Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds.

Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre

Von

Karl Menger in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1924)

§ 1. Problemstellung.

Untersuchungen über den Begriff der Dimension[1] und des Zusammenhanges von Punktmengen führen auf folgendes Problem: Es sei jedem Punkt der Menge M eines separablen metrischen Raumes eine auf den betreffenden Punkt sich zusammenziehende Folge[2] offener Mengen (»Umgebungen« des Punktes) zugeordnet. Ist es möglich, aus den vorliegenden Umgebungen eine (eventuell endliche) Folge $\{U_n\}$ herauszugreifen, so daß M in der Vereinigung der U_n enthalten ist und daß die Durchmesser der U_n, wofern die Folge unendlich ist, gegen Null konvergieren?

Unser Problem weist eine gewisse Analogie mit jener Fragestellung auf, die dem bekannten Überdeckungssatz von Vitali[3] zugrunde liegt, und diese Analogie besteht, wie sich zeigen wird, auch zwischen den Lösungen der beiden Probleme — trotz ihrer Verschiedenheit im Detail. Während nämlich bei Vitali jedem Punkt einer Menge M eine auf den betreffenden Punkt sich zusammenziehende Folge abgeschlossener Mengen (die den Punkt übrigens gar nicht enthalten müssen) zugeordnet wird — ordnen wir jedem Punkt eine auf ihn sich zusammenziehende Folge offener Mengen zu; Vitali sucht durch eine Folge von zu je zweien fremden abgeschlossenen Mengen M bis auf eine Menge von Lebesgueschem Maße Null zu überdecken — wir wollen M durch eine Folge von Umgebungen mit gegen Null gehenden Durchmessern, die aber nicht zu je zweien fremd sein müssen, restlos überdecken.

Um aber insbesondere die Beziehungen unseres Problems zum verallgemeinerten Borelschen Theorem hervortreten zu lassen, sprechen wir dasselbe noch in folgender Form aus: Ist M eine separable Menge, S ein System von Umgebungen, so daß jeder Punkt von M in einer Umgebung von S enthalten ist, dann kann (so lehrt das verallgemeinerte Borelsche Theorem) aus S eine Folge

[1] Vgl. K. Menger, Über die Dimensionalität von Punktmengen, I. Teil, Monatshefte f. Math. u. Phys., XXXIII (1923), S. 148; II. Teil (vgl. insbes. § 2); ebenda XXXIV (1924), S. 137; Proc. Ac. Amst. XXVII (1924).

[2] Wir sagen (vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I., S. 68), eine Folge $\{U_n\}$ von Umgebungen des Punktes p zieht sich auf p zusammen, wenn in jeder Umgebung von p fast alle U_n liegen.

[3] Vgl. C. Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen, 1918, S. 299.

von Umgebungen herausgegriffen werden, die M überdeckt, d. h. in deren Vereinigung M enthalten ist. Wenn nun S ein derartiges System von Umgebungen ist, daß jeder Punkt von M in beliebig kleinen Umgebungen von S enthalten ist, ist es dann möglich (so lautet unser verallgemeinertes Problem), aus S eine M überdeckende Folge von Umgebungen herauszugreifen, die beliebig klein werden?

Um eine schleppende Ausdrucksweise zu vermeiden, führen wir zwei Hilfsbegriffe ein: Ist jedem Punkt der Menge M eine auf den betreffenden Punkt sich zusammenziehende Folge von Umgebungen zugeordnet, so nennen wir die Gesamtheit der vorliegenden Umgebungen ein Folgensystem der Menge M oder für die Menge M. Eine eventuell endliche Folge von Umgebungen, deren Durchmesser, wofern die Folge unendlich ist, gegen Null konvergieren, nennen wir eine Nullfolge von Umgebungen oder auch kurz eine Nullfolge.

In dieser Bezeichnungsweise lautet unser Problem:

Läßt sich aus jedem Folgensystem einer separablen Menge M eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen?

Man dürfte zunächst eine bejahende Antwort auf diese Frage erwarten.

§ 2. Allgemeine Sätze.

Sagen wir von einer Menge M, für die sich aus jedem Folgensystem eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, M »besitzt die Eigenschaft E« oder M »ist von der Eigenschaft E«, dann gilt vor allem:

Satz 1. *Die Mengen von der Eigenschaft E bilden ein σ-System, d. h. ist* $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge von Mengen der Eigenschaft E, dann besitzt auch* $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *die Eigenschaft E.*

Sei nämlich S ein beliebiges Folgensystem von M. Wir definieren für jedes bestimmte natürliche i ein Folgensystem S_i für M_i als Gesamtheit aller folgenden Mengen: Ist m Punkt von M_i, dann ordnen wir m jene Umgebungen zu, die m in S zugeordnet sind, bis auf die (höchstens endlich vielen) von diesen Umgebungen, deren Durchmesser $\geqq \frac{1}{i}$ sind. Da M_i die Eigenschaft E besitzt, kann für jedes i aus S_i eine M_i überdeckende Nullfolge $\{U_k^i\}$ $(k = i, 2, \ldots)$ von Umgebungen herausgegriffen werden. Die Umgebungen der Doppelfolge

$$\{U^i_k\} \begin{pmatrix} i = 1, 2, & \dots \\ k = 1, 2, & \dots \end{pmatrix},$$

nach abnehmenden Durchmessern als Folge geordnet, bilden offenbar eine aus S herausgegriffene M überdeckende Nullfolge. Also besitzt M die Eigenschaft E, wie Satz I behauptet.

Jede kompakte abgeschlossene Menge A besitzt offenbar die Eigenschaft E, da sich nach dem Borelschen Theorem aus jedem Folgensystem für A endlich viele A überdeckende Mengen herausgreifen lassen. Daher gilt:

Satz I *a. Die Vereinigung abzählbar vieler kompakter abgeschlossener Mengen, insbesondere also jeder kompakte* F_σ[1], *besitzt die Eigenschaft E.*

Satz II. *Besitzt die Menge M die Eigenschaft E, dann besitzt auch jede in M abgeschlossene Menge die Eigenschaft E.*

Sei A abgeschlossen in der Menge M, welche die Eigenschaft E besitzt. Nehmen wir an, A besitzt nicht die Eigenschaft E, so kommen wir zu einem Widerspruch. Es existiert dann nämlich ein Folgensystem S von A, aus dem sich keine A überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt. Wir ordnen nun jedem Punkt von $M—A$ irgend eine auf den betreffenden Punkt sich zusammenziehende Folge von Umgebungen zu, die wir bloß so wählen, daß keine von ihnen einen Punkt von A enthält. Wegen der Abgeschlossenheit von A in M ist die letzte Bedingung erfüllbar. S' sei die Gesamtheit der der Menge $M—A$ solcherart zugeordneten Umgebungen. Das System S'', das durch Vereinigung von S und S' entsteht, ist offenbar ein Folgensystem für M. Da jede aus S'' herausgegriffene Nullfolge A sicher nicht überdeckt, ist S'' ein Folgensystem für M, aus dem sich auch keine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt. Damit ist der angekündigte Widerspruch gegen die Voraussetzung, M besitze die Eigenschaft E, hergestellt und Satz II ist bewiesen.

