Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über einige Eigenschaften der algebraischen Funktionen

Von

Alfred Tauber in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Oktober 1924)

§ 1. Die Darstellung der algebraischen Funktionen als hypergeometrische Reihen mehrerer Variabeln.

Sei irgend eine Gleichung $f(\zeta)-f(z)=\varepsilon$ zu betrachten und diejenige Lösung ζ dieser Gleichung zu suchen, welche in einer gewissen Umgebung von $\varepsilon=0$ eine Entwicklung nach Potenzen von zuläßt und für $\varepsilon=0$ gleich wird, so ist bei $f'(z)\neq 0$

$$\zeta=\sum_{0}^{\infty}\frac{h_\nu(z)}{\nu!}\qquad h_0(z)=\qquad h_{\nu+1}(z)=\frac{h'_\nu(z)}{f'(z)}\tag{1}$$

Aus der independenten Darstellung von $h_\nu(z)$, vgl. (8), findet man nun, wenn speziell $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades von ist, es sich also um eine algebraische Gleichung handelt, für $\zeta-z$ eine hypergeometrische Reihe

$$\zeta-z=\quad f'(z)\sum_{0}^{\infty}\quad\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty}\frac{(2\lambda_1+3\lambda_2+\ldots+n\lambda_{n-1})!}{(1+\lambda_1+2\lambda_2+\quad+\overline{n-1}\,\lambda_{n-1})!}\cdot$$
$$\cdot\frac{\varepsilon_1^{\lambda_1}\varepsilon_2^{\lambda_2}\quad.\varepsilon_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!}\tag{2}$$

mit den $n-1$ Variabeln

$$=-\frac{\varepsilon^\mu f^{\mu+1}(z)}{(\mu+1)!\,f'(z)^{\mu+1}},\ \mu=1,\qquad n\quad 1.\tag{3}$$

Beweis: Bezüglich der Funktion $h_\nu(z)$, d. h. des ν-ten Differentialquotienten nach ε einer implizit durch $f(z)=\varepsilon$ definierten Funktion z der Unabhängigen ε, zeigt die Rekursion $h_{\nu+1}(z)=h'_\nu(z)f'(z)^{-1}$, daß $h_\nu(z)$ als Polynom von $f'(z)^{-1}, f''(z),\quad f^{(\nu)}(z)$ eine Summe von Gliedern der Gestalt

$$f''(z)^{\varkappa_2} f'''(z)^{\varkappa_3} \ldots f^{(\nu)}(z)^{\varkappa_\nu} / f'(z)^{2\nu-1-\varkappa_1}$$

ist, wenn die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$ den beiden Bedingungen

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_\nu = \nu-1, \quad \varkappa_1+2\varkappa_2+\ldots+\nu\varkappa_\nu = 2\nu-2 \tag{4}$$

genügen. Insbesondere kommt nur ein $f^{(\nu)}(z)$ enthaltendes Glied vor, und zwar wie rekursiv zu erkennen, der Term $-f^{(\nu)}(z) : f'(z)^{\nu+1}$.

Die Gleichungen (4) gestatten $\varkappa_1, \varkappa_2$ durch $\varkappa_3, \ldots \varkappa_\nu$ zu bestimmen:

$$\varkappa_1 = \varkappa_3 + 2\varkappa_4 + \ldots + (\nu-2)\varkappa_\nu \tag{5}$$

$$\varkappa_2 = \nu-1-2\varkappa_3-3\varkappa_4-\ldots-(\nu-1)\varkappa_\nu, \tag{6}$$

so daß man $\varkappa_3, \ldots \varkappa_\nu$ als Summationselemente mit der einen Bedingung

$$2\varkappa_3+3\varkappa_4+\ldots+(\nu-1)\varkappa_\nu \leqq \nu-1 \tag{7}$$

verwenden kann. Alsdann lautet die gesuchte independente Formel für $h_\nu(z)$, bei $\nu \geqq 3$

$$h_\nu(z) = \sum_{\varkappa_3=0} \ldots \sum_{\varkappa_\nu=0} (-1)^{\nu-1+\varkappa_1} \frac{(2\nu-2-\varkappa_1)!}{f_1^{2\nu-1-\varkappa_1}} \frac{f_2^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!} \frac{f_3^{\varkappa_3}}{\varkappa_3!} \cdots \frac{f_\nu^{\varkappa_\nu}}{\varkappa_\nu!} \tag{8}$$

unter Gebrauch der abkürzenden Bezeichnungen

$$f_1 = \frac{f'(z)}{1!}, \; f_2 = \frac{f''(z)}{2!} \ldots f_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} \tag{9}$$

