

Über den Druck von Sandhügeln

Von

Felix M. Exner

w. M. Akad. Wiss.

(Mit 4 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1924)

Gelegentlich des Studiums der Dünen trat die Frage auf, welchen Druck Sandrücken und Sandhügel auf ihre Unterlage ausüben und wie dieser Druck auf die Bodenfläche verteilt sei. Ich konnte in der Literatur hierüber nichts finden. Die Studien über den Erddruck« scheinen sich alle mit dem Seiten- und Bodendruck von Erdmassen zu befassen, die für bautechnische Zwecke in kistenartige Gefäße gefüllt sind; der Druck von freiliegenden Sandmassen, die unter dem Einfluß ihres Gewichtes und ihrer Reibung die bekannten Böschungsformen der Sandrücken und Sandkegel bilden, scheint bisher nicht untersucht worden zu sein.

Die folgende kurze Behandlung dieser Frage kann keinen Anspruch auf physikalische Genauigkeit machen. Bekanntlich sind die Untersuchungen über den Sanddruck auf vollkommen theoretischer Basis äußerst schwierig und die Lösung solcher Aufgaben war bisher nur unter den einfachsten Bedingungen möglich. Ich habe daher versucht, mir diese Frage für geophysikalische Zwecke möglichst einfach zu gestalten und habe zu diesem Zwecke einige Messungen des Druckes gemacht und die Resultate mit einer möglichst einfachen analytischen Darstellung in Einklang zu bringen versucht, die trotz ihrer Ungenauigkeit doch eine Vorstellung von der Druckverteilung unter Sandhaufen liefert. Vielleicht ist das Ergebnis der kleinen Arbeit trotz der Mangelhaftigkeit der Behandlung nicht ungeeignet, um auch den Druck der Gebirge und Kontinentalmassen auf die darunter liegenden Schichten der Erde zu beurteilen.

Wir wollen uns im folgenden einen geradlinigen Sandrücken auf einer festen, ebenen Unterlage aufgeworfen denken, dessen Länge beliebig groß sei. Wird der Sand über einem geraden Streifen aufgestreut, so bildet sich von selbst ein Rücken mit ebenen Seitenflächen, deren Neigung gegen den Horizont dem bekannten maximalen Böschungswinkel entspricht. Wenn längs der ganzen Längsachse die Höhe dieselbe ist, so brauchen wir die Sandverteilung nur nach zwei Dimensionen zu berücksichtigen, quer zur Längsachse und nach aufwärts. Der Querschnitt durch den Rücken ist ein gleichschenkeliges Dreieck.

Es fragt sich nun, wie groß ist der Druck in der Mitte der Grundlinie, also unterhalb der Dreieckspitze, wie hängt derselbe von der Höhe des Sandrückens ab, und wie ist die Druckverteilung in der Grundlinie beschaffen.

Würden wir einen festen Körper von der Gestalt des Sandrückens auf die ebene Unterlage aufstellen, so würde er in der ganzen Grundlinie des Querschnittsdreiecks den gleichen Druck auf dieselbe ausüben. Ist die Grundlinie B , die Höhe H , das spezifische Gewicht ρ so wäre der Druck auf die Flächeneinheit gleich dem Gesamtgewicht des Körpers von der Rückenlänge 1, also $\frac{B H \rho}{2}$

dividiert durch B , somit $\frac{H \rho}{2}$ Ist hingegen der Körper nicht fest,

sondern aus Sand oder, allgemein gesagt, unter Reibung gegeneinander beweglichen Teilchen zusammengesetzt, so nähert er sich in seinen Druckeigenschaften einer Flüssigkeit. Eine beliebig weit ausgedehnte Sandmasse von überall gleicher Höhe müßte in ihren mittleren Teilen einen Druck auf die Unterlage ausüben, der dem hydrostatischen Druck gleichkäme, also $H \rho$ wäre. Hat aber der Sandkörper die Form eines Rückens mit maximalen Böschungswinkeln, dann muß der Druck in der Mitte der Grundfläche zwischen dem Wert $\frac{H \rho}{2}$ des festen Körpers und $H \rho$ des

flüssigen liegen; denn der Druck muß offenbar nach der Seite zu abnehmen und auf jeden Fall muß der Gesamtdruck des Sandrückens dem Gewichte desselben gleich werden, also pro Einheit der Rückenlänge $\frac{B H \rho}{2}$ betragen. Es muß also der Druck unter

der Mitte des Sandrückens kleiner sein als der hydrostatische, an den Rändern aber größer als der dortigen Sandhöhe entspricht, die inneren Sandsäulen müssen von der Seite her teilweise durch Reibung getragen werden, während die äußeren Säulen durch die inneren vermittelt der Reibung nach abwärts gedrückt werden.