Satz III. *Besitzt die Menge M die Eigenschaft E, dann besitzt auch jeder* F_σ *in M die Eigenschaft E.*

M' sei ein F_σ in M, also darstellbar in der Form

$$M' = \sum_{i=1}^{\infty} M_i,$$

wo die Mengen M_i in M abgeschlossen sind. Wenn M die Eigenschaft E besitzt, dann besitzt nach Satz II auch jede der Mengen M_i

[1] Wir nennen F_σ jede Menge, die Vereinigung (Summe) abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist, G_δ jede Menge, die Durchschnitt (Produkt) abzählbar vieler offener Mengen ist. Wir nennen F_σ in der Menge M, beziehungsweise G_δ in M den Durchschnitt von M mit einem F_σ, beziehungsweise G_δ.

die Eigenschaft E, nach Satz I auch die Summe aller M_i, das ist aber die Menge M'. Damit ist Satz III bewiesen.

Satz IV. *Wenn die Menge M die Eigenschaft E nicht besitzt, dann existiert eine M enthaltende Menge G_δ, welche die Eigenschaft E nicht besitzt.*

Sei M eine Menge, welche die Eigenschaft E nicht besitzt, für welche also ein Folgensystem S existiert, aus dem sich keine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt. Wir bilden aus S ein Folgensystem S' gemäß folgender Vorschrift: Ist m Punkt von M, so ordnen wir m als n-te Umgebung einer auf m sich zusammenziehenden Folge eine von den Umgebungen zu, die m vermöge S zugeordnet sind und deren Durchmesser $< \frac{1}{n}$ ist. Die Gesamtheit aller derartigen Umgebungen nennen wir S'. Nun vereinigen wir für jedes feste n alle n-ten Umgebungen, die irgendeinem Punkt von M zugeordnet sind. Für jedes n ist die Vereinigung dieser Umgebungen (deren Durchmesser sämtlich $< \frac{1}{n}$ sind) eine offene Menge; wir nennen sie 0_n. Setzen wir

$$\prod_{n=1}^{\infty} 0_n = M',$$

so ist S' ein Folgensystem für M' Denn jeder Punkt, der allen 0_n gemein ist, liegt in einer Folge von Umgebungen aus S', und die Folge zieht sich auf m zusammen, da die Durchmesser ihrer Umgebungen gegen Null konvergieren. Es ist $M < M'$ und jede Umgebung aus S' kommt in S vor. Ließe sich also aus S' eine M' überdeckende Nullfolge herausgreifen, so wäre damit zugleich eine M überdeckende Nullfolge aus S herausgegriffen, was nach Voraussetzung unmöglich sein soll. Berücksichtigen wir noch, daß M' laut Definition eine Menge G_δ ist, so ist Satz IV in allen Stücken bewiesen.

Wir sehen also: Wenn nicht alle Mengen die Eigenschaft E besitzen, dann muß es schon unter den einfachen Mengen G_δ solche geben, welche die Eigenschaft E nicht besitzen.

§ 3. Beispiele von Mengen ohne die Eigenschaft *E*.

Wir wollen nun tatsächlich Beispiele von Mengen G_δ angeben, welche die Eigenschaft E nicht besitzen. Wir legen als Raum den R_2 mit rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten (x, y) zugrunde und wählen für M die Menge aller Punkte des Einheitsquadrates E, deren beide Koordinaten dyadisch irrational sind.[1] Wir wollen nun jedem Punkt der Menge M, die bekanntlich ein G_δ ist, eine auf den betreffenden Punkt sich zusammenziehende Folge von Umgebungen zuordnen, derart, daß sich aus der Gesamtheit S dieser Umgebungen keine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt.

Wir tilgen zunächst[2] aus dem offenen Einheitsquadrat die Strecken

$$x = \frac{1}{2^{n_1}},\quad 0 < y < 1, (n_1 = 1, 2, \quad .).$$

Jedem Punkt m von M ordnen wir als erste Umgebung $U_1(m)$ einer auf m sich zusammenziehenden Umgebungsfolge jenes der abzählbar vielen offenen Rechtecke

$$\{R_{n_1}\}\ (n_1 = 1, 2, \quad .),$$

in welche E durch Tilgung dieser Strecken zerfällt, zu, in dem m enthalten ist. Nun tilgen wir überdies die Strecken

$$0 < x < 1,\quad y = \frac{1}{2^{n_2}},\quad (n_2 = 1, 2, \quad .).$$

Dadurch zerfällt E in eine Doppelfolge

$$\{R_{n_1 n_2}\}\ (n_1, n_2 = 1, 2, \quad .)$$

von Rechtecken und für jedes n_1 und n_2 ist $R_{n_1 n_2} < R_{n_1}$. Wir nennen $U_2(m)$ jenes Rechteck der Doppelfolge, welches m enthält. Es ist $U_2(m) < U_1(m)$. Beim dritten Schritt tilgen wir überdies die Strecken

$$x = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}},\ 0 < y < 1\ ,(n_1, n_2 = 1, 2,..)$$

und nennen $U_3(m)$ das m enthaltende Rechteck der so entstehenden dreifachen Folge $\{R_{n_1 n_2 n_3}\}$. Sodann tilgen wir die Strecken

$$0 < x < 1,\quad y = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}}\quad (n_1, n_2 = 1, 2, \ldots).$$

Allgemein werden beim $(2k-1)$-ten Schritt die Strecken

$$y = \frac{1}{2^{n_1}} + \quad + \frac{1}{2^{n_k}},\quad 0 < y < 1, (n_1, .\ . n_k = 1, 2, .\ .)$$

---

[1] Eine Zahl heißt dyadisch rational, wenn in reduzierter Gestalt ihr Nenner eine Potenz von 2 ist, ihre Entwicklung nach Potenzen von $1/2$ daher nach endlich vielen Schritten abbricht. Andernfalls heißt die Zahl dyadisch irrational.

[2] Die Zeichnung der einfachen Figur überlassen wir dem Leser.

beim $2k$-ten Schritt die Strecken

$$0 < x < 1, \ y = \frac{1}{2^{n_1}} + \quad + \frac{1}{2^{n_k}}, \quad (n_1, . \ . n_k = 1, 2, \quad)$$

getilgt. Auf diese Art wird jedem Punkt von M eine auf ihn sich zusammenziehende Folge von offenen Rechtecken zugeordnet. Für S wählen wir die Gesamtheit der so definierten Rechtecke

$$R_{n_1 n_2 . \ . n_k}, \text{ wo } n_1, n_2, . \ . n_k, k$$

unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen und stets gilt:

$$R_{n_1 n_2 . \ . n_k n_{k+1}} < R_{n_1 n_2 . \ . n_k}.$$

Greifen wir aus S irgend eine Rechtecksfolge heraus, so leuchtet ein, daß der Durchschnitt derselben, wofern er nicht leer ist, aus genau einem Punkt besteht; und dieser Punkt muß zu M gehören, denn jeder Punkt von E mit (mindestens) einer dyadisch rationalen Koordinate liegt bei irgend einem Schritt auf einer getilgten Strecke, kann also höchstens endlich vielen Umgebungen aus S angehören.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß S die geforderte Eigenschaft besitzt, die wir auch so aussprechen können: Ist $\{V_n\}$ $(n = 1, 2, . .)$ irgend eine aus S herausgegriffene Folge von Umgebungen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern, dann existiert ein Punkt von M, der durch die Folge nicht überdeckt wird, d. h. in keinem V_n enthalten ist. In der Tat, da die Durchmesser der V_n gegen Null konvergieren sollen, können unter den V_n höchstens endlich viele von den R_{n_1} $(n_1 = 1, 2, . .)$ vorkommen, denn deren Durchmesser sind durchwegs > 1. Sei $R_{n'_1}$, wo wir $n'_1 > 1$ annehmen können, eine unter den V_n nicht vorkommende Umgebung. Da die Durchmesser aller

