{a}_2^2\{f_2^2\} = \mathfrak{a}_3^2\{f_3^2\} - \mathfrak{a}_4^2\{f_4^2\}$, und auch die Umkehrung ist richtig. Nun gibt es immer Größen f_1, f_2, f_3, f_4, zwischen deren Faltquadraten eine Zahlbeziehung besteht.[2] Mithin gibt es zu $\{a^{(2)} b^{(2)}\}$ gleiche Größen $\{a^{(2)\prime} b^{(2)\prime}\}$, und zwar ∞^1, wie nähere Untersuchungen zeigten (Enzykl., a. a. O.).

Dual zur Gleichung (37) besteht die Gleichung

$$\left\{\{a^{(2)} x^2\} \{b^{(2)} x^2\} \{c^{(2)} x^2\}\right\}_x = \{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} x^2\} x^4. \tag{74}$$

Ihre linke Seite verschwindet dann und nur dann, wenn die drei aus x an $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$ gelegten Tangentialkegel ein *apolares Tripel* bilden (dualer Fall zu R. m. F., Nr. 6), daß nämlich der harmonische Kegel zu zweien unter ihnen zum dritten apolar ist. Wegen $x^4 \neq 0$ verschwindet die linke Seite dann und nur dann, wenn $\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} x^2\} = 0$ ist. Man erhält demnach den

Satz 6: Die durch $\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)}\}$ bestimmte Fläche 2. Ordnung ist der Ort jener Punkte, aus denen an die drei Flächen $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$ Berührungskegel legbar sind, die ein apolares Tripel bilden.

Wir nennen diese Fläche die *harmonische Fläche 2. Ordnung von $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$.*

Für $c^{(2)} = b^{(2)}$ hat man den

Satz 6 a: Die durch $\{a^{(2)} b^{(2)\,2}\}$ bestimmte Fläche ist der Ort aller Punkte, für die der Berührungskegel an $\{b^{(2)\,2}\}$, als Fläche 2. Ordnung, zum Berührungskegel 2. Klasse an $a^{(2)}$ apolar ist.

Die Gleichung $\{a^{(2)} b^{(2)\,2} x^2\} = 0$ dieser Fläche ist erfüllt für die Punkte der Berührungskurve von $b^{(2)}$ mit der $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ umschriebenen Torse, da $\{b^{(2)\,2} x^2\}$ das Quadrat der Tangentialebenen in diesen Punkten darstellt. Die Fläche $\{a^{(2)} b^{(2)\,2}\}$ geht also durch diese Berührungskurve 4. Ordnung hindurch und schneidet $a^{(2)}$ nach einer Kurve 4. Ordnung, in deren Punkten die Erzeugenden von $a^{(2)}$ bezüglich des Berührungskegels an $b^{(2)}$ konjugiert sind.

Die durch $\{a^{(2)} a^{(2)} a^{(2)}\} = \{a^{(2)\,3}\}$ bestimmte Fläche 2. Ordnung hat die Gleichung $\{a^{(2)\,3} x^2\} = 0$. Da nach Gleichung (74) $\left\{\{a^{(2)} x^2\}^3\right\}_x = \{a^{(2)\,3} x^2\} x^4$ ist, so ist sie der Ort der Punkte x, deren Berührungskegel an $a^{(2)}$ in Geradenpaare ausarten, die dann der Fläche angehören. *Mithin stellt $\{a^{(2)\,3}\}$ die Fläche $a^{(2)}$ als Punktort, und $\{a^{(2)} x^2\}$ für einen Flächenpunkt x das Erzeugendenpaar durch x dar.*

Die aus einem Punkte x von $\{a^{(2)} b^{(2)\,2}\}$ den Flächen $\{b^{(2)\,2}\}$ und $a^{(2)}$ umschriebenen Kegel sind apolar. Daher gibt es ∞^1 Poldreiflache des ersten Kegels, die dem zweiten, also auch $a^{(2)}$ umschrieben sind. Bezeichnet ξ die Polarebene von x bezüglich $b^{(2)}$, ist also $x = \{b^{(2)} \xi\}$, so bildet jedes solche Poldreiflach des Kegels

$\{b^{(2)2}x^2\}$ mit ξ ein Poltetraeder von $b^{(2)}$ Für $\{a^{(2)}b^{(2)3}\}=0$ folgt, wegen $\{a^{(2)}b^{(2)2}\{b^{(2)}\xi\}^2\}=0$, aus der Gleichung (51) $\{a^{(2)}\xi^2\}=0$, d. h. daß ξ Tangentialebene von $a^{(2)}$ sein muß. Wählt man umgekehrt ξ als Tangentialebene von $a^{(2)}$, so gehört für $\{a^{(2)}b^{(2)3}\}=0$ $\{b^{(2)}\xi\}$ der Fläche $\{a^{(2)}b^{(2)2}\}$ an. Dies gibt den bekannten Satz:

Ist $\{b^{(2)3}\}$ zu $a^{(2)}$ apolar, so gehört jede Tangentialebene von $a^{(2)}$ zu ∞^1 Poltetraedern von $b^{(2)}$, die $a^{(2)}$ umschrieben sind. Die Ecken aller solchen Tetraeder erfüllen die Fläche $\{a^{(2)}b^{(2)2}\}$.

Nach der zu (39) dualen Gleichung hat man

$$\{a^{(2)3}\,.\,a^{(2)3}\,.\,b^{(2)}\}=2\{a^{(2)3}b^{(2)}\}\{a^{(2)3}\}-2\{(a^{(2)3}a^{(2)3})\,b^{(2)}\},$$

worin das letzte Glied die zu $b^{(2)}$ bezüglich $\{a^{(2)3}\}$ (oder $a^{(2)}$) polare Fläche 2. Ordnung darstellt. Da nach (31) $\{a^{(2)3}\,a^{(2)3}\}=$ $={}^3/_2\{a^{(2)4}\}\{a^{(2)2}\}$ ist, so läßt sich obige Gleichung schreiben

$$^3/_4\{a^{(2)4}\}\{a^{(2)2}b^{(2)}\}=\{a^{(2)3}b^{(2)}\}\{a^{(2)3}\}-\{(a^{(2)3}a^{(2)3})\,b^{(2)}\}. \quad (75)$$

Sie zeigt einmal, daß die Fläche $\{a^{(2)2}b^{(2)}\}$ mit $\{a^{(2)3}\}$ und $\{(a^{(2)3}a^{(2)3})\,b^{(2)}\}$ einem Büschel angehört, ferner aber, daß für $\{a^{(2)3}b^{(2)}\}=0$ die Flächen $\{a^{(2)2}b^{(2)}\}$ und $\{(a^{(2)3}a^{(2)3})\,b^{(2)}\}$ identisch sind, enthält also den

Satz 7: Ist $\{a^{(2)3}\}$ zu $b^{(2)}$ apolar, so ist die harmonische Fläche $\{a^{(2)2}b^{(2)}\}$ die polare Fläche von $b^{(2)}$ bezüglich $\{a^{(2)3}\}$.

Die Faltung von Gleichung (75) mit $b^{(2)}$ gibt

$$^3/_4\{a^{(2)4}\}\{a^{(2)2}b^{(2)2}\}=\{a^{(2)3}b^{(2)}\}^2-\{(a^{(2)3}a^{(2)3})\,b^{(2)}b^{(2)}\}. \quad (76)$$

Bezeichnet $A^{(2)}$ irgendeine Strahlgröße 2. Grades und $b^{(2)}$ eine Punktgröße 2. Grades, so ist $\{A^{(2)}b^{(2)}\}$ eine Ebenengröße 2. Grades, deren zugehörige Fläche 2. Ordnung die Gleichung $\{A^{(2)}b^{(2)}x^2\}=0$ hat. Sie ist, wegen $\{A^{(2)}x^2\,.\,b^{(2)}x^2\}_x=\{A^{(2)}b^{(2)}x^2\}\,x^2$, gleichbedeutend mit $\{A^{(2)}x^2\,.\,b^{(2)}x^2\}_x=0$ und gibt, zusammen mit dem dualen Fall, den

Satz 8: $\{A^{(2)}c^{(2)}\}$ bestimmt jene Fläche 2. Ordnung, in deren Punkten der Komplexkegel 2. Ordnung von $A^{(2)}$ zum Berührungskegel 2. Klasse an $c^{(2)}$ apolar ist. $\{A^{(2)}\gamma^{(2)}\}$ bestimmt jene Fläche 2. Klasse, in deren Ebenen die Komplexkurve 2. Klasse von $A^{(2)}$ zur Schnittkurve 2. Ordnung mit $\gamma^{(2)}$ apolar ist.