Man hat nunmehr zu beweisen, daß die durch (8) definierte Funktion $h_\nu(z)$ wirklich die Rekursion $h_{\nu+1}(z) = h'_\nu(z) f'(z)^{-1}$, oder ausführlicher geschrieben

$$h_{\nu+1}(z) = \frac{1}{f_1} \sum_{\mu=1}^{\nu} (\mu+1) f_{\mu+1} \frac{\partial h_\nu(z)}{\partial f_\mu} \tag{10}$$

erfüllt, wenn $h_{\nu+1}(z)$ analog (8) gebildet wird

$$h_{\nu+1}(z) = \sum_{\sigma_3=0} \ldots \sum_{\sigma_{\nu+1}=0} (-1)^{\nu+\sigma_1} \frac{(2\nu-\sigma_1)!}{f_1^{2\nu+1-\sigma_1}} \frac{f_2^{\sigma_2}}{\sigma_2!} \frac{f_3^{\sigma_3}}{\sigma_3!} \cdots \frac{f_{\nu+1}^{\sigma_{\nu+1}}}{\sigma_{\nu+1}!} \tag{11}$$

wobei die Zahlen σ der Bedingung

$$\sigma_2 = \nu - 2\sigma_3 - 3\sigma_4 - \ldots - \nu\,\sigma_{\nu+1} \geqq 0 \tag{12}$$

genügen müssen, und

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2\sigma_4 + \ldots + (\nu - 2)\,\sigma_\nu + (\nu - 1)\,\sigma_{\nu+1} \tag{13}$$

sein soll. Da zunächst der $f_{\nu+1}$ enthaltende Term von $h_{\nu+1}(z)$ nach dem obigen gleich

$$-(\nu + 1)!\, f_{\nu+1} / f_1^{\nu+2}$$

ist, so folgt aus (10)

$$h_{\nu+1}(z) + \frac{(\nu+1)!\, f_{\nu+1}}{f_1^{\nu+2}} = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (\mu + 1)\, \frac{f_{\mu+1}}{f_1}\, \frac{\partial h_\nu(z)}{\partial f_\mu} \tag{14}$$

Die linke Seite von (14) wird aber erhalten, indem man in (11), (12), (13) rechts $\sigma_{\nu+1} = 0$ einsetzt. Andrerseits ergibt die Berechnung der $\nu - 1$ Summanden der rechten Seite von (14): Für den ersten, bei $\mu = 1$,

$$\sum_{\varkappa_3=0} \ldots \sum_{\varkappa_\nu=0} (-1)^{\nu-\varkappa_1}\, \frac{(2\nu - 1 - \varkappa_1)!}{f_1^{2\nu+1-\varkappa_1}}\, (\varkappa_2 + 1)\, \frac{f_2^{\varkappa_2+1}}{(\varkappa_2+1)!}\, \frac{f_3^{\varkappa_3}}{\varkappa_3!} \cdots \frac{f_\nu^{\varkappa_\nu}}{\varkappa_\nu!}. \tag{15}$$

Schreibt man hierin $\sigma_3 \ldots$ statt $\varkappa_3 \ldots \varkappa_\nu$, was erlaubt ist, denn die zulässigen Kombinationen von $\varkappa_3 \ldots \varkappa_\nu$ befinden sich, vgl. (7), (12) jedenfalls unter denjenigen der $\sigma_3 \ldots \sigma_\nu$ bei $\sigma_{\nu+1} = 0$, und ersetzt dementsprechend $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ durch σ_1, $\sigma_2 - 1$, so erlangt (15) die Form

$$2 \sum_{\sigma_3=0} \ldots \sum_{\sigma_\nu=0} (-1)^{\nu+\sigma_1}\, \sigma_2\, \frac{(2\nu - 1 - \sigma_1)!}{f_1^{2\nu+1-\sigma_1}}\, \frac{f_2^{\sigma_2}}{\sigma_2!}\, \frac{f_3^{\sigma_3}}{\sigma_3!} \cdots \frac{f_\nu^{\sigma_\nu}}{\sigma_\nu!} \tag{16}$$