$$R_{n'_1 n_2} \ (n_2 = 1, 2, \ .) \ > \frac{1}{2^{n'_1}}$$

sind, muß auch ein Rechteck $R_{n'_1 n'_2}$ $(n'_2 > 1)$ existieren, das unter den V_n nicht vorkommt. So weiterschließend, erhalten wir eine Folge von unter den V_n nicht vorkommenden Umgebungen $\{R_{n'_1 n'_2 \ . n'_k}\} = \{U'_k\}$, $(k = 1, 2, \ .)$ (alle $n'_k > 1$), aus S, deren Durchschnitt nicht leer ist. Da nämlich alle $n'_k > 1$ sind, ist für alle k $U'^0_{k+2} < U'_k$, wo U'^0 die abgeschlossene Hülle von U' bedeutet. Der Durchschnitt der Folge ineinandergeschachtelter abgeschlossener Mengen $\{U'^0_{2k}\}$ $(k = 1, 2, \ .)$ ist nicht leer, dasselbe gilt also vom Durchschnitt der U'_k. Der Durchschnitt der U'_k ist also ein Punkt von M, der in keinem V_n enthalten ist, und die Folge der V_n überdeckt mithin M nicht zur Gänze. Dies war zu beweisen. —

Daß es nicht die »Langgestrecktheit« der in unserem Beispiel verwendeten Umgebungen ist, welche das Herausgreifen einer M

überdeckenden Nullfolge unmöglich macht, zeigt folgende leichte Modifikation des Beispiels: Wir ordnen jedem Punkt derselben Menge M der dyadisch irrationalen Punkte des Einheitsquadrates E eine gewisse auf den betreffenden Punkt sich zusammenziehende Folge von (allerdings nicht konzentrischen) Quadraten zu — und dennoch wird das entstehende Folgensystem keine M überdeckende Nullfolge enthalten.

Ist J ein Quadrat, dessen Eckpunkte die Koordination haben: (a_1, a_2), (a_1+b, a_2), (a_1, a_2+b), (a_1+b, a_2+b) oder, wie wir dies kurz ausdrücken wollen, ist $J = (a_1, a_2; a_1+b, a_2+b)$, dann setzen wir:

$$J_n J = (a_1, a_2; a_1 + \frac{2^n-1}{2^n} b, a_2 + \frac{2^n-1}{2^n} b), (n = 1, 2. \;)$$

$$T_1 J = J_1 J, \quad T_n J = J_n J - J_{n-1} J, (n = 2, 3, . \; .).$$

Sei nun m ein bestimmter Punkt von M. Als erstes Quadrat einer auf m sich zusammenziehenden Folge von Quadraten wählen wir $J_{n_1} E$, wenn m in T_{n_1} liegt. $T_{n_1} E$ zerfällt in $2^{n+1}-3$ Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{2^{n_1}}$ E_2 sei dasjenige von diesen Quadraten, das den Punkt m enthält. Dann ordnen wir m als zweites Quadrat $J_{n_2} E_2$ zu, wenn m in $T_{n_2} E_2$ liegt. T_{n_2} zerfällt wieder in kleinere Quadrate; in einem derselben, etwa in E_3, ist m enthalten. Wir ordnen dann m als drittes Quadrat $J_{n_3} E_3$ zu, wenn m in $T_{n_3} E_3$ liegt, usf. Derselbe Schluß wie beim ersten Beispiel zeigt, daß sich aus der Gesamtheit der so definierten Umgebungen keine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt. —

Wenn wir die y-Koordinate der Punkte des letzten Beispiels nicht beachten und mit Intervallen $(a, a+b)$ statt mit Quadraten $(a_1, a_2; a_1+b, a_2+b)$ operieren, so haben wir im R_1 für die Menge der dyadisch irrationalen Punkte der Einheitsstrecke ein Folgensystem, aus dem sich keine die Menge überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt.

Die angeführten Beispiele zeigen: *Es existieren Mengen G_δ, welche die Eigenschaft E nicht besitzen.* Wenn man ferner das Komplement einer Menge M zu ihrer abgeschlossenen Hülle $M^0 - M$ mit M' bezeichnet, so sieht man zugleich: *Für M und M' können hinsichtlich der Eigenschaft E alle drei a priori möglichen Fälle wirklich eintreten.*

1. Wenn die kompakte Menge M zugleich F_σ und G_δ ist, dann gilt dasselbe von M' und nach Satz I*a* besitzt sowohl M als auch M' die Eigenschaft E.

2. Die Menge M der dyadisch rationalen Punkte der Einheitsstrecke des R_1 ist abzählbar, besitzt also die Eigenschaft E, M' besitzt, wie wir gesehen haben, die Eigenschaft E nicht.

3. Im Einheitsquadrat des R_2 nennen wir M die Menge aller Punkte mit dyadisch rationaler Abszisse und dyadisch irrationaler Ordinate; M' ist dann die Menge aller Punkte, die entweder eine dyadisch irrationale Abszisse oder zwei dyadisch rationale Koordinaten haben. In M ist abgeschlossen die Menge M_1 aller Punkte mit der Abszisse 0 und irrationaler Ordinate. In M' ist abgeschlossen die Menge M'_1 aller Punkte, welche die (dyadisch irrationale) Ordinate 1 und eine dyadisch irrationale Abszisse haben. M_1 und M'_1 besitzen, als Mengen eines R_1 aufgefaßt, die Eigenschaft E nicht, wie wir durch Angabe eines speziellen Folgensystems S gezeigt haben. Sind die Mengen in einen R_2 eingebettet, so bilden wir für sie ein Folgensystem S', das an Stelle jedes Intervalles von S ein Quadrat von der Seitenlänge des Intervalles enthält. Auch aus S' läßt sich keine die Mengen überdeckende Nullfolge herausgreifen, also besitzen M_1 und M'_1 auch als Mengen des R_2 die Eigenschaft E nicht; daher besitzt nach Satz II weder M noch M' die Eigenschaft E.

Schließlich sei erwähnt, daß die Mengen, welche die Eigenschaft E nicht besitzen, weder ein σ-, noch ein δ-System bilden, d. h. Summe und Produkt einer Folge von Mengen, welche die Eigenschaft E nicht besitzen, kann unter Umständen die Eigenschaft E besitzen.

Da für manche Mengen, wie wir gesehen haben, Folgensysteme existieren, aus denen sich keine die betreffende Menge überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, so erheben sich an Stelle des im § 1 formulierten Problems die beiden folgenden Fragen:

Problem I. *Sei M eine beliebige Menge, S ein Folgensystem für M. Welche Eigenschaften von S gewährleisten uns, daß sich aus S eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt?*

Problem II. *Welche Mengen besitzen die Eigenschaft E, d. h. welche Eigenschaften von M gewährleisten uns, daß sich aus jedem Folgensystem für M eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt?*

§ 4. Über Folgensysteme, aus denen sich überdeckende Nullfolgen herausgreifen lassen.

Wir verschärfen zunächst das eben formulierte Problem I. Es ist klar, daß sich aus einem Folgensystem S für eine Menge M beispielsweise dann eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, wenn S eine oder endlich viele große Umgebungen enthält, die schon für sich allein M überdecken. Für Anwendungen sind aber derartige Überdeckungen bisweilen unbrauchbar, beispielsweise dann, wenn es sich darum handelt, M mit einer aus S herausgegriffenen Nullfolge zu überdecken, deren sämtliche Umgebungen innerhalb einer gewissen Umgebung von M liegen. Um eine schleppende Ausdrucksweise zu vermeiden, bezeichnen wir als ein zu S gehöriges reduziertes System jedes Folgensystem, welches so entsteht: Für jeden Punkt m von M werden von der ihm zugeordneten Umgebungsfolge höchstens endlich viele Umgebungen aus S getilgt. Nunmehr formulieren wir die Verschärfung von Problem I.