Wir wollen $\{A^{(2)}c^{(2)}\}$ und $\{A^{(2)}\gamma^{(2)}\}$ die harmonischen Flächen von $A^{(2)}$ und $c^{(2)}$, beziehungsweise $A^{(2)}$ und $\gamma^{(2)}$ nennen.

Angenommen, die Faltung von $A^{(2)}$ mit Punkt- oder Ebenengrößen gäbe nie Null.[1] Dann bestimmt $A^{(2)}$ vermöge der Gleichung

---

[1] $\{A^{(2)}b^{(2)}\}=0$ würde aussagen, daß alle Komplexkegel des Raums zu $b^{(2)}$ apolar sind, und $\{A^{(2)}\beta^{(2)}\}=0$, daß alle Komplexkurven zu $\beta^{(2)}$ apolar sind.

$$\beta^{(2)} = \{A^{(2)}\, b^{(2)}\} \tag{77}$$

eine lineare Transformation zwischen den Punkt- und Ebenengrößen 2. Grades des Raums. Die Gleichung

$$\{A^{(2)}\, b^{(2)\,2}\} = 0 \tag{77'}$$

definiert ferner eine quadratische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_8^2$ von ∞^8 Flächen 2. Klasse, die als Strahlgrößen zu $A^{(2)}$ apolar sind (Nr. 5). Die zu $b^{(2)}$ bezüglich dieser $\mathfrak{M}_8^2$ konjugierten Punktgrößen 2. Grades bilden ein lineares Gebiet 9. Stufe, zu dem $\beta^{(2)} = \{A^{(2)}\, b^{(2)}\}$ apolar ist.[1]

Für $A^{(2)} = \{a^{(2)}\, b^{(2)}\}$ folgt aus Satz 8, daß in jedem Punkt der harmonischen Fläche $\{a^{(2)}\, b^{(2)}\, c^{(2)}\}$ der Komplexkegel des harmonischen Komplexes zweier der drei Flächen zum Berührungskegel an die dritte Fläche apolar ist. Gehören $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$ einer linearen Schar an, so geht $\{a^{(2)}\, b^{(2)}\, c^{(2)}\}$ durch die Schnittkurve von $\{a^{(2)\,2}\, b^{(2)}\}$ und $\{a^{(2)}\, b^{(2)\,2}\}$. Denn wegen $c^{(2)} = \mathfrak{a}\, a^{(2)} + \mathfrak{b}\, b^{(2)}$ ist

$$\{a^{(2)}\, b^{(2)}\, c^{(2)}\} = \mathfrak{a}\,\{a^{(2)\,2}\, b^{(2)}\} + \mathfrak{b}\,\{a^{(2)}\, b^{(2)\,2}\}.$$

Wegen der Symmetrie geht diese Fläche dann auch durch die Schnittkurven der Paare $\{b^{(2)\,2}\, c^{(2)}\}$, $\{b^{(2)} c^{(2)\,2}\}$ und $\{c^{(2)\,2}\, a^{(2)}\}$, $\{c^{(2)}\, a^{(2)\,2}\}$.

Wir betrachten noch den interessanten Fall, daß $A^{(2)}$ das Quadrat einer linearen Komplexgröße S sei. $\{S^2 x^2\} = [S x]^2$ stellt dann[2] das Quadrat der Nullebene von x bezüglich des Gewindes S dar, und $\{S^2 b^{(2)} x^2\} = \{S^2 x^2 b^{(2)}\} = \{[S x]^2 b^{(2)}\} = 0$ sagt aus, daß die Ebene $[S x]$ die Fläche $b^{(2)}$ berührt. $\{S^2 b^{(2)}\}$ bestimmt daher den Ort der Punkte, deren Nullebenen bezüglich S die Fläche $b^{(2)}$ berühren, oder was dasselbe ist, den Ort der Nullpunkte der Tangentialebenen von $b^{(2)}$. Man hat also den

Satz 9: $\{S^2\, b^{(2)}\}$ und $\{S^2\, \beta^{(2)}\}$ stellen die polaren Flächen von $b^{(2)}$ beziehungsweise $\beta^{(2)}$ bezüglich des Gewindes S dar.[3]

Die zu $\{b^{(2)}\, S^2\}$ bezüglich des Gewindes S polare Fläche ist dann $\{b^{(2)}\, S^2\, S^2\}$. Sie muß wegen des involutorischen Charakters der Polarität bezüglich eines Gewindes wieder $b^{(2)}$ sein. $\{b^{(2)}\, S^2\, S^2\}$ muß sich also als Produkt von $b^{(2)}$ mit einer Zahl darstellen lassen. Zur Auffindung dieser Darstellung diene folgende Überlegung.

Denkt man sich zwei Stäbe P, Q als äußere Produkte von je zwei Punkten, so sieht man leicht, daß für jeden Punkt b_i des Raums

---

[1] Vgl. Th. Reye, Neue Eigenschaften des Strahlkomplexes 2. Grades, Math. Ann. *49* (1897), p. 590 bis 595. Viele der von ihm gefundenen Eigenschaften fließen aus den obigen und deren dualen Gleichungen fast unmittelbar.

[2] E. Müller, a. a. O., Nr. 1.

[3] Man beweist ebenso die allgemeine Gleichung $\{b^{(n)}\, S^n\, x^n\} = \{b^{(n)}\, [S\, x]^n\}$ und deren duale. Aus ihnen folgt, daß $\{b^{(n)}\, S^n\}$ und $\{\beta^{(n)}\, S^n\}$ die zu $b^{(n)}$ und $\beta^{(n)}$ bezüglich S polaren Flächen darstellen.

$$[P\,Q]\,b_i = [P\,b_i\,Q]+[Q\,b_i\,P] = [b_i\,P\,Q]+[b_i\,Q\,P]$$

ist. Nun läßt sich jede lineare Komplexgröße S als Summe zweier Stäbe darstellen, also in der Form

$$S = P+Q$$

schreiben. Dann ist

$$[b_i\,S\,S] = [([b_i\,P]+[b_i\,Q])\,(P+Q)] = [b_i\,P\,Q]+[b_i\,Q\,P] =$$
$$= [P\,Q]\,b_i = {}^1/_2\,[S\,S]\,b_i$$

oder[1]

$$[b_i\,S\,S] = {}^1/_2\,[S\,S]\,b_i.$$

Ferner hat man mit Rücksicht auf diese Gleichung

$$\{b_i^2\,S^2\,S^2\} = [b_i\,S\,S]^2 = {}^1/_4\,[S\,S]^2\,b_i^2.$$

Aus dieser Beziehung folgt, wenn man $b^{(2)} = \Sigma\, b_i^2$ setzt,

$$\{b^{(2)}\,S^2\,S^2\} = \Sigma\,\{b_i^2\,S^2\,S^2\} = {}^1/_4\,[S\,S]^2\,\Sigma\,b_i^2 = {}^1/_4\,[S\,S]^2\,b^{(2)}$$

oder die gesuchte Gleichung[2]

$$\{b^{(2)}\,S^2\,S^2\} = {}^1/_4\,[S\,S]^2\,b^{(2)}. \tag{78}$$

Aus dem Satze 9 folgt:

$\{a^{(2)}\,S^2\,b^{(2)}\} = 0$ sagt aus, daß die zu $a^{(2)}$ bezüglich S polare Fläche 2. Ordnung zu $b^{(2)}$ apolar ist.