Die Versuche, den Sanddruck zu messen, führten zu keinen ganz befriedigenden Ergebnissen, waren aber doch genügend, um eine Bestätigung der oben geschilderten Verhältnisse zu erhalten. Sie fanden in mäßigen Dimensionen im Laboratorium statt, indem Donausand auf ein horizontales Brett aufgeschüttet wurde. Die Messung des Druckes auf die Unterlage hat manche Schwierigkeit. Ich bediente mich nach mehrfachen Versuchen hierzu eines oder mehrerer Quecksilbernäpfe, die in das Bodenbrett eingelassen waren; an sie wurden Quecksilberheber angeschlossen; der Sand lag dann stellenweise nicht auf dem Holzbrett, sondern auf Quecksilber und drückte auf dieses. Der Napf A war kreisförmig und hatte einen Durchmesser von 25 mm. Daran schloß sich ein U-förmig

gekrümmtes Glasrohr (Fig. 1). an dessen offenem Ende eine Skala zur Ablesung des Quecksilberstandes angebracht war. Wurde auf das Brett und den Napf nun Sand aufgeschüttet, so stieg das Quecksilber bei *B*. Versuche, diese Höhendifferenz als Maß des Sanddruckes am Punkte *A* aufzufassen, stellten sich als unbrauchbar heraus, da der Sand, sobald das Quecksilber im Napf sank, eine Stütze an dem kreisförmigen Holzrand des Napfes fand und dadurch sein Druck vermindert wurde.

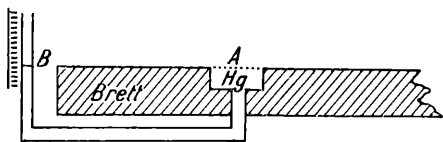


Fig. 1.

Ich mußte daher nach Aufschütten des Sandes das Quecksilber, das bei *B* gestiegen war, durch ein an die offene Glasröhre über *B* angeschaltetes Wassermanometer wieder nach dem Stande zurückdrücken, den es vor Aufschütten des Sandes eingenommen hatte. Dieser Manometerdruck stellt den Sanddruck dar, aber erst dann, wenn der Sandhaufen durch heftiges Klopfen auf das Brett oder Schütteln desselben allmählich wieder eine spannungslose Anordnung angenommen hat. Denn wenn das Quecksilber in *A* durch den aufgeschütteten Sand sich gesenkt hatte, dann brauchte man einen viel größeren Gegendruck, um dasselbe in seine ursprüngliche Lage wieder zu heben, als wenn man allmählich unter stetigem Klopfen auf das alte Niveau einstellte. Das Zurückdrücken des Sandes aus dem Napf unter großer Reibung am Rand erforderte offenbar viel mehr Kraft als die Kompensation des Druckes von ruhendem Sand.

Die angegebene Meßmethode hat den Nachteil, daß die Form und Höhe des Sandhügels sich während der Messung infolge des nötigen Klopfens und Schüttelns stets nicht wenig verändert. Dieser Mangel wäre nur zu vermeiden, wenn die Druckmessung ohne Bewegung des Sandes vor sich gehen könnte, was aber wohl kaum erreichbar ist.

Die Druckversuche zerfielen in zwei Teile. Einmal wurde der Druck in der Mitte von Sandrücken bei verschiedener Höhe derselben gemessen; diese Versuche sind ziemlich verlässlich, da jede Messung sich auf einen anderen Sandrücken bezieht. Zweitens wurde versucht, die Druckverteilung längs der Grundlinie des dreieckigen Querschnitts des Sandrückens zu messen, wozu mehrere Meßnäpfe nebeneinander verwendet wurden. Diese Messungen sind leider ganz unverlässlich, da an jeder Meßstelle die Druckhöhe im Manometer erst nach Klopfen und Schütteln festgestellt werden konnte, somit die Druckhöhenmessungen sich eigentlich nicht mehr auf den gleichen Sandrücken beziehen, da er sich infolge des Klopfens tortwährend veränderte.

Ich gebe zunächst die Resultate der ersten Messungen wieder.