Problem I'. *Sei M eine beliebige Menge, S ein Folgensystem von M. Welche Eigenschaften von S gewährleisten uns, daß aus jedem zu S gehörigen reduzierten System eine M überdeckende Nullfolge herausgegriffen werden kann?*

Zur Behandlung dieses Problems führen wir einige Hilfsbegriffe ein, die auch an sich vielleicht von einigem Interesse sind. Zugrunde liegt ein metrischer Raum. Sei 0 eine offene Menge, die den Punkt m enthält. Wir nennen den Durchmeser der größten Kugel um m, die in 0 enthalten ist, den inneren Durchmesser von 0 bezüglich m und bezeichnen diese Zahl mit $d\,(m, 0)$. Entsprechend kann man den Durchmesser der kleinsten Kugel um m, in der 0 enthalten ist, als äußeren Durchmesser von 0 bezüglich m und mit $D(m, 0)$ bezeichnen. Den Durchmesser von 0 bezeichnen wir mit $\delta\,(0)$. Offenbar gilt für jede Menge 0 und für jeden Punkt m von 0: $d\,(m, 0) \leq \delta\,(0) \leq D\,(m, 0)$. Ist $\{m_n\}$ $(n = 1, 2, . .)$ irgend eine Punktfolge und ist m_n die Umgebung 0_n zugeordnet, dann folgt aus $\lim \delta\,(0_n) = 0$ stets $\lim d\,(m_n, 0_n) = 0$; dagegen folgt aus $\lim d(m_n, 0_n) = 0$ nicht notwendig $\lim\, \delta\,(0_n) = 0$.

Satz V. *Jedem Punkt m der kompakten Menge M sei eine Umgebung $U(m)$ zugeordnet und es existiere eine Zahl $d > 0$, so daß für alle m von M $d < d\,[m, U(m)]$. Dann lassen sich endlich viele unter den vorliegenden Umgebungen herausgreifen, in deren Vereinigung M enthalten ist.*

Für jeden Punkt m von M ist $U(m; d) < U(m)$; daher ist auch jeder Punkt der kompakten abgeschlossenen Menge M^0 in mindestens einer der vorliegenden Umgebungen enthalten. Nach dem Borelschen Theorem lassen sich endlich viele $U(m)$ herausgreifen, in deren Vereinigung M^0, also auch M enthalten ist. Damit ist Satz V bewiesen.

Satz VI. *Ist jedem Punkt der kompakten Menge M eine Umgebung $U(m)$ zugeordnet, so läßt sich eine Punktfolge $\{m_n\}$ aus M herausgreifen, so daß $M < \sum_{n=1}^{\infty} U(m_n)$ und, falls die Folge der m_n unendlich ist, $\lim d\,[m_n, U(m_n)] = 0$ gilt.*

Wir nennen M_1 die Menge aller Punkte von M, für die $1 < d\,[m, U(m)]$; M_n die Menge aller Punkte von M, für die

$$\frac{1}{n} < d\,[(m, U(m)] < \frac{1}{n-1}, \quad (n=2, 3, \ldots)$$

gilt. Für jedes n ist nach Satz V M_n in der Vereinigung endlich vieler Umgebungen enthalten, deren Durchmesser $< \frac{1}{n-1}$ sind. Sie mögen für festes n etwa den Punkten m_1^n, m_2^n, $\ldots m_{k_n}^n$ entsprechen.

Die Punkte $m_i^n \begin{pmatrix} i = 1, 2, & k_n \\ n = 1, 2, & \text{ad inf.} \end{pmatrix}$ in eine Folge geordnet, erfüllen die Forderungen von Satz VI.[1]

Satz VII. *Es sei jedem Punkt der kompakten Menge M eine Umgebung $U(m)$ zugeordnet derart, daß für jede Punktfolge $\{m_k\}$ aus M mit $\lim d\,[m_k, U(m_k)] = 0$ auch $\lim \delta\, U(m_k) = 0$ gilt. Dann läßt sich eine Folge $\{U_k\}$ aus den vorliegenden Umgebungen herausgreifen, so daß*

$$1.\ M < \sum_{k=1}^{\infty} U_k,$$

$$2.\ \lim\ (U_k) = 0.$$

Nach Satz VI existiert eine Punktfolge $\{m_k\}$, so daß $M < \sum_{k=1}^{\infty} U(m_k)$ und $\lim d\,[m_k, U(m_k)] = 0$. Nach Voraussetzung ist für diese Folge auch $\lim \delta\, U(m_k) = 0$, womit Satz VII bewiesen ist.

---

[1] Satz VI ermöglicht uns, aus den vorliegenden Umgebungen eine Folge herauszugreifen, für welche die inneren Durchmesser relativ zu den Punkten, denen die betreffenden Umgebungen zugeordnet sind, gegen Null konvergieren. Es wäre wünschenswert, eine Folge von Umgebungen herausgreifen zu können, für die eine absolute Umgebungsfunktion gegen Null konvergiert, d. h. eine Funktion, die nur von den Umgebungen abhängt, nicht auch von dem Verhältnis der Umgebung zu dem Punkt, dem sie zugeordnet ist. Man könnte nun für jede offene Menge O als (absoluten) inneren Durchmesser den Durchmesser der größten Kugel, die in O enthalten ist, bezeichnen. Das Analogon von Satz VI wäre aber dann im allgemeinen falsch, d. h. es kann eintreten, daß jedem Punkt einer kompakten Menge M eine Umgebung zugeordnet ist, und sich dennoch keine M überdeckende Folge von Umgebungen mit gegen Null konvergierenden (absoluten) inneren Durchmessern herausgreifen läßt. Beispiel im R_2 M sei die Menge der Punkte $\{m_n\}$ mit den Abszissen $\frac{1}{\ }$ auf der Abszissenachse ($n = 1, 2, \ldots$ Wir ordnen dem Punkt m_n den Kreis Durchmesser $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ um den Mittelpunkt auf der Abszissenachse mit der Abszisse $\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+2}}$

Auf Grund von Satz VII können wir nun eine sehr allgemeine Lösung des Problems I′ angeben:

Satz VIII. Voraussetzungen: *Sei M irgend eine vorgelegte kompakte Menge. Jedem Punkt m von M sei eine auf m sich zusammenziehende Folge von Umgebungen zugeordnet. Die inneren Durchmesser der Umgebungen dieser Folge in bezug auf m, beziehungsweise die Durchmesser der Umgebungen dieser Folge bezeichnen wir mit $d_n(m)$, beziehungsweise mit $\delta_n(m)$. Die Gesamtheit der vorliegenden Umgebungen bildet ein Folgensystem für M, das wir mit S bezeichnen.* **Behauptung:** *Hinreichend dafür, daß aus jedem zu S gehörigen reduzierten System eine M überdeckende Nullfolge herausgegriffen werden kann, ist folgende Bedingung (B): Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine im Intervall $[0, \varepsilon]$ stetige reelle Funktion $f(x)$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$, so daß gilt:*

$$\left.\begin{array}{ll} (\dagger) & \delta_n(m) < \varepsilon \\ (\dagger\dagger) & d_n(m) \geqq f[\delta_n(m)] \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{für jedes } m \textit{ und bei festem } m \\ \textit{für fast alle } n. \end{array}$$

Sei die Bedingung (B) erfüllt. S' sei ein beliebig vorgelegtes zu S gehöriges reduziertes System. Wir haben zum Beweise von Satz VIII eine M überdeckende Nullfolge aus S' herauszugreifen. Wir ordnen zu diesem Zwecke jedem bestimmten Punkt m von M eine der Umgebungen seiner Umgebungsfolge in S' zu, welche den Bedingungen $(\dagger)$ und $(\dagger\dagger)$ genügt, etwa die Umgebung mit kleinstem Index, welche diese beiden Bedingungen erfüllt. Wir nennen die dem Punkt m derart zugeordnete Umgebung $U(m)$. Sei nun $\{m_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ irgend eine Punktfolge aus M derart, daß $\lim d[m_k, U(m_k)] = 0$. Wegen $(\dagger\dagger)$ ist für diese Punktfolge auch $\lim f[\delta\, U(m_k)] = 0$. Da $f(x)$ stetig und für $x \neq 0$ positiv ist, folgt hieraus $\lim \delta\, U(m_k) = 0$. Wir können also auf die Umgebungen $U(m)$ Satz VII anwenden, welcher lehrt, daß aus den $U(m)$, also aus S', eine M überdeckende Nullfolge herausgegriffen werden kann. Damit ist Satz VIII bewiesen.