Setzt man $a^{(2)} = \Sigma\,a_i^2$, $b^{(2)} = \Sigma\,b_i^2$, so ist, wegen $\{a_i^2\,S^2\,b_k^2\} = [a_i\,S\,b_k]^2 = [a_i\,b_k\,S]^2 = \{a_i^2\,b_k^2\,S^2\}$,

$$\{a^{(2)}\,S^2\,b^{(2)}\} = \{a^{(2)}\,b^{(2)}\,S^2\}. \tag{79}$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung verschwinden daher immer nur gleichzeitig. Dies besagt: *Ist die Polarfläche von $a^{(2)}$ bezüglich S zu $b^{(2)}$ apolar, so ist auch der harmonische Komplex von $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ zu S^2 apolar. Die ∞^4 Gewinde, bezüglich derer diese Beziehung zwischen $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ besteht, sind durch die Gleichung $\{a^{(2)}\,b^{(2)}\,S^2\} = 0$ bestimmt.*

Die beiden Erzeugendenscharen von $a^{(2)}$ haben mit einem Gewinde S_1 je zwei Erzeugende gemeinsam. Die polare Fläche von $a^{(2)}$ bezüglich S_1 geht durch diese vier Geraden. Durch sie

---

1 Wegen Verallgemeinerungen dieser Gleichung für beliebige Komplexgrößen in mehrdimensionalen Gebieten vgl. E. Müller, Beiträge zur Grassmann'schen Ausdehnungslehre, I. Mitt., diese Berichte, *118* (1909), p. 1053 bis 1076.

2 Allgemeiner ist $\{b^{(n)}\,S^n\,S^n\} = \dfrac{1}{2^n}\,[S\,S]^n\,b^{(n)}$.

geht eine einzige Fläche 2. Ordnung, die zu $b^{(2)}$ apolar ist. Da durch diese vier Geraden ein Büschel von Gewinden geht, so gibt es auch ein Gewinde, bezüglich dessen die zu $a^{(2)}$ polare Fläche die zu $b^{(2)}$ apolare ist. Insbesondre bestimmt die Gleichung $\{a^{(2)} a^{(2)} S^2\} = 0$ jene ∞^4 Gewinde, bezüglich derer die polare Fläche von $a^{(2)}$ zu dieser apolar ist. Jedes Paar von Erzeugenden der einen Schar bestimmt mit jedem Paar von Erzeugenden der andern Schar eine durch sie gehende, zu $a^{(2)}$ apolare Fläche.

Von vier Punkt- oder vier Ebenengrößen 2. Grades sagen wir, sie bilden ein *apolares Quadrupel*, wenn ihr Faltprodukt verschwindet, also etwa $\{a^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} d^{(2)}\} = 0$ ist. Die harmonische Fläche von je dreien dieser Flächen ist dann zur vierten apolar, ferner der harmonische Komplex von zweien dieser Flächen zum harmonischen Komplex der beiden andern apolar.

Aus Gleichung (64) folgert man sofort den

Satz 10: Ein apolares Quadrupel von Flächen 2. Klasse ist durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet. Sucht man von einer beliebigen Ebene ξ des Raums die Pole bezüglich der vier Flächen und von jedem dieser Punkte die Polarebene bezüglich der harmonischen Fläche der drei übrigen Flächen, so erhält man stets vier Ebenen, die durch denselben Punkt gehen.

Es sind auf diese Weise vier räumliche Kollineationen bestimmt, zwischen denen lineare Abhängigkeit besteht.

Aus Gleichung (68) folgt insbesondre:

Sind $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ als Strahlgrößen apolar, so ergibt die Folge der zu $a^{(2)}$ und $\{a^{(2)} b^{(2)\,2}\}$ gehörigen Polaritäten dieselbe Kollineation wie die Folge der zu $b^{(2)}$ und $\{a^{(2)\,2} b^{(2)}\}$ gehörigen Polaritäten.

Ähnliche Sätze folgert man aus den Gleichungen (65), (66), (69), (70), (72).

5. Einige Faltprodukte von quadratischen Komplexgrößen.

Wir beweisen zuerst die folgende Hilfsgleichung über Strahlgrößen n-ten Grades im Raum

$$\left\{\{A^{(n)} X\}\,\{B^{(n)} Y\}\right\} + \left\{\{A^{(n)} Y\}\,\{B^{(n)} X\}\right\} = 2\left\{\{A^{(n)} B^{(n)}\}_{n-1}\, X\, Y\right\}. \quad (80)$$

Hierin bedeuten X, Y Stäbe oder Stabsummen, und die Marke $n-1$ deutet an, daß $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$ nur $(n-1)$-faltig multipliziert werden sollen. Für $A^{(n)} = \Sigma A_i^n$ und $B^{(n)} = \Sigma B_k^n$, unter A_i und B_k Stabsummen verstanden, ist nämlich

$$\{A^{(n)} X\} = \Sigma\,[A_i X]\, A_i^{n-1}, \quad \{A^{(n)} Y\} = \Sigma\,[A_i Y]\, A_i^{n-1},$$
$$\{B^{(n)} X\} = \Sigma\,[B_k X]\, B_k^{n-1}, \quad \{B^{(n)} Y\} = \Sigma\,[B_k Y]\, B_k^{n-1}.$$

Damit wird die linke Seite von (80), wenn zur Vermeidung eines Mißverständnisses $\overline{A_i A_k}$ und $\overline{XY}$ algebraische Produkte andeuten,

$$\sum_{i,k}([A_i X]\,[B_k Y]+[A_i Y]\,[B_k X])\,\{A_i^{n-1} B_k^{n-1}\} =$$

$$= 2\sum_{i,k}\{\overline{A_i B_k}.\overline{XY}\}\,\{A_i^{n-1} B_k^{n-1}\} = 2\Big\{\{A^{(n)} B^{(n)}\}_{n-1}\, XY\Big\},$$

also wirklich gleich der rechten Seite von (80).

$\{A^{(n)} B^{(n)}\}_{n-1}$ stellt eine *Strahlgröße 2. Grades dar.*

Setzt man für X und Y die Stabsumme S, so geht Gleichung (80) über in

$$\Big\{\{A^{(n)} S\}\,\{B^{(n)} S\}\Big\} = \Big\{\{A^{(n)} B^{(n)}\}_{n-1}\, S^2\Big\}. \tag{81}$$

Für eine quadratische Komplexgröße $S^{(2)} = \Sigma\, S_i^2$ folgt aus dieser Gleichung

$$\Big\{\{A^{(n)} B^{(n)}\}_{n-1}\, S^{(2)}\Big\} = \sum_i \Big\{\{A^{(n)} S_i\}\,\{B^{(n)} S_i\}\Big\} \tag{82}$$

Für $n = 2$ lauten die Gleichungen (80) und (81)

$$[\{A^{(2)} X\}\,\{B^{(2)} Y\}]+[\{A^{(2)} Y\}\,\{B^{(2)} X\}] = 2\Big\{\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1\, XY\Big\}, \tag{83}$$

$$[\{A^{(2)} S\}\,\{B^{(2)} S\}] = \Big\{\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1\, S^2\Big\}, \tag{84}$$

worin rechts $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind. Da $\{A^{(2)} S\}$ und $\{B^{(2)} S\}$ die Polargewinde von S bezüglich der Komplexe $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ darstellen, so folgt aus Gleichung (84) der

Satz 11: Die der quadratischen Strahlgröße $\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1$ zugehörige Gleichung $\Big\{\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1\, S^2\Big\} = 0$ bestimmt die Mannigfaltigkeit jener Strahlgewinde S, deren Polargewinde bezüglich $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ apolar sind. Die Achsen der Strahlgebüsche in dieser Gewindemannigfaltigkeit erfüllen den zu $\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1$ gehörigen quadratischen Strahlkomplex.

Wenn für jeden gemeinsamen Strahl X der Komplexe $\{A^{(2)} X^2\} = 0$ und $\{B^{(2)} X^2\} = 0$ auch $\Big\{\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1\, X^2\Big\} = 0$ ist, so heißen bekanntlich[1] die beiden Komplexe *involutorisch.*

Für $B^{(2)} = A^{(2)}$ wird nach Satz 11 die Gleichung

$$\Big\{\{A^{(2)} A^{(2)}\}_1\, S^2\Big\} = 0$$

von jenen Gewinden S erfüllt, für die $\{A^{(2)} S\}$ ein Stab ist. Der

[1] Enz. math. Wissensch., III C 8 (K. Zindler), Nr. 24, *b*).