Bodendruck in der Mitte von Sandrücken, ausgedrückt in Zentimeter Wasserhöhe.

Versuch	{	Höhe des Sandrückens..	4·0	7·0	10·0	13·0	15·0	<i>cm</i>
		Wasserdruck	..	5·0	9·5	13·5	15·0	16·5
Versuch	{	Höhe des Sandrückens..	3·9		8·0	10·5	12·8	15·0
		Wasserdruck	..	4·9	6·5	9·6	11·6	12·2
Versuch	{	Höhe des Sandrückens	3·9	6·8	10·5	14·7		
		Wasserdruck	..	4·3	6·3	11·0	13·0	
4. Versuch	{	Höhe des Sandrückens..	2·6	4·5	7·0	10·5		
		Wasserdruck	..	3·0	4·0	8·0	11·2	<i>cm</i>

Wenngleich die Versuche nicht genau übereinstimmen, ergibt sich doch aus ihnen das merkwürdige Resultat, daß der Sanddruck angenähert gleich oder nur etwas größer als der Druck einer dem Sandrücken an Höhe gleichen Wassersäule ist. Dabei ist das spezifische Gewicht des trockenen Sandes zu 1·5 bestimmt worden. Von dem Gewicht einer Sandsäule in der Mitte des Sandrückens geht also etwa ein Drittel durch Reibung an den äußeren angrenzenden Sandsäulen verloren.

Diese Differenz muß in einem erhöhten Druck der äußeren Sandsäulen zum Ausdruck kommen. Die Versuche, die Druckverteilung an der Basis zu messen, sind sehr unbefriedigend ausgefallen. Nach dem Aufschütten des Sandes war der Druck meist geringer, als nach der Sandhöhe zu erwarten war. Wurde der Sand dann geschüttelt, so stieg der Druck stark an. Um die gesenkte Quecksilberfläche auf ihren früheren Stand zurück zu pressen, brauchte es großen Überdruck, der dann beim Schütteln wieder verschwand. Im allgemeinen ergab sich, daß der nahe dem Rande der Böschung gemessene Druck größer war als der hydrostatische Sanddruck ρh . Doch traten oft starke Unregelmäßigkeiten auf. Beispielshalber sei ein Versuch angeführt, bei dem die Höhe des Rückens 16 *cm* betrug. An der Meßstelle, über welcher die Sandhöhe h war, betrug der Druck p Zentimeter Wasserhöhe:

$$\begin{array}{rcccc}
 h = & 10\cdot7 & 8\cdot2 & 5\cdot6 & 1 \text{ cm} \\
 p = & 13\cdot5 & 8\cdot0 & 8\cdot0 & 5\cdot0 \text{ cm.}
 \end{array}$$

Der Böschungswinkel des Sandrückens betrug 31°

Ich habe es nach vielen Versuchen aufgegeben, mit der angegebenen Methode zu einem einwandfreien Resultat zu kommen. Im folgenden sei nur festgehalten, daß die Druckabnahme von der Mitte der Basis zu ihrem Rande meist recht langsam erfolgte.

Das vorher angeführte Messungsergebnis über den Druck verschieden hoher Sandrücken in der Mitte ihrer Basis gab nun Anlaß, nach einer theoretischen Erklärung zu suchen. Ansätze über die Größe der Reibung, Aufstellungen möglichst einfacher Differentialgleichungen für die Druckgradienten in der vertikalen und horizontalen Richtung (in der Querschnittsebene des Sandrückens) ergaben keine brauchbaren Resultate. Denn es sollten stets zwei Bedingungen erfüllt werden.

1. mußte der Druck an der Oberfläche des Sandrückens null sein;

2. mußte der Gesamtdruck an der Basis dem Gewichte der ganzen Sandmasse gleich werden.

Nach vielen Versuchen kam ich, wenn nicht auf eine durch Differentialgleichungen begründete Theorie, so doch auf eine analytische Darstellung der Druckverteilung im Sandrücken, die den oben angegebenen beiden Bedingungen entpricht und in ganz auffallender Weise eine Übereinstimmung mit den Messungsergebnissen zeigt. Sie soll daher im folgenden mitgeteilt werden.