(bei $\sigma_2 \geqq 1$). Nachträglich darf aber die Summation, wegen des auftretenden Faktors σ_2, auch über jene Kombinationen von $\sigma_3, \ldots$ erstreckt werden, welche $\sigma_2 = 0$ bewirken, somit über alle $\sigma_3, \ldots \sigma_\nu$ mit dem Spielraum

$$2\sigma_3 + 3\sigma_4 + \ldots + (\nu - 1)\,\sigma_\nu \leqq \nu. \tag{17}$$

In derselben Weise berechnet man aus (8) die Terme

$$\frac{(\mu + 1)\, f_{\mu+1}}{f_1}\, \frac{\partial h_\nu(z)}{\partial f_\mu} \quad \text{für } \mu = 2 \text{ bis } \nu$$

setzt je nachdem $\mu = 2$ oder > 2 ist

$$\varkappa_3 = \sigma_3 - 1, \; \varkappa_i = \sigma_i \text{ für } i = 4 \text{ bis } \nu$$

oder

$$\varkappa_\mu = \sigma_\mu + 1, \; \varkappa_{\mu+1} = \sigma_{\mu+1} - 1, \; \varkappa_i = \sigma_i \text{ für } i = 3 \text{ bis } \nu, \text{ exkl. } \mu, \mu + 1$$

und erhält für den in Rede stehenden Ausdruck

$$(\mu + 1) \sum_{\sigma_3 = 0} \cdots \sum_{\sigma_\nu = 0} (-1)^{\nu + \sigma_1} \sigma_{\mu+1} \frac{(2\nu - 1 - \sigma_1)!}{f_1^{2\nu + 1 - \sigma_1}} \frac{f_2^{\sigma_2}}{\sigma_2!} \frac{f_3^{\sigma_3}}{\sigma_3!} \cdots \frac{f_\nu^{\sigma_\nu}}{\sigma_\nu!}. \quad (18)$$

Daher gilt die Gleichung (14), nämlich Gleichheit zwischen (11), dort $\sigma_{\nu+1} = 0$ gesetzt und den Ausdrücken (16), (18) zusammengenommen, wofern die Koeffizienten eines jeden Produktes $f_3^{\sigma_3}, f_4^{\sigma_4} \ldots f_\nu^{\sigma_\nu}$ in beiden Fällen dieselben sind oder nach Division aller dieser Koeffizienten durch $(-1)^{\nu+\sigma_1} (2\nu - 1 - \sigma_1)!$, wofern die Identität

$$2\nu - \sigma_1 = 2\sigma_2 + \sum_{\mu = 2}^{\nu - 1} (\mu + 1)\sigma_{\mu+1}$$

besteht, was in der Tat stattfindet.

Wenn jetzt speziell $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades von z ist, so verschwindet $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$ und es entfällt, wenn $\nu > n$ ist, im Ausdruck (8) für $h_\nu(z)$ die Summation über $\varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+2}, \ldots \varkappa_\nu$ so, daß $h_\nu(z)$ eine $(n-2)$-fache Summe vorstellt. Andrerseits können wieder für $\nu > n$ in $h_\nu(z)$ zusätzlich die Indizes $\varkappa_{\nu+1}, \ldots \varkappa_n$ mit der Bedingung

$$\varkappa_2 = \nu - 1 - 2\varkappa_3 - 3\varkappa_4 - \ldots - (n-1)\varkappa_n \geqq 0 \quad (19)$$

welche automatisch $\varkappa_{\nu+1} = \ldots = \varkappa_n = 0$ bewirkt und somit äquivalent (7) ist, verwendet werden. Die Formel (8) wird dann auch für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ anwendbar und liefert für $\zeta - z$ die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} \sum_{\varkappa_3 = 0} \cdots \sum_{\varkappa_n = 0} (-1)^{\nu - 1 + \varkappa_1} \frac{(2\nu - 2 - \varkappa_1)!}{f_1^{2\nu - 1 - \varkappa_1}} \frac{f_2^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!} \cdots \frac{f_n^{\varkappa_n}}{\varkappa_n!} \quad (20)$$

und indem man statt ν das Summationselement $\varkappa_2$ einführt (worin aber eine Umordnung dieser Potenzreihe von $\varepsilon, f_3, \ldots f_n$ liegt), braucht man die Einschränkung (19) nicht mehr hervorzuheben. Man erhält so $\zeta - z$ gleich