Strahlkomplex $\left\{\{A^{(2)}A^{(2)}\}_1 X^2\right\} = 0$ *besteht daher aus jenen Strahlen* X, *für die* $\{A^{(2)}X\}$ *wieder ein Strahl ist.* Die den Komplexen $A^{(2)}$ und $\{A^{(2)}A^{(2)}\}_1$ gemeinsamen Strahlen bilden daher die *Singularitätenkongruenz von* $A^{(2)}$.

Wir wollen noch $\{A^{(2)}B^{(2)}\}_1$ für den Fall rechnen, als $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ in der Normalform (Nr. 1)

$$A^{(2)} = \Sigma A_i E_i,\ B^{(2)} = \Sigma B_i E_i \qquad (i = 1, 2, .., 6)$$

gegeben sind. Für zwei Stäbe $P, \underset{\sim}{Q}$ ist

$$2\{A^{(2)}.\, P\underset{\sim}{Q}\}_1 = \{A^{(2)}P\}\underset{\sim}{Q} + \{A^{(2)}\underset{\sim}{Q}\}P$$

oder, da nach Gleichung (17)

$$\{A^{(2)}P\} = \Sigma [E_i P] A_i,\ \{A^{(2)}\underset{\sim}{Q}\} = \Sigma [E_i \underset{\sim}{Q}] A_i$$

gesetzt werden darf,

$$\{A^{(2)}.\, P\underset{\sim}{Q}\}_1 = {}^1/_2\, \Sigma ([E_i P]\underset{\sim}{Q} + [E_i \underset{\sim}{Q}]P) A_i = \Sigma \{E_i.\, P\underset{\sim}{Q}\} A_i.$$

Die einfache Faltung von $A^{(2)}$ mit einem Stabprodukt $P\underset{\sim}{Q}$ geschieht also, indem man in $A^{(2)}$ alle Faktoren E_i (oder alle Faktoren A_i) mit $P\underset{\sim}{Q}$ einfach faltet. Die einfache Faltung von $A^{(2)}$ mit irgendeiner Strahlgröße 2. Grades kann folglich ausgeführt werden, indem man alle Faktoren E_i mit dieser Strahlgröße faltet. Mithin ist

$$\{A^{(2)}B^{(2)}\}_1 = \Sigma \{E_i B^{(2)}\} A_i = \Sigma \{B^{(2)}E_i\} A_i$$

oder, wegen $\{B^{(2)}E_i\} = B_{i+3}$,

$$\{A^{(2)}B^{(2)}\}_1 = \Sigma A_i B_{i+3}. \quad (i = 1, 2, .., 6) \tag{85}$$

Insbesondre hat man

$$\{A^{(2)}A^{(2)}\}_1 = \Sigma A_i A_{i+3} = 2(A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6), \tag{86}$$

woraus auch leicht der Ausdruck für

$$\left\{\{A^{(2)}A^{(2)}\}_1 \{A^{(2)}A^{(2)}\}_1\right\}$$

folgt.

Für $A^{(2)} = {}^1/_2\{a^{(2)}a^{(2)}\}$ ist unter Berücksichtigung der Gleichung (23), wenn man $a^{(2)} = \Sigma a_i e_i$ setzt,

$${}^1/_2\{A^{(2)}A^{(2)}\}_1 = [a_2 a_3][a_1 a_4] + [a_3 a_1][a_2 a_4] + [a_1 a_2][a_3 a_4] \tag{87}$$

und

$${}^1/_4\left\{\{A^{(2)}A^{(2)}\}_1 \{A^{(2)}A^{(2)}\}_1\right\} = {}^3/_2 [a_1 a_2 a_3 a_4]^2$$

oder, da nach Gleichung (30) $[a_1\, a_2\, a_3\, a_4] = {}^1/_{24} \{a^{(2)\,4}\} = {}^1/_6 \{A^{(2)} A^{(2)}\}$,

$$\{\{A^{(2)} A^{(2)}\}_1 \{A^{(2)} A^{(2)}\}_1\} = \{A^{(2)} A^{(2)}\}. \tag{88}$$

$\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\}$ stellt den Tangentenkomplex der Fläche $\alpha^{(2)}$ dar und [nach Gleichung (61)]

$$\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\,Y\} = X$$

die Polare von Y bezüglich $\alpha^{(2)}$. Durch äußere Multiplikation dieser Gleichung mit der Stabsumme S folgt

$$\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\,Y S\} = [S X]$$

oder

$$\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)} S\,.\,Y\} = [S X].$$

Die Strahlen Y, die die linke Seite zu Null machen, d. h. die Strahlen des Gewindes $\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\,S\}$, haben bezüglich $\alpha^{(2)}$ Polaren X, die dem Gewinde S angehören und umgekehrt. Dies sagt aus:

$\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\,S\}$ *stellt das zu S bezüglich $\alpha^{(2)}$ polare Gewinde dar.*

Wegen $[\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)} S\} S] = \{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\,S^2\}$ wird dieser Ausdruck dann und nur dann Null, wenn das zu S bezüglich $\alpha^{(2)}$ polare Gewinde zu S apolar ist. Wegen $\{\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)}\,S^2\} = \{\alpha^{(2)}.\,\alpha^{(2)}\,S^2\}$ und weil $\{\alpha^{(2)}\,S^2\}$ nach Satz 9 die zu $\alpha^{(2)}$ bezüglich S polare Fläche darstellt, *so sagt $\{\alpha^{(2)\,2}\,S^2\} = 0$ aus, daß S zu seinem bezüglich $\alpha^{(2)}$ polaren Gewinde apolar ist, oder daß $\alpha^{(2)}$ zu ihrer bezüglich S polaren Fläche apolar ist.*

Weil $\{\alpha^{(2)\,2} X\}$ die Polare von X bezüglich $\alpha^{(2)}$ darstellt, wird die Gleichung

$$\{\{\alpha^{(2)\,2} X\}\,\{\beta^{(2)\,2} X\}\} = 0$$

von allen Strahlen erfüllt, deren Polaren bezüglich $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ sich schneiden. X ist dann Schnittlinie der Polarebenen des Schnittpunktes jener Strahlen, zugleich Verbindungslinie der Pole der Verbindungsebene jener Strahlen bezüglich $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$. Nach Gleichung (84) läßt sich die letzte Gleichung auch schreiben

$$\left\{\left\{\{\alpha^{(2)\,2}\}\,\{\beta^{(2)\,2}\}\right\}_1 X^2\right\} = 0.$$

Daraus folgt der

Satz 12: Die Größe $\left\{\{\alpha^{(2)\,2}\}\,\{\beta^{(2)\,2}\}\right\}_1$ stellt den quadratischen Komplex aller Strahlen dar, die Schnittlinien der Polarebenen eines Punktes bezüglich $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ oder Verbindungslinien der Pole einer Ebene bezüglich $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ sind.[1]

---

[1] Er findet sich bereits in der grundlegenden Arbeit von A. Voss, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen 2. Grades, Math. Ann. *10* (1876), p. 167. Der Komplex ist als Erzeugnis kollinearer Räume tetraedral.

Diesem Komplex gehören daher auch alle Strahlen an, die in den Seitenflächen des gemeinsamen Poltetraeders von $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ liegen oder die durch dessen Ecken gehen.

Nach der zu (72') dualen Gleichung ist

$$[\{\alpha^{(2)\,2} X\}\{\beta^{(2)\,2} X\}] = -2\,[\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)} X\}\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)} X\}]$$

und daher zufolge Gleichung (84)

$$\left\{\left\{\{\alpha^{(2)\,2}\}\{\beta^{(2)\,2}\}\right\}_1 X^2\right\} = -2\left\{\left\{\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\}\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\}\right\}_1 X^2\right\}. \qquad (89)$$

Hieraus folgt der

Satz 13: Jeder Strahl, der Schnittlinie der Polarebenen eines Punktes bezüglich der Flächen $\alpha^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ ist, hat als Polarkomplex bezüglich des harmonischen Komplexes $\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\}$ einen speziellen Komplex.