In Fig. 2 ist der Sandrücken ABC im Querschnitt dargestellt. Da nun die Druckzunahme nach abwärts im mittleren Teile des Rückens langsamer sein muß als in den seitlichen Teilen, so müssen die Flächen gleichen Druckes in der Mitte weiter auseinander liegen als an den Seiten. Es

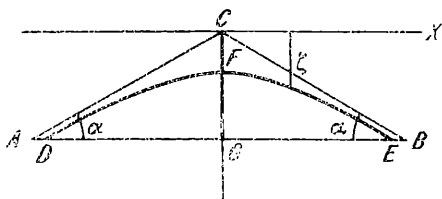


Fig.

war daher naheliegend, in den von den beiden Böschungsf lächen AC und BC gebildeten Winkel von 118° Hyperbeln hineinzulegen und zu prüfen, ob sie als Linien gleichen Druckes in Betracht kämen.

Wir wollen C als Anfangspunkt des Koordinatensystems ansehen und x nach rechts, nach abwärts positiv zählen (Fig. 2). Die Gleichung einer Hyperbel DFE mit den Asymptoten AC und BC ist dann $z^2 - a^2 x^2 = m^2$, wo $a = tg \alpha$ (α der Böschungswinkel) und m der Abstand CF ist.

Die Oberfläche des Sandrückens ist beim Aufschütten von der Dreiecksform ABC im Querschnitt. Wenn man die Unterlage schüttelt oder den Sand durch Klopfen zum Abrutschen bringt, dann rundet sich die Kante bei C ab und der Rücken bekommt angenähert die Gestalt einer Hyperbel DFE ; allerdings ist es noch fraglich, ob die Hyperbel nicht einem größeren Asymptotenwinkel entspricht als dem Winkel $\pi - 2\alpha$. Man kann auch das Dreieck selbst als Hyperbel auffassen; für dasselbe ist der Grenzfall $m = 0$

maßgebend. Nehmen wir allgemein an, die Oberfläche entspräche der Hyperbel $m = b$ (b eine später festzusetzende Konstante), dann ist eine sehr einfache Annahme über die Druckverteilung die folgende:

$$p = c (m - b).$$

Der Druck soll also proportional (c) der Differenz der beiden Parameter sein, welche eine beliebige im Innern des Sandrückens verlaufende Hyperbel und die Oberflächenhyperbel charakterisieren. Für jede Hyperbel mit bestimmtem Werte m hat der Druck eine bestimmte Größe. Die Hyperbeln sind Linien gleichen Druckes.

Durch Einsetzen von m aus der Hyperbelgleichung ergibt sich der Druck als Funktion des Ortes zu:

$$p = c [\sqrt{z^2 - a^2 x^2} - b].$$

Die Konstante c kann nun aus der Bedingung bestimmt werden, daß der Gesamtdruck des Sandrückens dem Gewichte desselben gleich sein muß. Bezeichnet ζ die z -Ordinate der Sandrückenoberfläche (wobei $\zeta^2 - a^2 \xi^2 = b^2$ die Gleichung der Oberflächenhyperbel), ρ das spezifische Gewicht des Sandes und z_1 den vertikalen Abstand der festen Unterlage, auf welche der zu berechnende Druck wirkt, vom Anfangspunkte C (also CG in Fig. 2), dann muß die Bedingung erfüllt werden:

$$\int_{-x_1}^{+x_1} p_{z_1} dx = \int_{-x_1}^{+x_1} \rho (z_1 - \zeta) dx.$$

Der Grenzwert $GE = x_1$ ergibt sich aus der Oberflächen-gleichung, wenn wir $\zeta = z_1$ setzen, zu $x_1 = \frac{\sqrt{z_1^2 - b^2}}{a}$.

Es ist also die folgende Integralgleichung zu erfüllen.

$$c \int_{-x_1}^{+x_1} \sqrt{z_1^2 - a^2 x^2} dx - c \cdot 2 b x_1 = 2 \rho z_1 x_1 - \rho \int_{-x_1}^{+x_1} \sqrt{a^2 x^2 + b^2} dx.$$

Die Integration gibt:

$$c \left[\frac{z_1^2}{a} \arcsin \frac{a x_1}{z_1} - b x_1 \right] = \rho \left[x_1 z_1 + \frac{b^2}{2 a} \lg \frac{z_1 + a x_1}{z_1 - a x_1} \right]$$

Eine Identität der rechten und linken Seite ist nur erreichbar, wenn wir $b = 0$ setzen; dies bedeutet, daß die Oberfläche des Sandrückens durch zwei ebene Böschungflächen (AC und BC in Fig. 2) dargestellt wird, nicht durch die Hyperbelfläche $D F E$. In

diesem Grenzfall ist $z_1 = a x_1$ und man erhält aus obiger Bedingungsgleichung, da

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad c = \frac{2\rho}{\pi}.$$

Somit erfüllt die Gleichung $p = \frac{2\rho}{\pi} \sqrt{z^2 - a^2 x^2}$ die oben angegebenen zwei Bedingungen und kann daraufhin geprüft werden, ob sie mit den Versuchsergebnissen stimmt.