$$\sum_{\varkappa_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\varkappa_n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{1+\varkappa_2+2\varkappa_3+\cdots+(n-1)\varkappa_n}}{(1+\varkappa_2+2\varkappa_3+\cdots+\overline{n-1}\,\varkappa_n)!}$$

$$\frac{(2\varkappa_2+3\varkappa_3+\cdots+n\varkappa_n)!}{f_1^{1+2\varkappa_2+3\varkappa_3+\cdots+n\varkappa_n}} \; \frac{(-f_2)^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!} \cdots \frac{(-f_n)^{\varkappa_n}}{\varkappa_n!}$$

d. h. nach Ersetzung der Indizes $\varkappa_2$ bis $\varkappa_n$ durch λ_1 bis λ_{n-1} und Einführung der Grössen (3) die zu beweisende Formel (2).

Absolute Konvergenz der hypergeometrischen Reihe in (2) besteht jedenfalls, wenn $|\varepsilon|$ unter einer gewissen genügend kleinen, aber von Null verschiedenen Größe bleibt (vgl. den Horn'schen Konvergenzsatz, Math. Ann., Bd. 34, S. 599) und solange diese Reihe absolut konvergiert, durfte auch die obige Umordnung geschehen.

§ 2. Über die den n-deutigen Funktionen zugehörige lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung.

Die Elemente irgend eines Systems $y_1, y_2, \ldots y_n$ von n Funktionen der Variabeln x können nicht bloß als Integrale einer linearen Differentialgleichung n. O., sondern auch als Integrale einer solchen $(n-1)$-ter Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} y^{(n-1)} & y^{(n-2)} & \cdots & y' & 1 \\ y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1 & 1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2 & 1 \\ \vdots & & & & \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

aufgefaßt werden. Diese wieder ist, wenn die Definitionsgleichung der Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$, nämlich

$$f(y) = (y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n) =$$
$$= y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} \cdots + (-1)^n p_n = 0 \qquad (2)$$

gebildet wird, und wenn mit Hilfe der symmetrischen Funktionen $p_1, p_2, \ldots p_n$ von $y_1, y_2, \ldots y_n$ andere Funktionen

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_{\lambda h} = \sum\limits_{\varkappa=1}^{n} \dfrac{\partial p_\lambda}{\partial y_\varkappa} y_\varkappa^{(h-1)}, \quad y_\varkappa^{(0)} = y_\varkappa, \; y_\varkappa^{(-1)} = 1 \\ \\ \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad h = 0, 1, \ldots n \end{array}\right. \qquad (3)$$

eingeführt werden, welche rational in den p und den ersten, zweiten, ... Differentialquotienten der p nach x sind, ersetzbar durch

$$L^{\frac{1}{2}} D = \begin{vmatrix} y^{(n-1)} & y^{(n-2)} & \ldots y & 1 \\ \omega_{1n} & \omega_{1,n-1} & \omega_{11} & \omega_{10} \\ \omega_{2n} & \omega_{2,n-1} & \omega_{21} & \omega_{20} \\ \omega_{nn} & \omega_{n,n-1} & \omega_{n1} & \omega_{n0} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

wo L die Diskriminante von $f(y) = 0$ bedeutet.

Zum Beweise dieses Satzes bestimmt man umgekehrt die $y_\varkappa^{(h-1)}$ als lineare Funktionen der $\omega_{\lambda h}$ aus dem Gleichungssystem (3), für welches die Determinante

$$\frac{\partial (p_1, p_2, \ldots p_n)}{\partial (y_1, y_2, \ldots y_n)}$$

mit Q und die zu $\partial p_\lambda / \partial y_\varkappa$ gehörige Unterdeterminante mit $Q_{\lambda\varkappa}$ bezeichnet werde (es ist sowohl Q als $Q_{\lambda\varkappa}$ von h unabhängig)

$$y_\varkappa^{(h-1)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\lambda\varkappa}\, \omega_{\lambda h}, \quad \varepsilon_{\lambda\varkappa} = \frac{Q_{\lambda\varkappa}}{Q} \tag{5}$$

und substituiert diese Werte (5) der $y_\varkappa^{(h-1)}$ in (1), dann stellt sich D offenbar als das Produkt der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} y^{(n-1)} & y^{(n-2)} & \ldots y & 1 \\ \omega_{1n} & \omega_{1,n-1} & \omega_{11} & \omega_{10} \\ \omega_{2n} & \omega_{2,n-1} & \omega_{21} & \omega_{20} \\ \omega_{nn} & \omega_{n,n-1} & \omega_{n1} & \omega_{n0} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \ldots & \varepsilon_{n1} \\ \varepsilon_{12} & & & \\ \varepsilon_{1n} & & \ldots & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix}$$

heraus, deren erste eben die Determinante in (4) ist, während die zweite den Wert Q^{-1} besitzt. Wegen $Q^2 = L$ ergibt dies die zu beweisende Gleichung (4).