Wir nannten zwei Komplexgrößen 2. Grades $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ *apolar*, wenn $\{A^{(2)} B^{(2)}\} = 0$ ist. Auch die Tangentenkomplexe zweier Flächen zweiten Grades $\{\alpha^{(2)\,2}\}$ und $\{\beta^{(2)\,2}\}$ werden wir apolar nennen, wenn

$$\{\alpha^{(2)\,2}.\,\beta^{(2)\,2}\} = 0$$

ist. Wir werden dann auch sagen, *die beiden Flächen 2. Grades sind als Strahlgrößen apolar.* Wegen

$$\{\alpha^{(2)\,2}.\,\beta^{(2)\,2}\} = \{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}.\,\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\}$$

folgt:

Sind zwei Flächen 2. Grades $\alpha^{(2)}$, $\beta^{(2)}$ als Strahlgrößen apolar, so ist ihr harmonischer Komplex $\{\alpha^{(2)}\beta^{(2)}\}$ zu sich selbst apolar; ferner ist die harmonische Fläche $\{\alpha^{(2)\,2}\beta^{(2)}\}$ zu $\beta^{(2)}$ und die harmonische Fläche $\{\beta^{(2)\,2}\alpha^{(2)}\}$ zu $\alpha^{(2)}$ apolar.

Schreiben wir die beiden Flächen als Strahlgrößen in den Formen $\{a^{(2)\,2}\}$ und $\{\beta^{(2)\,2}\}$, so folgt aus Gleichung (42) als notwendigen und hinreichende Bedingung für ihre Apolarität

$$\{a^{(2)}\beta^{(2)}\}^2 - \{(a^{(2)}a^{(2)})\,\beta^{(2)\,2}\} = 0. \qquad (90)$$

Sind $a^{(2)}$ und $\beta^{(2)}$ im gewöhnlichen Sinn apolar, ist also $\{a^{(2)}\beta^{(2)}\} = 0$, so sind sie dann und nur dann auch als Strahlgrößen apolar, wenn $\{(a^{(2)}a^{(2)})\,\beta^{(2)\,2}\} = 0$, mithin wegen Gleichung (44) auch $\{(\beta^{(2)}\beta^{(2)})\,a^{(2)\,2}\} = 0$ ist, d. h. *wenn jede der beiden Flächen zu ihrer polaren Fläche bezüglich der andern apolar ist.*

Bezeichnet $A^{(2)}$ eine beliebige Komplexgröße 2. Grades, $b^{(2)} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$ eine Punktgröße 2. Grades, deren zugehörige

Fläche $b_1 b_2 b_3 b_4$ als Poltetraeder hat, so folgt

$$\{b^{(2)\,2}\} = \Sigma\,[b_i b_k]^2 \text{ und } \{A^{(2)} b^{(2)\,2}\} = \Sigma\,\{A^{(2)}\,[b_i b_k]^2\}.$$

Sind die Kanten $[b_i b_k]$ dieses Poltetraeders Strahlen des Komplexes $A^{(2)}$, ist also nach Th. Reye's Ausdrucksweise (Math. Ann. *49* [1897], p. 592) $b_1 b_2 b_3 b_4$ ein *Komplextetraeder* (von $A^{(2)}$), so verschwinden in der letzten Gleichung die Summanden rechts, und es wird $\{A^{(2)} b^{(2)\,2}\} = 0$, d. h. $A^{(2)}$ und $b^{(2)}$ sind apolar. Umgekehrt folgert man aus $\{A^{(2)} b^{(2)\,2}\} = 0$ mit Reye (a. a. O.), daß es ∞^1 Poltetraeder von $b^{(2)}$ gibt, die Komplextetraeder von $A^{(2)}$ sind. Mithin gilt der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Apolarität von $A^{(2)}$ und $\{b^{(2)\,2}\}$ besteht darin, daß es Komplextetraeder von $A^{(2)}$ gibt, die Poltetraeder von $b^{(2)}$ sind.

Die Gesamtheit der zu $A^{(2)}$ apolaren Flächen $\{b^{(2)\,2}\}$ bilden die durch die Gleichung (77′) bestimmte quadratische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_8^2$ von Flächen 2. Klasse, die Reye a. a. O. samt dem dualen Fall untersucht. Für $\{A^{(2)} c^{(2)} d^{(2)}\} = 0$ sind $c^{(2)}$ und $d^{(2)}$ bezüglich dieser Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_8^2$ konjugiert. Der harmonische Komplex $\{c^{(2)} d^{(2)}\}$ solcher zwei Flächen ist zu $A^{(2)}$ apolar. Es gibt Gruppen von zehn Flächen 2. Klasse, die paarweise bezüglich der $\mathfrak{M}_8^2$ konjugiert sind.

Wählt man $A^{(2)} = \{a^{(2)\,2}\}$, so sind Komplextetraeder von $A^{(2)}$ solche Tetraeder, deren Kanten $a^{(2)}$ berühren. Damit geht obiger Satz über in folgenden:[1]

Zwei Flächen 2. Grades sind als Strahlgrößen dann und nur dann apolar, wenn es ein Poltetraeder einer der Flächen gibt, dessen Kanten die andre Fläche berühren.

Natürlich ist diese Beziehung wechselseitig, und wenn es ein Tetraeder dieser Art gibt, so gibt es deren ∞^1.

Es soll jetzt noch der in Nr. 2 für Flächen eingeführte Begriff der gemischten Polare auf Strahlgrößen ausgedehnt werden. Bezeichnen wieder $A^{(2)} = \Sigma\,A_i^2$, $B^{(2)} = \Sigma\,B_i^2$, $C^{(2)} = \Sigma\,C_i^2$ beliebige quadratische Komplexgrößen, so soll der Ausdruck $\{(A^{(2)} B^{(2)})\,C_i^2\}$ die Bedeutung $\{A^{(2)} C_i\}\{B^{(2)} C_i\}$ haben. Hieraus folgt, daß für $(A^{(2)} B^{(2)})$ das distributive Gesetz gilt, diese Verknüpfung also als Multiplikation aufzufassen ist. Ferner soll in $\{(A^{(2)} B^{(2)})\,C^{(2)}\}$ auch die Verknüpfung mit $C^{(2)}$ multiplikativ sein, d. h. es soll die Gleichung

$$\{(A^{(2)} B^{(2)})\,C^{(2)}\} = \sum_i \{A^{(2)} C_i\}\{B^{(2)} C_i\} \tag{91}$$

---

[1] Auf diese Bedeutung von $\{A^{(2)} B^{(2)}\} = 0$ für $A^{(2)} = \{a^{(2)\,2}\}$, $B^{(2)} = \{b^{(2)\,2}\}$ wies bereits A. Voss, a. a. O., p. 170, hin.

bestehen. Die Größe $P^{(2)} = \{(A^{(2)} B^{(2)})\, C^{(2)}\}$ ist wieder eine quadratische Komplexgröße. Bedeutet X eine veränderliche Stabsumme, so hat man

$$\{P^{(2)} X^2\} = \Sigma \{A^{(2)} C_i X\} \{B^{(2)} C_i X\} = \Sigma \left\{\overline{\{A^{(2)} X\} \{B^{(2)} X\}} \,.\, C_i^2\right\} =$$

$$= \left\{\overline{\{A^{(2)} X\} \{B^{(2)} X\}} \,.\, \Sigma\, C_i^2\right\} = \left\{\overline{\{A^{(2)} X\} \{B^{(2)} X\}} \,.\, C^{(2)}\right\}.$$

oder

$$\{P^{(2)} X^2\} = \left\{\overline{\{A^{(2)} X\} \{B^{(2)} X\}} \,.\, C^{(2)}\right\}. \tag{92}$$