Letzteres ist nun, soweit die ziemlich verlässlichen Druckmessungen in der Mitte der Grundfläche in Betracht kommen, in überraschender Weise der Fall. Für $x=0$ und $z=z_1$ wird $p_0 = \frac{2\rho}{\pi} z_1$. Der hydrostatische Sanddruck wäre ρz_1 , der eines

festen Körpers von der Dreiecksform $\frac{\rho z_1}{2}$ (wie oben erwähnt) und der des Sandes liegt dazwischen. Da π nahezu 3 ist und die Dichte des Sandes gegen Wasser 1.5 beträgt, so wird der Druck in Zentimetern Wasser durch z_1 selbst, also durch die Sandhöhe in Zentimetern ziemlich genau wiedergegeben. Dieses Ergebnis der Rechnung entspricht so deutlich den Versuchsergebnissen, daß damit ein ziemlich kräftiger Beweis für die Richtigkeit der Hypothese der Druckverteilung gegeben zu sein scheint. Bei genauerer Rechnung ergibt sich $p_0 = 0.955 z_1$.

In Fig. 3 ist durch vier Linien gleichen Druckes (Hyperbeln) die Druckverteilung dargestellt, die sich nach der obigen Formel in

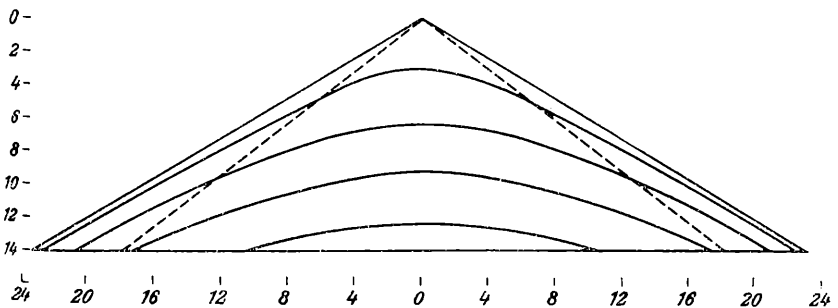


Fig. 3.

einem Sandrücken von 14 cm Höhe bei einem Böschungswinkel von 31° ergibt. Die Verteilung nach den Seiten zu stimmt qualitativ mit den Versuchsergebnissen; wie gesagt, waren letztere nicht ausreichend, um eine quantitative Prüfung zu ermöglichen.

seiner spezifisch leichteren Masse in die untere schwerere und plastische Masse der Erde hineinragen. Man hat bisher bei isostatischen Problemen den unteren Massendefekt als prismenförmig vorausgesetzt. Wenn man nun annimmt, daß die Masse unterhalb der Basis des Gebirges plastisch ist und einfach hydrostatischen Druck ausübt, dann läßt sich mit Benutzung der hier aufgestellten Formel für die Druckverteilung sehr leicht die Form des Massendefektes unter dem Gebirge bestimmen. Denn in einer gewissen Tiefe unterhalb der Erdoberfläche sollen die Drucke unter allen Vertikalsäulen ja nach der Theorie der Isostasie gleich sein.

Bezeichnen wir mit ρ_1 die Dichte der Gebirgsmasse, mit ρ_2 die der schwereren unteren Masse, auf der das Gebirge sozusagen schwimmt, ferner mit h die Tiefe, bis zu welcher sich die Masse

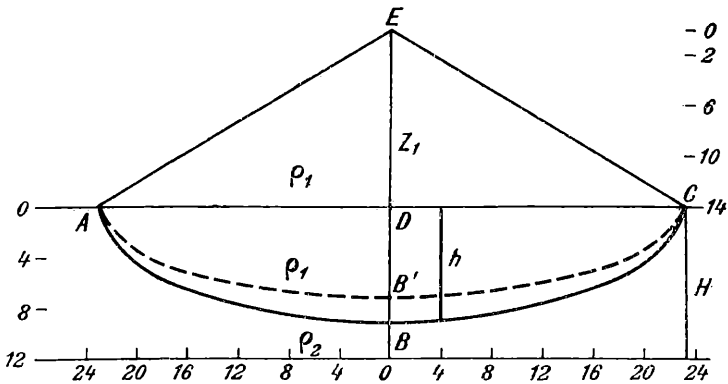


Fig. 4.