Zwischen den Funktionen ω bestehen rekursive Beziehungen, deren Aufstellung sich mit der algebraischen Aufgabe, die Funktion $f'(y_\varkappa)^{-1}$ in ein Polynom von $y_\varkappa$ umzuwandeln, in Zusammenhang bringen läßt. Vgl. die Formeln (10), (11), (16), (17), (25).

Unmittelbar anzugeben sind die Elemente der drei letzten Kolonnen in (4)

$$\omega_{\lambda 0} = (n - \lambda + 1)\, p_{\lambda-1}, \quad \omega_{\lambda 1} = \lambda\, p_\lambda, \quad \omega_{\lambda 2} = p'_\lambda, \quad \lambda = 1 \text{ bis } n \tag{6}$$

($p_0 = 1$ definiert), ebenso die Elemente der zweiten Zeile $\omega_{1h} = p_1^{(h-1)}$ für $h > 0$. Ist $p_1 = 0$, d. h. unter der Annahme $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$, verschwinden die letztgenannten Elemente ω_{1h} und die Differentialgleichung (4) wird homogen.

Um eine Rekursion der $\omega_{\lambda h}$ zu erlangen, hat man die Gleichungen (3) nach x zu differentiieren

$$\omega'_{\lambda h} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial p_\lambda}{\partial y_\varkappa} y_\varkappa^{(h)} + \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa^{(h-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p_\lambda}{\partial y_\varkappa \, \partial y_i} \, y'_i, \tag{7}$$

in der Doppelsumme rechts für y'_i, $y^{(h-1)}$ die aus (5) entnommenen Werte

$$y'_i = \frac{1}{\underset{\sim}{Q}} \sum_{\mu=1}^{n} Q_{\mu i} \, \omega_{\mu 2}, \quad y_\varkappa^{(h-1)} = \frac{1}{\underset{\sim}{Q}} \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\nu\varkappa} \, \omega_{\nu h} \tag{8}$$

zu substituieren und die so entstehende vierfache Summe nach $\omega_{\mu 2}$ und $\omega_{\nu h}$ zu ordnen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 p_\lambda}{\partial y_\varkappa \, \partial y_i} \, \frac{Q_{\mu i}}{\underset{\sim}{Q}} \, \frac{Q_{\nu\varkappa}}{\underset{\sim}{Q}} \, \omega_{\mu 2} \, \omega_{\nu h} =$$

$$= \frac{1}{\underset{\sim}{Q}^2} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\lambda\mu\nu} \, \omega_{\mu 2} \, \omega_{\nu h}$$

wobei noch die Berechnung der Koeffizienten

$$P_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p_\lambda}{\partial y_\varkappa \, \partial y_i} \, Q_{\mu i} \, Q_{\nu\varkappa} \tag{9}$$

zu leisten ist. Diese Größen $P_{\lambda\mu\nu}$ besitzen aber die Eigenschaft, nur von den beiden Parametern λ, $\mu+\nu$ abzuhängen, so daß man $P_{\lambda\mu\nu} = P_{\lambda,\,\mu+\nu}$ setzen und der Rekursion (7) mit Rücksicht auf $\omega_{\mu 2} = p'_\mu$ und die oben erwähnte Relation $\underset{\sim}{Q}^2 = L$ die Gestalt

$$\omega_{\lambda,\,h+1} = \omega'_{\lambda h} - \frac{1}{L} \sum_{\nu=1}^{n} \omega_{\nu h} \sum_{\mu=1}^{n} P_{\lambda,\,\mu+\nu} \, p'_\mu \tag{10}$$

erteilen kann. Die angeführte Eigenschaft und zugleich die Berechnung der P als Polynome der Koeffizienten p resultiert aus der Untersuchung ihrer generierenden Funktionen