Die Bedingung (B) von Satz VIII ist in ihrer Allgemeinheit schwer zu handhaben. Wir wollen sie zunächst *geometrisch interpretieren.* Wir deuten jede Umgebung von S als Punkt eines R_2 mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten. Ist die Umgebung O dem Punkt m zugeordnet, so betrachten wir $\delta(O)$ als Abszisse, $d(m, O)$ als Ordinate des Bildpunktes von O. Ist O mehreren Punkten zugeordnet, so kann O mehrere Bildpunkte besitzen, wie auch umgekehrt verschiedene Umgebungen, die verschiedenen Punkten zugeordnet sind, denselben Bildpunkt besitzen können. Sei m ein bestimmter Punkt von M. Verbinden wir die Bildpunkte, welche den Umgebungen der dem Punkt m zugeordneten Folge entsprechen, durch

Strecken, die vom Bildpunkt der n-ten Umgebung zu jenem der $(n+1)$-ten führen, so erhalten wir einen Streckenzug, der sich immer mehr dem Nullpunkt nähert, — wir nennen ihn den Streckenzug m. Die Bedingung (B) von Satz VIII besagt nun: Es existiert eine im Nullpunkt endende Kurve K [das Bild der Funktion $f(x)$], die sonst beständig oberhalb der Abszissenachse verbleibt und folgende Eigenschaft hat: Für jedes m liegt ein Endstück des Streckenzuges m und liegen mithin fast alle Eckpunkte des Streckenzuges m oberhalb K.

Entwerfen wir in der angegebenen Art ein Bild für eines der Folgensysteme, von denen wir in § 3 gesehen haben, daß sich aus ihnen für gewisse Mengen keine dieselben überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, — so überzeugen wir uns leicht davon, daß eine Kurve K in der angegebenen Bedeutung in diesen Fällen nicht existieren kann. In diesen Fällen liegen vielmehr für jede Kurve, die abgesehen vom Nullpunkt beständig oberhalb der Abszissenachse verläuft, die Endstücke vieler Streckenzüge m unterhalb der Kurve.

Wir können nun Satz VIII zunächst noch leicht verallgemeinern.

Satz VIII *a. Hinreichend dafür, daß sich aus jedem reduzierten System, das zu einem Folgensystem S für die kompakte Menge M gehört, eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, ist, daß in der Bedingung (B) von Satz VIII die Beziehungen (†) und (††) für alle Punkte von M abgesehen von den Punkten einer Teilmenge mit der Eigenschaft E und bei festem m für fast alle n gelten.*

In der Tat, die Teilmenge M' von M mit der Eigenschaft E können wir sicher mit einer aus S herausgegriffenen Nullfolge überdecken, auf $M—M'$ können wir Satz VIII anwenden und die beiden Nullfolgen in eine zusammenlegen. Damit ist Satz VIII a bewiesen.

Eine mit Rücksicht auf euklidische Räume wichtige Verallgemeinerung der Sätze VIII und VIII a bezieht sich auf den Fall, daß M Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen, oder wie wir dies kurz ausdrücken wollen, daß M halbkompakt ist. Halbkompakt sind beispielsweise alle Mengen euklidischer Räume.

Satz VIII *b. Sei M halbkompakt, also $= \sum_{k=1}^{\infty} M_k$, wo die Mengen M_k kompakt sind. S sei ein Folgensystem für M. Hinreichend dafür, daß sich aus jedem zu S gehörigen reduzierten System eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, ist, daß für jedes k folgende Bedingung (B_k) erfüllt ist: Es existiert ein $\varepsilon_k > 0$ und eine im Intervall $[0, \varepsilon_k]$*

stetige reelle abgesehen vom Nullpunkt positive Funktion $f_k(x)$, *so daß die Ungleichungen* (†) *und* (††) *von Satz VIII hinsichtlich* ε_k *und* $f_k(x)$ *für jeden Punkt* m *von* M_k *abgesehen von einer Teilmenge der Eigenschaft E und bei festem* m *für fast alle* n *gelten. Hinreichend dafür, daß sich aus jedem zu* S *gehörigen reduzierten System eine* M *überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, ist insbesondere, daß die halbkompakte Menge* M *die Bedingung (B) von Satz VIIIa erfüllt.*

Genügt zunächst für jedes k die kompakte Menge M_k der Bedingung (B_k), so ist Satz VIII anwendbar. Sei $\bar{S}$ ein zu S gehöriges reduziertes System. Die Gesamtheit der den Punkten von M_k vermöge $\bar{S}$ zugeordneten Umgebungen bildet ein Folgensystem für M_k, das wir mit $\bar{S}_k$ bezeichnen. Wir bilden ein zu $\bar{S}_k$ gehöriges reduziertes System S_k, indem wir für jeden Punkt von M_k die (höchstens endlich vielen) der dem Punkt vermöge $\bar{S}_k$ zugeordneten Umgebungen, deren Durchmesser $\geqq \frac{1}{k}$ sind, aus $\bar{S}_k$ tilgen. Dann können wir aus S_k eine M_k überdeckende Nullfolge von Umgebungen herausgreifen, deren sämtliche Durchmesser $< \frac{1}{k}$ sind. Lassen wir k die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir eine Folge von Nullfolgen, die wir offenbar in eine ganz M überdeckende Nullfolge zusammenlegen können. Damit ist der erste Teil der Behauptung von Satz VIII b bewiesen. Genügt die halbkompakte Menge M einer einheitlichen Bedingung (B), wie die kompakte Menge M von Satz VIIIa, dann existiert also eine Zahl > 0 und eine Funktion $f(x)$ für ganz $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$. Dann können wir für jedes k in der Bedingung (B_k) $\varepsilon_k = \varepsilon$ und $f_k(x) = f(x)$ setzen und aus der eben bewiesenen ersten Hälfte von Satz VIII b ergibt sich die zweite.