Hierin deutet wieder das Überstreichen an, daß die betreffenden Größen algebraisch zu multiplizieren sind. Die Gleichung $\{P^{(2)} X^2\} = 0$ bestimmt daher jene Gewinde X, deren bezüglich $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ polare Gewinde hinsichtlich $C^{(2)}$ konjugiert sind. Wir nennen die durch $P^{(2)} = \{(A^{(2)} B^{(2)})\, C^{(2)}\}$ bestimmte Komplexgröße 2. Grades *die gemischte polare Komplexgröße von* $C^{(2)}$ *bezüglich* $A^{(2)}$ *und* $B^{(2)}$ und den zugehörigen Strahlkomplex den gemischten Polarkomplex von $C^{(2)}$ bezüglich der Komplexe $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$. Diese Benennung rechtfertigt sich dadurch, daß für $B^{(2)} = A^{(2)}$ zur Komplexgröße $\{(A^{(2)} A^{(2)})\, C^{(2)}\}$ jene Gewinde X gehören, die bezüglich $A^{(2)}$ polar sind zu den zu $C^{(2)}$ gehörigen Gewinden. Denn nach Gleichung (92) hat man $\{(A^{(2)} A^{(2)})\, C^{(2)} \,.\, X^2\} = \left\{C^{(2)} \{A^{(2)} X\}^2\right\} = 0$. Mithin gilt der

Satz 14: $\{(A^{(2)} A^{(2)})\, C^{(2)}\}$ *stellt die zu* $C^{(2)}$ *bezüglich* $A^{(2)}$ *polare Komplexgröße dar.*

Es sei ferner noch erwähnt, daß

$$\{(A^{(2)} A^{(2)})\, C^{(2)} \,.\, D^{(2)}\} = \{(A^{(2)} A^{(2)})\, D^{(2)} \,.\, C^{(2)}\} \tag{93}$$

ist und das Verschwinden dieses Ausdrucks aussagt, daß $D^{(2)}$ apolar ist zu der zu $C^{(2)}$ bezüglich $A^{(2)}$ polaren Komplexgröße.

All dies gilt natürlich auch für die Flächen 2. Grades darstellenden Komplexgrößen $A^{(2)} = \{\alpha^{(2)\,2}\}$, $B^{(2)} = \{\beta^{(2)\,2}\}$. *Es stellt also* $\left\{(\{\alpha^{(2)\,2}\} \{\alpha^{(2)\,2}\})\, C^{(2)}\right\}$ *die zu* $C^{(2)}$ *bezüglich* $\alpha^{(2)}$ *polare Komplexgröße dar.*

Setzt man noch $C^{(2)} = \{\gamma^{(2)\,2}\}$, so *stellt*

$$\left\{(\{\alpha^{(2)\,2}\} \{\beta^{(2)\,2}\}) \{\gamma^{(2)\,2}\}\right\}$$

jenen Komplex 2. Grades dar, dessen Strahlen die Eigenschaft haben, daß ihre Polaren bezüglich $\alpha^{(2)}$ *und* $\beta^{(2)}$ *konjugiert sind bezüglich* $\gamma^{(2)}$. Zwei Strahlen X, Y heißen dabei nach obigem bezüglich $\gamma^{(2)}$ konjugiert, wenn $\left\{\{\gamma^{(2)\,2}\} X Y\right\} = 0$ ist, wenn also der eine die Polare des andern schneidet.[1]

[1] Diese Definition findet sich zuerst bei F. Schur, Über die durch kollineare Grundgebilde erzeugten Kurven usw., Math. Ann., *18* (1881), p. 1 f.

Insbesondre stellt

$$\left\{(\{\alpha^{(2)\,2}\}\{\alpha^{(2)\,2}\})\{\gamma^{(2)\,2}\}\right\} \qquad \ldots (*)$$

die zu $\gamma^{(2)}$ bezüglich $\alpha^{(2)}$ polare Fläche dar. Nach Nr. 3 stellt

$$\left\{(\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)})\{\gamma^{(2)\,3}\}\right\} \qquad \ldots (**)$$

dieselbe Fläche dar. Mithin muß der eine Ausdruck aus dem andern durch Multiplikation mit einem Zahlwert hervorgehen. Zur Auffindung dieser Identität setzen wir

$$\gamma^{(2)} = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2,\ [\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4] = \mathfrak{d}$$

und bezeichnen mit c_i das äußere Produkt der drei von γ_i verschiedenen Ebenen in solcher Anordnung, daß $[c_i\,\gamma_i] = \mathfrak{d}$ wird. Wenn auch $[\gamma_i\,\gamma_k\,\gamma_l\,\gamma_m] = \mathfrak{d}$ ist, so hat man

$$c_l = -[\gamma_i\,\gamma_k\,\gamma_m],\ c_m = [\gamma_i\,\gamma_k\,\gamma_l],$$

daher

$$[c_l\,c_m] = -[\gamma_i\,\gamma_k\,\gamma_m\cdot\gamma_i\,\gamma_k\,\gamma_l] = -[\gamma_i\,\gamma_k\,\gamma_m\,\gamma_l]\,[\gamma_i\,\gamma_k] = \mathfrak{d}\,[\gamma_i\,\gamma_k]$$

oder

$$[\gamma_i\,\gamma_k] = {}^1\!/\mathfrak{d}\,[c_l\,c_m].$$

Dann läßt sich der Ausdruck (*) schreiben

$$\begin{aligned}\left\{(\{\alpha^{(2)\,2}\}\{\alpha^{(2)\,2}\})\{\gamma^{(2)\,2}\}\right\} &= \Sigma\left\{(\{\alpha^{(2)\,2}\}\{\alpha^{(2)\,2}\})\,[\gamma_i\,\gamma_k]^2\right\} \quad {i \atop k}\Big\} = 1,2,3,4\\ &= \Sigma\left\{\alpha^{(2)2}\,[\gamma_i\,\gamma_k]\right\}^2\\ &= {}^1\!/\mathfrak{d}^2\,\Sigma\left\{\alpha^{(2)\,2}\,[c_l\,c_m]\right\}^2\\ &= {}^4\!/\mathfrak{d}^2\,\Sigma\,[\{\alpha^{(2)}\,c_l\}\{\alpha^{(2)}\,c_m\}]^2 \qquad \text{(zufolge Gl. 61)}\\ &= {}^4\!/\mathfrak{d}^2\left\{(\Sigma\,\{\alpha^{(2)}\,c_i\}^2)^2\right\}.\end{aligned}$$

Zufolge $\{(\alpha^{(2)}\ \alpha^{(2)})\ c_i^2\} = \{\alpha^{(2)}\ c_i\}\{\alpha^{(2)}\ c_i\}$ ist $\Sigma\ \{\alpha^{(2)}\ c_i\}^2 = = \{(\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)})\,\Sigma\,c_i^2\} = \{(\alpha^{(2)}\,\alpha^{(2)})\,c^{(2)}\}$, wenn $c^{(2)} = \Sigma\,c_i^2 = \sum_{k,l,m}[\gamma_k\,\gamma_l\,\gamma_m]^2 = = {}^1\!/_6\,\{\gamma^{(2)\,3}\}$ gesetzt wird. Wegen $24\,\mathfrak{d}^2 = \{\gamma^{(2)\,4}\}$ lautet daher die gesuchte Identität

$$3\left\{(\{\alpha^{(2)\,2}\}\{\alpha^{(2)\,2}\})\{\gamma^{(2)\,2}\}\right\}\{\gamma^{(2)\,4}\} = 8\left\{\left\{(\alpha^{(2)}\ \alpha^{(2)})\ \{\gamma^{(2)\,3}\}\right\}^2\right\}. \qquad (94)$$