$$F_{\mu\nu}(y) = \sum_{\lambda=2}^{n} (-1)^{\lambda+\mu+\nu} \, P_{\lambda\mu\nu} \, y^{n-\lambda}, \tag{11}$$

die unter Benützung der aus (2) durch partielle Differentiation nach y_i und $y_\varkappa$ bei $\varkappa \neq i$ hervorgehenden Identität

$$\sum_{\lambda=2}^{n}(-1)^{\lambda}\frac{\partial^2 p_\lambda}{\partial y_i\,\partial y_\varkappa}y^{n-\lambda}=\frac{f(y)}{(y-y_i)\,(y-y_\varkappa)},\ \varkappa\neq i, \tag{12}$$

und weil man offenbar auch in der Definitionsgleichung (9) die Summation auf die Fälle $\varkappa\neq i$ beschränken darf, vorerst durch

$$F_{\mu\nu}(y)=(-1)^{\mu+\nu}\sum_{=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{f(y)}{(y-y_i)\,(y-y_\varkappa)}Q_{\mu i}\,Q_{\nu\varkappa},\ \varkappa\neq i \tag{13}$$

sich darstellen lassen. Nun gelten für die Determinante Q von (3) und deren Unterdeterminanten, wie z. B. durch Schluß von n auf $n+1$ zu zeigen, die Gleichungen

$$Q=\Pi(y_\mu-y_\nu),\ \mu<\nu,\ \mu,\nu=1 \text{ bis } n \tag{14}$$

$$Q_{\lambda\varkappa}=(-1)^{\varkappa+\lambda}y_\varkappa^{n-\lambda}\,\Pi_\varkappa(y_\mu-y_\nu)=(-1)^{\lambda+1}y_\varkappa^{n-\lambda}\frac{Q}{f'(y_\varkappa)} \tag{15}$$

wo der Index $\varkappa$ beim Produktzeichen in (15) darauf hinweisen soll, daß sowohl für μ als für ν der Wert $\varkappa$ ausgeschlossen wird. Wertet man also gemäß (15) den Ausdruck (13) für die generierende Funktion $F_{\mu\nu}(y)$ aus

$$F_{\mu\nu}(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{f(y)\,y_i^{n-\mu}\,y_\varkappa^{n-\nu}}{(y-y_i)\,(y-y_\varkappa)}\,\frac{Q^2}{f'(y_i)f'(y_\varkappa)},\ \varkappa\neq i$$

und vollzieht rechts die Summation zuerst bei fixem i nach $\varkappa$, unter Benützung des Satzes über die Partialbruchzerlegung, welcher hier

$$\sum_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq i}}^{n}\frac{y_\varkappa^{n-\nu}}{(y-y_\varkappa)\,f'(y_\varkappa)}=\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{y_\varkappa^{n-\nu}}{(y-y_\varkappa)\,f'(y_\varkappa)}-\frac{y_i^{n-\nu}}{(y-y_i)\,f'(y_i)}$$

$$=\frac{y^{n-\nu}}{f(y)}-\frac{y_i^{n-\nu}}{(y-y_i)\,f'(y_i)}$$

ergibt, so ist dadurch nachgewiesen, daß in der Tat

$$F_{\mu\nu}(y)=Q^2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y^{n-\nu}}{f(y)}-\frac{y_i^{n-\nu}}{(y-y_i)\,f'(y_i)}\right\}\frac{y_i^{n-\mu}f(y)}{(y-y_i)f'(y_i)}$$

$$=Q^2\left\{\frac{y^{2n-\mu-\nu}}{f(y)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{2n-\mu-\nu}f(y)}{(y-y_i)^2\,f'(y_i)^2}\right\}$$

nur von $\mu+\nu = 2n-\tau$ abhängt und nunmehr kürzer mit $F_\tau(y)$ bezeichnet, in der Form

$$F_\tau(y) = L\left\{\frac{y^\tau}{f(y)} + f(y)\,\Phi'_\tau(y)\right\},\ \Phi_\tau(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^\tau}{(y-y_i)\,f'(y_i)^2} \tag{16}$$