von der Dichte ρ_1 nach abwärts erstreckt, gerechnet vom Niveau der Ebene neben dem Gebirge, schließlich mit H die Tiefe einer Fläche, in welcher bereits Druckgleichheit herrscht, und mit p_1 den Druck im Niveau der Ebene unter dem Gebirge, dann ist (vgl. Fig. 4) der Druck in der Tiefe H gegeben durch $p_1 + \rho_1 h + \rho_2 (H - h) = \rho_2 H = \text{Konst.}$ Hieraus folgt $h = \frac{p_1}{\rho_2 - \rho_1}$ oder nach Einsetzen

des oben gefundenen Wertes von p im Vertikalabstand z_1 von der oberen Kante eines Rückens

$$h = \frac{2 \rho_1}{\pi (\rho_2 - \rho_1)} \sqrt{z_1^2 - a^2 x^2}$$

Wir wollen die Tiefe h des Kompensationskörpers unter dem Gebirge für den Fall berechnen, daß z. B. $\rho_2 = 2 \rho_1$, die Dichte der plastischen unteren Masse also doppelt so groß ist als die des Gebirges. Bei Benutzung des gleichen Böschungswinkels von 30° der oben (Fig. 3) angenommen wurde, ergibt sich für $z_1 = 14$ (früher) h folgendermaßen:

für $x = 0$	4	8	12	16	20	24
$h = 8.9$	8.8	8.3	7.6	6.5	4.6	0

Diese Werte wurden in Fig. 4 dargestellt und liefern den Kompensationskörper $ABCD$, während über der Ebene ADC sich der Gebirgsrücken $ADCE$ erhebt.

Natürlich hängt die Form des unteren Massendefektes sehr von der Annahme über $\rho_2 - \rho_1$ ab. Aber man erkennt aus der Zeichnung auf jeden Fall, daß der Kompensationskörper unter einem Bergrücken von dreieckigem Querschnitt sehr flach gewölbt ist, an den Seiten also verhältnismäßig recht tief hinabreicht. Wenn auch die früher erwähnte Annahme der Prismenform mit rechteckigem Querschnitt nur eine erste Annäherung ist, so ist sie doch eher zutreffend als etwa die Annahme einer dreieckigen Form mit der Spitze unterhalb der Mitte, weil der Druck an den Seiten verhältnismäßig groß ist.

Die Annahme, daß im Kompensationskörper, also unterhalb des Niveaus ADC , der Druck hydrostatisch ist, wird gewiß nicht genau zutreffen. Es ist aber mit den hier aufgestellten Formeln nicht möglich, die Druckverteilung für Sandmassen von der Form $ABCE$ zu berechnen. Aus diesem Grunde wurde nur für den über die Ebene hervorragenden Teil $ADCE$ die Sanddruckformel verwendet, für die darunterliegende aber der einfache hydrostatische Druck eingesetzt.

Wird die gleiche Rechnung für einen kegelförmigen Berg durchgeführt, so wird die Tiefe des Kompensationskörpers

$$h = \frac{\rho_1}{2(\rho_2 - \rho_1)} \sqrt{z_1^2 - a^2 r^2}$$
 Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Rücken ($\rho_2 = 2\rho_1$ und $a = 0.6$) ergibt sich für die Form dieses Körpers die gestrichelte Kurve $AB'C$ in Fig. 4.



Bildet man aus der Gleichung $p = \frac{2\rho}{\pi} \sqrt{z^2 - a^2 x^2}$ die Differenzialquotienten nach den beiden Richtungen, so ergibt sich,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4\rho^2 a^2}{\pi^2} \frac{x}{p}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{4\rho^2}{\pi^2} \frac{z}{p}.$$

Es ist verständlich, daß die Druckabnahme nach der Seite $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ um so geringer ist, je größer der Druck ist. Denn die Reibung im Innern des Sandes muß mit dem Druck zunehmen und sie wirkt in der Richtung eines Ausgleiches der Druckunterschiede. Auch ist es verständlich, daß die seitliche Druckabnahme bei gegebener Höhenlage z mit x , der Entfernung von der Mitte, zunimmt. Wenn wir uns dem Rand nähern, so wird der Druck dem hydrostatischen ähnlich.