Wir wenden uns nun einigen wichtigen Spezialfällen der Sätze VIII zu. Es sei zunächst $f(x) = c . x$, wo c eine positive Konstante bedeutet. Jedem Punkt m von M ist dann eine Folge von Umgebungen zugeordnet, für die (eventuell nach Tilgung endlich vieler Anfangsglieder) durchwegs gilt:

$$\frac{d\,(m,\, U_n(m))}{\delta\, U_n(m)} \geqq c > 0,$$

wo c von m und n unabhängig ist. Wir sagen in diesem Fall, daß die den Punkten von M vermöge S zugeordneten Umgebungsfolgen sich gleichmäßig regulär (gleichmäßig in bezug auf M) zusammenziehen. Aus Satz VIII ergibt sich dann:

Satz IX *a. Wenn sich die den Punkten der halbkompakten Menge M vermöge des Folgensystems S zugeordneten Umgebungsfolgen gleichmäßig regulär auf die Punkte zusammenziehen, dann läßt sich aus jedem zu S gehörigen reduzierten System eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen.*

Insbesondere ist dies also immer möglich, wenn den Punkten von M konzentrische Kugeln zugeordnet sind, in welchem Falle c seinen Maximalwert 1 annimmt. Wir zeigen nun, daß die Voraussetzung der Gleichmäßigkeit für die Regularität des Sichzusammenziehens entbehrlich ist.

Satz IX *b. Wenn für eine halbkompakte Menge M abgesehen von einer Teilmenge M' mit der Eigenschaft* **E** *die den Punkten vermöge eines Folgensystems S zugeordneten Umgebungsfolgen sich regulär auf die Punkte zusammenziehen, d. h. wenn für jeden Punkt m von M—M' eine nur von m abhängige („Regularitäts“-)Konstante $c(m) > 0$ existiert, so daß für fast alle n* $\dfrac{d(m, U_n(\boldsymbol{m}))}{\delta U_n(m)} \geqq c(m)$ *gilt, — dann läßt sich aus jedem zu S gehörigen reduzierten System eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen.*

Erster Beweis: Sei S' ein vorgelegtes zu S gehöriges reduziertes System. Wir überdecken M' mit einer aus S' herausgegriffenen Nullfolge. Sodann fassen wir alle Punkte von $M-M'$, für die $\dfrac{1}{n+1} \leq c(m) \leq \dfrac{1}{n}$ ist, zu einer Menge M_n zusammen $(n = 1, 2 \ldots)$. Wegen $d(m, 0) \leq \delta(0)$ ist ja stets $c(m) \leq 1$. Für ein bestimmtes n bilden wir nun ein zu S' gehöriges reduziertes System S'_n, indem wir alle Umgebungen aus S' tilgen, deren Durchmesser $> \dfrac{1}{n+1}$ sind. Nach Satz IX *a* kann aus S'_n eine M_n überdeckende Nullfolge herausgegriffen werden. Tun wir das für jedes n und ordnen die vorliegende Doppelfolge von Umgebungen, so wie beim Beweis von Satz I, nach abnehmenden Durchmessern in eine einfache Folge, dann haben wir eine M überdeckende Nullfolge aus S' herausgegriffen. Damit ist Satz IX *b* bewiesen.

Zweiter Beweis: Satz IX *b* geht aus Satz VIII unmittelbar hervor, wenn wir $f(x) = x^2$ setzen. Am deutlichsten wird dies in der geometrischen Interpretation. Die Existenz einer Regularitätskonstante $c(m)$ in einem Punkt $\boldsymbol{m}$ drückt sich hier dadurch aus, daß der Streckenzug m von einem gewissen Eckpunkt an oberhalb der Geraden $y = c(m).x$ verläuft. Von jedem Linienzug m liegen also fast alle Eckpunkte oberhalb der Kurve $y = x^2$. Damit ist Satz IX b bewiesen.

Weitere Spezialfälle ergeben sich, wenn man für $f(x)$ höhere Potenzen von x usw. einsetzt.

Der Quotient $\frac{d\,(m, O)}{\delta\,(O)}$ kann als Maß für die Exzentrizität der offenen Menge O hinsichtlich des Punktes m aufgefaßt werden. Die Existenz einer Regularitätskonstante > 0 für die einem Punkt m zugeordnete Umgebungsfolge bedeutet also, daß fast alle Umgebungen der Folge eine gewisse Exzentrizität nicht übersteigen. In unserem geometrischen Bild drückt sich das dadurch aus, daß die Differenzenquotienten des Streckenzuges m im Nullpunkt oberhalb einer endlichen Schranke bleiben. Aber auch, wenn sich die Streckenzüge m die Abszissenachse tangierend dem Nullpunkt nähern, läßt sich aus S eine M überdeckende Nullfolge herausheben, wofern nur eine noch flachere Kurve existiert, die von allen Streckenzügen m fast alle Eckpunkte oberhalb von sich läßt. Es kann z. B. der Fall eintreten, daß alle Bildpunkte von Umgebungen im Winkelraum einer Kurve K' liegen, die im Nullpunkt eine Schnabelspitze mit horizontaler Schnabeltangente besitzt. In diesem Fall zieht sich die Umgebungsfolge keines Punktes regulär zusammen, dennoch läßt sich Satz VIII anwenden, indem wir den unteren Ast von K' als K, d. h. als Bild von $f(x)$ wählen.

In unseren letzten Resultaten tritt die erwähnte Analogie mit dem Vitalischen Überdeckungssatz zutage. Auch bei dem letzteren ist eine Annahme über eine Regularität der Konvergenz der Mengenfolgen unentbehrlich, wobei allerdings, dem Wesen des Vitalischen Satzes entsprechend, der Lebesguesche Inhaltsbegriff in die Definiton der Regularität eingeht, während wir nur die Raummetrik verwenden. Vitali legt einen euklidischen Raum zugrunde und verlangt bekanntlich für jeden Punkt m der zu überdeckenden Menge folgendes: Sind $\{A_n(m)\}$ die dem Punkt m zugeordneten abgeschlossenen Mengen, so soll eine auf m sich zusammenziehende Würfelfolge $\{W_n(m)\}$ existieren, so daß für alle n $A_n(m) < W_n(m)$ und daß $\frac{\mu\,(A_n(m))}{\mu\,(W_n(m))} > c\,(m) > 0$ ist, wo $\mu\,(A)$ den Lebesgueschen Inhalt von A bezeichnet und $c\,(m)$ eine nur von m abhängige positive Zahl bedeutet. Dies dürfte aber auch die allgemeinste Form sein, in welcher der Vitalische Satz bisher bewiesen wurde.[1] Nun ist klar, daß er in dieser Form bloß unserem Satz IX b entspricht. Man könnte untersuchen, ob vielleicht auch für den Vitalischen

[1] Eine von Carathéodory (Vorl. über reelle Funktionen, 1914, S. 304) ins Auge gefaßte Möglichkeit, den Vitalischen Satz zu verallgemeinern, ist nach den Untersuchungen von Banach (Fund. Math. V; S. 130) auszuschließen.

Satz Voraussetzungen analog jenen des Satzes VIII hinreichen. Keinesfalls ist freilich der Beweis von Satz VIII übertragbar, da schon das Analogon von Satz V für das Vitalische Problem falsch ist. Es ist diesbezüglich noch zu bemerken, daß die Mengen mit der Eigenschaft E bei unserem Problem in mehrfacher Hinsicht den Mengen vom Lebesgueschen Inhalt Null beim Vitalischen Problem entsprechen.

Es sei schließlich noch ein Umstand erwähnt, durch dessen Berücksichtigung die Untersuchungen über unsere Überdeckungsprobleme teils kompliziert, teils vereinfacht werden. Ein Folgensystem für eine Menge M enthält zu jedem bestimmten Punkt m von M eine bestimmte auf m sich zusammenziehende Umgebungsfolge, die m zugeordnet ist. Außerdem kann aber m auch in Umgebungen enthalten sein, die anderen Punkten zugeordnet sind. Durch ein Folgensystem wird daher jedem Punkt von M eine Menge von Umgebungen des Punktes zugeordnet. Es kann nun der Fall eintreten, daß die dem Punkt m unmittelbar zugeordnete Umgebungsfolge sich nicht regulär auf m zusammenzieht, während aus der m zugeordneten Umgebungsmenge eine solche Folge herausgegriffen werden kann.