darstellbar wird. Hierbei besitzt aber $\Phi_\tau(y)f(y)$, als Polynom $(n-1)$-ten Grades von y, für $y = y_i$ bei $i = 1, 2, \ldots n$ den Wert $y_i^\tau/f'(y_i)$, daher muß $y^\tau - \Phi_\tau(y)f(y)f'(y)$ durch $f(y)$ teilbar sein, d. h. es muß, wenn $G_\tau(y) = \Phi_\tau(y)f(y)L$ gesetzt wird, in

$$Ly^\tau = G_\tau(y)f'(y) + H_\tau(y)f(y),\ 0 \leqq \tau \leqq 2n-2 \tag{17}$$

auch $H_\tau(y)$ ein Polynom von y definieren. Hierdurch endlich erhält die generierende Funktion $F_\tau(y)$, wenn in der ersten Gleichung (16) statt $\Phi_\tau(y)$ der Wert $G_\tau(y)/Lf(y)$ substituiert wird, die einfache Definitionsgleichung

$$F_\tau(y) = (-1)^\tau \sum_{\lambda=2}^{n} (-1)^\lambda P_{\lambda,\,2n-\tau}\, y^{n-\lambda} = G'_\tau(y) + H_\tau(y). \tag{18}$$

Durch diese Darstellung der $F_\tau(y)$ erscheint die Aufgabe der Bestimmung der Koeffizienten P und damit derjenigen, von h unabhängigen Operation (10), durch welche die Elemente $\omega_{\lambda,\,h+1}$ von (4) aus den $\omega_{\lambda h}$ gewonnen werden, auf die Untersuchung der (Eulerschen) Gleichung (17) zurückgeführt.

Zur Berechnung der Funktionen $F_\tau(y)$, $G_\tau(y)$, $H_\tau(y)$ dienen auch noch die Rekursionen

$$F_{\tau+1}(y) = y\,F_\tau(y) + G_\tau(y) \tag{19}$$

$$G_{\tau+1}(y) = y\,G_\tau(y) - g_\tau f(y) \tag{20}$$

$$H_{\tau+1}(y) = y\,H_\tau(y) + g_\tau f'(y), \tag{21}$$

unter g_τ den Koeffizienten von y^{n-1} in $G_\tau(y)$ verstanden, welcher dem von y^{n-2} in $F_\tau(y)$ entgegengesetzt gleich ist. Außerdem kann man für die F separat aus (19), (20) eine Rekursion ableiten

$$F_{\tau+2}(y) - 2y\,F_{\tau+1}(y) + y^2 F_\tau(y) + g_\tau f(y) = 0. \tag{22}$$

Independent bestimmt man die Funktionen $F_\tau(y)$, aber nur für $\tau \leqq n-2$, mit Hilfe der von Jacobi und Rosenhain für die

Behandlung der Gleichung (17) gefundenen Methoden, und zwar aus der bekannten Darstellung der Diskriminante L von $f(y) = 0$

$$(-1)^{n-1} n^{n-2} L = \operatorname{Det} \varphi_{\varkappa\lambda}, \quad \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n-1 \tag{23}$$

$$= \varphi_{\lambda\varkappa} = n \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (\varkappa+\lambda-2\nu)\, p_\nu\, p_{\varkappa+\lambda-\nu} - (n-\varkappa)\, \lambda\, p_\varkappa\, p_\lambda \tag{24}$$

als einer symmetrischen[1] Determinante $(n-1)$-ten Grades: Ersetzt man nämlich in der letzteren die Elemente $\varphi_{n-\tau,\lambda}$ der $(\tau+1)$-ten Zeile, von unten, durch

$$(-1)^{\lambda-1} (n-\lambda)\, (y^{\lambda-1} - p_1 y^{\lambda-2} + p_2 y^{\lambda-3} - \ldots \pm p_{\lambda-1}) \tag{25}$$

so entsteht alsdann $(-1)^{\tau+1} n^{n-3} F_\tau(y)$.

Nachtragsbemerkung.

Aus der Formel (2) in § 1 ist der Satz abzuleiten, daß für eine rationale Funktion f, je nachdem der Grad n ihres Zählers den Grad m des Nenners übersteigt oder nicht, $\zeta - z$ eine hypergeometrische Reihe von $m+n-1$ oder $m+n$ Variabeln wird.

---

[1] Wie ja überhaupt die Resultante zweier Gleichungen der Grade n und $m < n$ in die Gestalt einer symmetrischen Determinante m-ten Grades gebracht werden kann, wenn man ein System von $n - m$ linearen Gleichungen als aufgelöst ansieht.