Was die Druckzunahme nach abwärts $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ anlangt, so ist wieder die Reibung die Ursache, daß die Zunahme mit wachsendem Druck abnimmt. Daß $\frac{\partial p}{\partial z}$ mit zunehmendem p wächst, wäre bei Aufstellung einer derartigen Differentialgleichung kaum von vorneherein einzusehen gewesen.

Wir wollen noch feststellen, wo die Grenze ist zwischen jenem Teil der Sandmasse, der durch die anliegenden Massen gedrückt wird, und jenem, der durch sie getragen, also erleichtert wird. Diese Grenze liegt dort, wo $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$. Setzen wir diesen Wert in die Formel für $\frac{\partial p}{\partial z}$ ein, so erhalten wir für die Grenze zwischen jenen Massen die Gleichung einer geraden Linie

$$z' = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}} x' = 1.296 a x'.$$

Sie ist für $a = 0.6$ in Fig. 3 gestrichelt eingezeichnet. Die Massen, die rechts und links zwischen diesen Geraden und den Böschungslinien liegen, werden durch Reibung der angrenzenden Massen hinuntergedrückt, die anderen, zwischen den beiden gestrichelten Linien liegenden, werden durch sie erleichtert.

Wenn der Sandrücken etwas geschüttelt wird, so rundet sich die scharfe Kante oben ab und der Querschnitt sieht dann der in

Fig. 2 gezeichneten Hyperbel gleich. In diesem Fall erfüllt der Ansatz für die Druckverteilung schon nicht mehr die Bedingung der Gleichheit zwischen Gesamtdruck auf die Unterlage und Gewicht des Sandhaufens. Die gegebene Darstellung gilt also exakt nur im Fall der ebenen Böschungsflächen.

Haben wir es nicht mit einem Sandrücken, sondern einem Sandkegel zu tun, so läßt sich die oben benutzte Hypothese auf ihn gleichfalls anwenden. Wir nehmen an, der Druck sei auf jedem Hyperboloid, das durch Rotation der Hyperbel des Sandrückens entsteht, der gleiche. Allerdings ist der Böschungswinkel an Sandkegeln etwas geringer als an Sandrücken, so daß a etwas kleiner zu setzen wäre.

Wir haben also für den Druck in Sandkegeln $p = c_1 (m - b)$ zu setzen oder $p = c_1 [\sqrt{z^2 - a^2 r^2} - b]$, wo r der Abstand von der Kegelachse ist.

Für die Bedingung der Gleichheit des Gesamtdruckes mit dem Gewicht der Sandmasse findet sich analog zu der früheren Rechnung:

$$c \int_0^{r_1} (\sqrt{z_1^2 - a^2 r^2} - b) \cdot 2 r \pi dr = \rho \int_0^{r_1} (z_1 - \sqrt{b^2 + a^2 r^2}) \cdot 2 r \pi dr.$$

Die Integration gibt eine Bedingungsgleichung, die nur identisch erfüllt wird, wenn $b = 0$. Dann ist $c = \frac{\rho}{2}$ und der Druck

$$p = \frac{\rho}{2} \sqrt{z^2 - a^2 r^2}.$$

Ein vollkommen spitz zulaufender Kegel ist wohl keine Gleichgewichtsfigur. Es sollte also b nicht genau null sein. Die Rechnung gibt nur eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse

wieder. Unter der Spitze des Kegels wird der Druck $p = \frac{\rho z}{2}$.

Es wird also die Hälfte des Gewichtes der mittleren Sandsäule durch Reibung auf die äußeren Massen übertragen, der Ausgleich des Druckes ist hier noch größer als beim Sandrücken, was ja natürlich ist, da die mittlere Säule nach allen Seitenrichtungen hin durch Reibung entlastet wird.

Wenn man die Druckverteilung auf der Basis eines Sandrückens und Sandkegels kennt, kann man den Versuch machen, sie auf die Verhältnisse unter einem Gebirgszug, beziehungsweise einem einzelnen Berg anzuwenden. Ein Gebirge, das isostatisch gelagert ist, muß mit

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: [133_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Exner Felix Maria von

Artikel/Article: [Über den Druck von Sandhügeln. 295-303](#)