§ 5. Anwendungen auf den Begriff der zusammenhangslosen Mengen.

Die Überdeckungstheoreme, mit denen wir uns im Vorangehenden befaßt haben, handeln von Mengen, deren Punkten Folgen offener Mengen zugeordnet sind. Die Anwendbarkeit dieser Sätze beruht auf der (allerdings wenig beachteten) Tatsache, daß wichtige Struktureigenschaften der Mengen in ihrem Verhalten zu gewissen den einzelnen Punkten zugeordneten Umgebungsfolgen ihren Ausdruck finden. Zu diesen Eigenschaften gehört insbesondere die Dimension von Punktmengen. Wir werden daher bei Untersuchungen über die Struktur der n-dimensionalen Mengen auf die dargelegten Überdeckungssätze zurückkommen.

An dieser Stelle behandeln wir als Beispiel für derartige Sätze den Begriff der total zusammenhangslosen Mengen. Wir nennen die Menge M eines metrischen Raumes total zusammenhangslos im Punkt p des Raumes, wenn eine auf p sich zusammenziehende Folge von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen existiert. Wir nennen M total zusammenhangslos schlechthin, wenn die Menge M in jedem ihrer Punkte total zusammenhangslos ist.[1] Die Bezeichnung total zusammenhangslos für diese Mengen rechtfertigt sich dadurch, daß nicht nur ihre sämtlichen Komponenten, sondern auch ihre sämtlichen Quasikomponenten im Sinn von Hausdorff[2]

---

[1] Im Sinne der Dimensionstheorie heißen diese Mengen nulldimensional.

[2] Vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre. 1914, S. 248.

je einen Punkt enthalten.[1] Wir wollen nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß eine Menge nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos bleibt.

Wir sagen der Kürze halber, eine Menge M besitzt die Eigenschaft F, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ M mit einer Nullfolge von offenen Mengen überdeckbar ist, deren Durchmesser $< \varepsilon$ und deren Begrenzungen zu M fremd sind. Es ist klar, daß zugleich mit einer Menge M auch jeder Teil von M die Eigenschaft F besitzt. Ferner gilt Hilfssatz A: Wenn der Menge M ein Folgensystem von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen zugeordnet werden kann, so daß sich aus jedem zugehörigen reduzierten System eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen läßt, dann besitzt M die Eigenschaft F. In der Tat, wenn M ein derartiges Folgensystem S zugeordnet werden kann und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist, dann bilden wir ein zu S gehöriges reduziertes System S' von Umgebungen, indem wir für jeden Punkt von M alle ihm zugeordneten Umgebungen mit einem Durchmesser $\geqq \varepsilon$ aus S tilgen. Aus diesem reduzierten System können wir eine M überdeckende Nullfolge herausgreifen, also besitzt M die Eigenschaft F.

Satz X. *Besitzt die Menge M eines total vollständigen Raumes, d. h. eines Raumes, in dem jede beschränkte Menge kompakt ist, die Eigenschaft F, so ist M auch nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos.*

Sei p irgendein Punkt, $V(p)$ eine vorgelegte Umgebung. Satz X ist bewiesen, wenn gezeigt ist: Es existiert eine Umgebung $U(p) < V(p)$ mit zu M fremder Begrenzung. Wir beweisen folgenden weitergehenden Hilfssatz B:

Voraussetzungen: M besitzt die Eigenschaft F. O_1 und O_2 seien irgend zwei beschränkte offene Mengen, so daß $O_1^0 < O_2$ oder, wie wir dies ausdrücken wollen, daß $O_1 \ll O_2$. Behauptung: Es existiert eine offene Menge $\bar{O}$ mit zu M fremder Begrenzung, welche der Bedingung genügt $O_1 < \bar{O} < O_2$.

Der Sinn dieser weitergehenden Behauptung ist: Wenn M die Eigenschaft F besitzt, dann existiert nicht nur zu jedem Punkt des Raumes eine auf ihn sich zusammenziehende Folge von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen, sondern es liegen dann solche zu M fremde Umgebungsbegrenzungen in gewissem Sinne dicht: zwischen irgend zwei Umgebungen läßt sich auch eine mit zu M

[1] Es gilt der Satz: Die Mengen, die nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos bleiben, sind identisch mit den Mengen, die nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes keine echte (d. h. mehr als einen Punkt enthaltende) Quasikomponente im Hausdorffschen Sinn enthalten.

fremder Begrenzung einschalten. Insbesondere kann dann natürlich jedem Punkt eine auf ihn sich zusammenziehende, auch eine sich regulär zusammenziehende Folge von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen zugeordnet werden. Dies gilt auch für jeden Punkt, den wir zu M eventuell hinzufügen, also ist M auch nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos.

Zum Beweis des Satzes erinnern wir daran, daß wegen der Totalvollständigkeit des Raumes eine Umgebung $0'$ existiert, so daß $0_1 \ll 0' \ll 0_2$.[1] Nennen wir B' die Begrenzung von $0'$, so existiert eine Zahl $\eta > 0$, so daß $U^0(B'; \eta) < 0_2 - 0_1^0$. Ist B' zu M fremd, so sind wir am Ziel. Andernfalls besitzt $B'.M$, als Teil von M, die Eigenschaft F. Wir können also $B'.M$ mit einer Nullfolge von Umgebungen überdecken, deren Durchmesser $< \eta$ und deren Begrenzungen zu M fremd sind. Wir tilgen aus dieser Nullfolge alle Umgebungen, die zu $B'M$ fremd sind, und erhalten so eine Folge, die wir mit $\{U_n\}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ bezeichnen. Es ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = U'' < 0_2 - 0_1^0$. Die Begrenzung B'' von U'' ist zu M fremd. In der Tat, ein Punkt b von B'' ist entweder Punkt von der Begrenzung einer der Mengen U_n — in diesem Fall gehört er nicht zu M, da diese Begrenzungen als zu M fremd vorausgesetzt sind; oder es liegen in jeder Umgebung von b Punkte von unendlich vielen der Begrenzungen der U_n — in diesem Fall ist b, da die $\{U_n\}$ eine Nullfolge bilden, Punkt von B';[2] da aber alle Punkte von $B'M$ in U'', also nicht in B'' liegen, ist b auch in diesem Fall nicht Punkt von M. Die Menge B'' ist also zu M fremd; daher ist $0' - 0'U''^0 = \bar{0}$ eine offene Menge mit zu M fremder Begrenzung, die der Beziehung genügt: $0_1 < \bar{0} < 0_2$. Damit ist Hilfssatz B und Satz X bewiesen.

Durch vollständige Induktion folgt aus Satz X, daß eine Menge M, welche die Eigenschaft F besitzt, auch nach Hinzufügung einer endlichen Menge total zusammenhangslos bleibt. Durch Hinzufügung einer abzählbaren Menge kann auch für eine Menge mit der Eigenschaft F die totale Zusammenhangslosigkeit verloren gehen. (Beispiel im R_1: Hinzufügung aller rationalen Punkte zur Menge der irrationalen.) Dagegen erlaubt Hilfssatz B, den Satz X nach einer anderen Richtung hin zu verallgemeinern.

Satz XI. *Besitzt die Menge M eines total vollständigen Raumes die Eigenschaft F, so ist M auch nach Hinzufügung*

[1] Vgl. Menger II, S. 150.