6. Die fundamentale Strahlgröße.

Bezeichnen q_1, q_2, q_3, q_4 vier voneinander unabhängige Raumpunkte, und bildet man aus ihnen die Strahlgröße 2. Grades

$$\underset{\sim}{Q}^{(2)} = [q_1\, q_2]\,[q_3\, q_4] + [q_2\, q_3]\,[q_1\, q_4] + [q_3\, q_1]\,[q_2\, q_4], \tag{95}$$

so ist sie von Null verschieden. Für vier Punkte einer Geraden verschwindet diese Größe bekanntlich. Sie verschwindet aber auch, wenn die vier Punkte einer Ebene angehören. Dann läßt sich nämlich

$$q_4 = \mathfrak{a}_1\, q_1 + \mathfrak{a}_2\, q_2 + \mathfrak{a}_3\, q_3$$

setzen. Bildet man nun die Ausdrücke für $[q_1\, q_4]$, $[q_2\, q_4]$, $[q_3\, q_4]$, multipliziert sie hierauf algebraisch beziehungsweise mit $[q_2\, q_3]$, $[q_3\, q_1]$, $[q_1\, q_2]$ und addiert, so sieht man, daß $\underset{\sim}{Q}^{(2)} = 0$ wird. Ist umgekehrt $\underset{\sim}{Q}^{(2)} = 0$, und liegen nicht alle vier Punkte q_i auf einer Geraden, so müssen drei der Punkte, etwa q_1, q_2, q_3, voneinander unabhängig sein. Faltet man $\underset{\sim}{Q}^{(2)} = 0$ mit einem der Ebene $[q_1\, q_2\, q_3]$ angehörigen Strahl X, so erhält man, wegen $[q_1\, q_2\, X] = [q_2\, q_3\, X] = [q_3\, q_1\, X] = 0$, $2\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} X\} = [q_1\, q_2]\,[q_3\, q_4\, X] + [q_2\, q_3]\,[q_1\, q_4\, X] + [q_3\, q_1]\,[q_2\, q_4\, X] = 0$. Zufolge der Unabhängigkeit der drei Strahlen $[q_1\, q_2]$, $[q_2\, q_3]$, $[q_3\, q_1]$ besteht diese Gleichung nur für $[q_3\, q_4\, X] = [q_1\, q_4\, X] = [q_2\, q_4\, X] = 0$, also nur, wenn X die Strahlen $[q_3\, q_4]$, $[q_1\, q_4]$, $[q_2\, q_4]$ schneidet, d. h. q_4 der Ebene $[q_1\, q_2\, q_3]$ angehört. Mithin kann man sagen:

Die aus irgend vier Punkten q_1, q_2, q_3, q_4 gebildete Größe $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ verschwindet dann und nur dann, wenn die Punkte voneinander abhängig sind.

Für vier unabhängige Punkte kann sie also, wie oben behauptet wurde, nie verschwinden.

Bezeichnen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 vier voneinander unabhängige Ebenen, und bildet man aus ihnen die Strahlgröße 2. Grades

$$\bar{\underset{\sim}{Q}}^{(2)} = [\varphi_1\, \varphi_2]\,[\varphi_3\, \varphi_4] + [\varphi_2\, \varphi_3]\,[\varphi_1\, \varphi_4] + [\varphi_3\, \varphi_1]\,[\varphi_2\, \varphi_4], \tag{95'}$$

so ist sie ebenfalls von Null verschieden. Denn man zeigt auf duale Weise:

Die aus irgend vier Ebenen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 gebildete Größe $\bar{\underset{\sim}{Q}}^{(2)}$ verschwindet dann und nur dann, wenn die Ebenen voneinander abhängig sind.

$\underset{\sim}{Q}^{(2)} = 0$ ist die Identität, die zwischen vier Punkten einer Ebene, $\bar{\underset{\sim}{Q}}^{(2)} = 0$ die Identität, die zwischen vier Ebenen eines Bündels besteht. Analog besteht zwischen vier Strahlen $\underset{\sim}{Q}_i$ einer Ebene oder eines Bündels die Identität

$$[\underset{\sim}{Q}_1\, \underset{\sim}{Q}_2]_3\, [\underset{\sim}{Q}_3\, \underset{\sim}{Q}_4]_3 + [\underset{\sim}{Q}_2\, \underset{\sim}{Q}_3]_3\, [\underset{\sim}{Q}_1\, \underset{\sim}{Q}_4]_3 + [\underset{\sim}{Q}_3\, \underset{\sim}{Q}_1]_3\, [\underset{\sim}{Q}_2\, \underset{\sim}{Q}_4]_3 = 0,$$

wo die Marke 3 an den eckigen Klammern andeuten soll, daß die äußern Produkte sich auf das betreffende Hauptgebiet 3. Stufe beziehen.

Nehmen wir, wie es für das Folgende gelten soll, an, daß $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ und $\bar{Q}^{(2)}$ ungleich Null seien, dann läßt sich $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ auch in der Form $\underset{\sim}{\bar{Q}}^{(2)}$ darstellen. Wir werden daher gewöhnlich nur von der Form $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ sprechen.

Faltet man Gleichung (95) mit dem Quadrat eines Punktes x, so folgt $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} x^2\} = 0$, da man rechter Hand die Identität zwischen den vier Strahlen $[q_i x]$ des Bündels (x) erhält. Ebenso ist für jede Ebene ξ des Raumes $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} \xi^2\} = 0$. Da nun jede Punktgröße zweiten Grades $b^{(2)}$ oder jede Ebenengröße 2. Grades $\beta^{(2)}$ als Summe von Punktquadraten oder Ebenenquadraten darstellbar ist, so wird auch $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} b^{(2)}\} = 0$ und $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} \beta^{(2)}\} = 0$ oder:

Das Faltprodukt von $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ mit ieder Punkt- oder Ebenengröße 2. Grades verschwindet.

Anders ausgedrückt:

Die Strahlgröße $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ ist zu sämtlichen Punkt- und Ebenengrößen 2. Grades apolar.

Aus $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} b^{(2)}\} = 0$ folgt auch $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} b^{(2)} c^{(2)}\} = \{\underset{\sim}{Q}^{(2)} . b^{(2)} c^{(2)}\} = 0$. Da $\{b^{(2)} c^{(2)}\}$ die den harmonischen Komplex von $b^{(2)}$ und $c^{(2)}$ bestimmende Strahlgröße darstellt, so folgt:

Alle harmonischen Strahlkomplexe sind zu $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ apolar.

Wegen $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} a^{(2)\,2}\} = 0$ hat man ferner:

Alle Flächen 2. Grades sind auch als Strahlgrößen zu $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ apolar.

Insbesondre ist $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} . x_1^2 x_2^2\} = \{\underset{\sim}{Q}^{(2)} [x_1 x_2]^2\} = 0$ oder, wenn man $[x_1 x_2] = X$ setzt, $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} X^2\} = 0$. Diese Gleichung ist natürlich nichts andres als die zwischen den Koordinaten eines Strahls bezüglich des Tetraeders $q_1 q_2 q_3 q_4$ bestehende Identität. Mithin gilt der Satz:

$\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ ist zum Quadrat eines jeden Strahls, mithin auch zu jeder aus Strahlquadraten ableitbaren Strahlgröße 2. Grades apolar.[1]

Zu diesen gehört bekanntlich auch die einen harmonischen Komplex bestimmende Größe.

---

[1] Wegen $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} a_i^n\} = \{\underset{\sim}{Q}^{(2)} a_i^2\} a_i^{n-2} = 0$ und, wenn A_i einen Stab bezeichnet, $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} A_i^n\} = \{\underset{\sim}{Q}^{(2)} A_i^2\} A_i^{n-2} = 0$ ist auch $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} a^{(n)}\} = 0$ und, für $A^{(n)} = \Sigma A_i^n$, $\{\underset{\sim}{Q}^{(2)} A^{(n)}\} = 0$. $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ *ist also apolar zu sämtlichen algebraischen Punkt- und Ebenengrößen, ferner zu jenen Strahlgrößen, die sich als Summen von n-ten Potenzen von Stäben darstellen lassen.*

Wir setzen $[q_1 q_2 q_3 q_4] = \mathfrak{q}$. Dann wird

$$\{Q^{(2)} [q_1 q_2]\} = {}^1/_2 [q_3 q_4 q_1 q_2] [q_1 q_2] = \mathfrak{q}/_2 [q_1 q_2],$$

$$\{Q^{(2)} [q_3 q_4]\} = \mathfrak{q}/_2 [q_3 q_4] \text{ usw.},$$

also

$$\{Q^{(2)} [q_i q_k]\} = \mathfrak{q}/_2 [q_i q_k]$$

und, wenn S eine Stabsumme bezeichnet,

$$\{Q^{(2)} S\} = \mathfrak{q}/_2 \, S. \tag{96}$$

Für das algebraische Produkt $S_1 S_2$ zweier Stabsummen ist dann

$$\{Q^{(2)} . S_1 S_2\} = [\{Q^{(2)} S_1\} S_2]$$

und zufolge der Gleichung (96)

$$\{Q^{(2)} . S_1 S_2\} = \mathfrak{q}/_2 [S_1 S_2]. \tag{97}$$

Zwei Größen $S_1 S_2$ sind also dann und nur dann bezüglich $Q^{(2)}$ konjugiert, wenn sie apolar sind. Durch 6 paarweise apolare Größen S_i läßt sich daher $Q^{(2)}$ in der Form

$$Q^{(2)} = \Sigma \, \mathfrak{a}_i S_i^2 \quad (i = 1, 2, \qquad 6)$$

ausdrücken.

Aus Gleichung (97) folgt, wenn $A^{(2)} = \Sigma A_i A'_i$ eine beliebige quadratische Komplexgröße, A_i und A'_i also Stabsummen bezeichnen,

$$\{Q^{(2)} A^{(2)}\} = \Sigma \{Q^{(2)} . A_i A'_i\} = \mathfrak{q}/_2 \, \Sigma [A_i A'_i]. \tag{98}$$

Verschwindet dieser Ausdruck, d. h. ist $A^{(2)}$ *zu* $Q^{(2)}$ *apolar,* so läßt sich (nach Nr. 1, Schlußsatz) $A^{(2)}$ aus 6 Strahlquadraten ableiten. Die Umkehrung wurde schon früher bewiesen. Mithin gilt der

Satz 15: Die Komplexgröße $A^{(2)}$ ist dann und nur dann zu $Q^{(2)}$ apolar, wenn sie sich als Summe von Stabquadraten darstellen läßt.

Da $\{a^{(2)\,2}\}$ immer zu $Q^{(2)}$ apolar ist, so gibt es Polhexaeder dieser Größe, die $Q^{(2)}$ eingeschrieben sind, d. h. *es gibt ∞^{10} Gruppen von sechs Strahlen, die paarweise bezüglich $\mathfrak{a}^{(2)}$ konjugiert sind.*[1]

Setzt man in (98) für $A^{(2)}$ die Größe $Q^{(2)}$, so folgt

$$\{Q^{(2)} Q^{(2)}\} = \frac{3\,\mathfrak{q}^2}{2}; \tag{99}$$

$\{Q^{(2)} Q^{(2)}\}$ *ist also immer von Null verschieden.*

---

[1] J. Rosanes, Math. Ann. *23* (1884), S. 417.

Die Punkte q_1, q_2, q_3, q_4 waren willkürlich gewählt. Bildet man aus vier andern unabhängigen Punkten, deren äußeres Produkt $\mathfrak{q}_1$ ist, die analoge Strahlgröße $\underset{\sim}{Q}_1^{(2)}$, so unterscheiden sich deren Faltprodukte mit den Strahlgrößen ersten und zweiten Grades nur dadurch, daß in den Gleichungen (96) bis (99) an Stelle von $\mathfrak{q}$ der Wert $\mathfrak{q}_1$ tritt. Es ist also unwesentlich, aus welchem Quadrupel unabhängiger Punkte $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ gebildet wird. Meist wird es am bequemsten sein, die q_i so zu wählen, daß $\mathfrak{q} = 1$ wird, also etwa als die ursprünglichen Einheitspunkte e_i.

Wir nennen $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ die *fundamentale Strahlgröße.* Sie ändert sich nicht bei kollinearen und korrelativen Transformationen des Raums.

Es sei $A^{(2)} = \Sigma A_i^2$ eine beliebige Komplexgröße 2. Grades. Die zu $A^{(2)}$ bezüglich $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ polare Komplexgröße ist (nach Satz 14)

$$\{(\underset{\sim}{Q}^{(2)} \underset{\sim}{Q}^{(2)}) A^{(2)}\} = \Sigma \{(\underset{\sim}{Q}^{(2)} \underset{\sim}{Q}^{(2)}) A_i^2\} = \Sigma \{\underset{\sim}{Q}^{(2)} A_i\}^2 = \frac{\mathfrak{q}^2}{4} \Sigma A_i^2$$

oder

$$\{(\underset{\sim}{Q}^{(2)} \underset{\sim}{Q}^{(2)}) A^{(2)}\} = \frac{\mathfrak{q}^2}{4} A^{(2)}. \tag{100}$$

Daher:

Die polare Größe von $A^{(2)}$ bezüglich $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ ist mit $A^{(2)}$ kongruent.

Denkt man sich $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ in ihren Normalformen (Nr. 1) gegeben, also $A^{(2)} = \Sigma A_i E_i$, $B^{(2)} = \Sigma B_i E_i$ $(i = 1, 2, \quad 6)$, so sahen wir, daß

$$\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1 = \Sigma A_i B_{i+3} = \Sigma \{A^{(2)} E_{i+3}\} \{B^{(2)} E_i\}.$$

Denkt man sich $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ in der Form

$$\underset{\sim}{Q}^{(2)} = E_1 E_4 + E_2 E_5 + E_3 E_6$$

gewählt, so ist

$$\{(A^{(2)} B^{(2)}) \underset{\sim}{Q}^{(2)}\} = {}^1/_2 \Sigma \{A^{(2)} E_{i+3}\} \{B^{(2)} E_i\},$$

mithin

$$\{(A^{(2)} B^{(2)}) \underset{\sim}{Q}^{(2)}\} = {}^1/_2 \{A^{(2)} B^{(2)}\}_1, \tag{101}$$

oder in Worten:

Die gemischte Polargröße von $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ bezüglich $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ ist $\{A^{(2)} B^{(2)}\}_1$.

Dies stimmt mit Satz 11 überein.

Insbesondre ist $\{A^{(2)} A^{(2)}\}_1$ die polare Größe von $\underset{\sim}{Q}^{(2)}$ bezüglich $A^{(2)}$.

Nach Gleichung (86) ist

$$\{A^{(2)}\,A^{(2)}\}_1 = 2\,(A_1\,A_4 + A_2\,A_5 + A_3\,A_6)\,.$$

Diese Größe wird ein Vielfaches von $Q^{(2)}$, wenn die $\boldsymbol{A_i}$ die äußern Produkte von je zwei Ecken eines Tetraeders sind wie in Gleichung (23). Dann ist aber $A^{(2)}$ das Faltquadrat einer Punkt- oder Ebenengröße 2. Grades, stellt also eine Fläche 2. Grades als Strahlgröße dar. Mithin besteht der

Satz 16: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $A^{(2)}$ eine Fläche 2. Grades als Strahlgröße darstelle, lautet $\{A^{(2)}\,A^{(2)}\}_1 = \mathfrak{a}\,Q^{(2)}$. Diese Bedingung läßt sich auch in der Form aussprechen, daß $Q^{(2)}$ bezüglich $A^{(2)}$ zu sich selbst polar sein muß.

Eine Erzeugende X einer Fläche 2. Grades $A^{(2)} = \{a^{(2)}\,a^{(2)}\}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß sie mit ihrer Polare $\{A^{(2)}\,X\}$ identisch ist. Wegen $\{Q^{(2)}\,X\} = {}^1/_2\,X$ (nach Gleichung 96) läßt sich diese Bedingung schreiben $\{A^{(2)}\,X\} - \mathfrak{a}\,\{Q^{(2)}\,X\} = 0$ oder

$$\{(A^{(2)} - \mathfrak{a}\,Q^{(2)})\,X\} = 0, \tag{102}$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige Zahl bedeutet.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: 133_2a

Autor(en)/Author(s): Müller Emil

Artikel/Article: Das Rechnen mit Faltprodukten in seiner Anwendung auf die räumlichen Gebilde zweiten Grades. 243-283