[2] Dieser Schluß darf, wenn die U_n keine Nullfolge bilden, im allgemeinen nicht gezogen werden. Hierin liegt die Bedeutung der Nullfolgen.

einer beliebigen abgeschlossenen total zusammenhangslosen Menge A total zusammenhangslos.

In der Tat, sei m irgendein Punkt von $M+A$. Ist $V(m)$ eine vorgegebene Umgebung, so haben wir die Existenz einer Umgebung $U(m) < V(m)$ mit zu $M+A$ fremder Begrenzung nachzuweisen. A ist total zusammenhangslos; es existiert also eine Umgebung $U'(m) \leqslant V(m)$, deren Begrenzung B' zu A fremd ist. Jeder Punkt von B' hat von der Menge A einen positiven Abstand. Es existiert daher eine zu A fremde Umgebung $U(B')$, so daß $U^0(B') < V(m)$. Wir setzen nun:

$$U_1(m) = U'(m) - U'(m) . U^0(B')$$
$$U_2(m) = U'(m) + U'(B')$$

Auf diese beiden Mengen, oder genauer: auf eine Menge $U'_1(m)$, die etwas größer als $U_1(m)$ ist und eine Menge $U'_2(m)$, die etwas kleiner als $U_2(m)$ ist, wenden wir Hilfssatz B an. Ihm zufolge existiert eine Umgebung $\bar{U}(m)$, deren Begrenzung $\bar{B}$ zu M fremd ist und die der Beziehung genügt:

$$U'_1(m) < \bar{U}(m) < U'_2(m) < V(m).$$

Da $\bar{B}$ innerhalb $U_2(m) - U^0_1(m)$ liegt, ist $\bar{B}$ auch zu A, also zu $M+A$ fremd. Damit ist Satz XI bewiesen.

Wir beweisen nun hinsichtlich halbkompakter Mengen die Umkehrung von Satz X und hinsichtlich kompakter Mengen sogar eine Verschärfung derselben.

Satz XII. *Ist die halbkompakte Menge M auch nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos, dann besitzt M die Eigenschaft F. Ist M überdies kompakt und* $\varepsilon > 0$ *vorgegeben, dann kann M sogar schon mit endlich vielen Umgebungen überdeckt werden, deren Durchmesser* $< \varepsilon$ *und deren Begrenzungen zu M fremd sind.*

Wir setzen also voraus, daß M halbkompakt sei, d. h. $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, wo die Mengen M_n kompakt sind, und ferner, daß M auch nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos sei. m sei ein beliebiger Punkt, (m) die aus dem Punkt m bestehende Menge. Da $M+(m)$ total zusammenhangslos ist, existieren beliebig kleine Umgebungen von m, deren Begrenzungen zu M fremd sind. Insbesondere gilt dies von jedem Punkt der abgeschlossenen Hülle M^0. Sei nun $\varepsilon > 0$ irgendeine vorgegebene Zahl. Wir wählen eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ von positiven Zahlen mit $\lim \varepsilon_n = 0$, so daß alle $\varepsilon_n < \varepsilon$ sind. Ist n eine feste Zahl, so existiert zu jedem Punkt von M^0_n eine Umgebung, deren Durchmesser $< \varepsilon_n$ und deren Begrenzung zu M fremd ist. Endlich viele derartige Umgebungen überdecken M_n^0 und mithin M_n. Ganz M läßt sich also mit einer Nullfolge von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen überdecken, deren Durchmesser sämtlich $< \varepsilon$ sind, d. h., M besitzt die Eigenschaft F. Ist M selbst kompakt, so existieren offenbar schon endlich viele M überdeckende Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen und Durchmessern, die kleiner sind als eine beliebig vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$. Damit ist Satz XII bewiesen.

Wenden wir die zweite Hälfte von Satz XII auf die kompakten Mengen mit der Eigenschaft F an, die nach Satz X total zusammenhangslos sind, so ergibt sich:

Satz XII α. *Besitzt eine kompakte Menge M die Eigenschaft F, so wird M bereits von endlich vielen beliebig kleinen Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen überdeckt.*

Wenden wir Satz XI auf die halbkompakten Mengen an, die nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos bleiben, die also nach Satz XII die Eigenschaft F besitzen, so ergibt sich:

Satz XI α. *Eine halbkompakte Menge, die nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos bleibt, bleibt auch nach Hinzufügung einer abgeschlossenen total zusammenhangslosen Menge total zusammenhangslos.*

Fassen wir Satz X und Satz XII zusammen, so ergibt sich.

Satz XIII. *Damit in einem total vollständigen Raum die halbkompakte Menge M nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes (und mithin nach Hinzufügung einer beliebigen abgeschlossenen total zusammenhangslosen Menge) total zusammenhangslos bleibt, ist notwendig und hinreichend, daß M die Eigenschaft F besitzt, d. h. daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine M überdeckende Nullfolge von offenen Mengen existiert, deren Durchmesser $< \varepsilon$ und deren Begrenzungen zu M fremd sind. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine kompakte Menge M nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos bleibt, ist, daß für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele M überdeckende Umgebungen existieren, deren Durchmesser $< \varepsilon$ und deren Begrenzungen zu M fremd sind.*

Andere bloß hinreichende Bedingungen für die Erhaltung der totalen Zusammenhangslosigkeit bei Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes lassen sich auf Grund unserer früheren Ausführungen aussprechen.

Satz XIV. *Existiert zu jedem Punkt der halbkompakten Menge M, abgesehen von den Punkten einer Teilmenge mit der Eigenschaft E, eine auf den betreffenden Punkt sich regulär zusammenziehende Folge von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen, dann ist M auch nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes total zusammenhangslos.*

Durch Anwendung von Satz IX b auf eines der für M existierenden Folgensysteme von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen ergibt sich unmittelbar, daß M die Eigenschaft F besitzt, woraus mit Rücksicht auf Satz X der Satz XIV folgt.

Wir wollen nun sehen, was aus der Annahme folgt, daß eine Menge M die Eigenschaft F nicht besitzt.

Satz XV. *Wenn in einem total vollständigen Raum die Menge M die Eigenschaft F nicht besitzt, dann ist die Menge M' aller Punkte von M^0, in denen M nicht total zusammenhangslos ist, ein kondensierter (insbesondere also insichdichter) F_σ, der in keinem seiner Punkte total zusammenhangslos ist und in jedem seiner nicht leeren, offenen Teile Kontinua enthält.*

$\overline{M}$ sei die Menge aller Punkte von M^0, in denen M total zusammenhangslos ist. Daß M' ein F_σ ist, ist wegen $M' = M^0 - \overline{M}$ bewiesen, wenn wir zeigen: $\overline{M}$ ist ein G_δ. Nennen wir nun für jedes natürliche k $\overline{M}_k$ die Menge aller Punkte m von M^0, für die folgendes gilt: Es existiert eine Umgebung von m, deren Begrenzung zu M fremd und deren Durchmesser $< \frac{1}{k}$ ist; — dann ist für jedes k $\overline{M}_k$ in M^0 offen. Folglich ist $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{M}_k$, d. i. aber die Menge $\overline{M}$, ein G_δ in M^0, also ein G_δ. — Im folgenden stützen wir uns auf den

Hilfssatz C. *Ist p Punkt von M', dann existieren nicht beliebig kleine Umgebungen $U(p)$ mit der Eigenschaft $(+)$: Der Durchschnitt von M mit der Umgebungsbegrenzung ist für jedes $\varepsilon > 0$ überdeckbar mit einer Nullfolge von Umgebungen $< \varepsilon$, deren Begrenzungen zu M fremd sind.*

In der Tat, wenn $U(p)$ eine Umgebung mit der Eigenschaft $(+) \leqq V(p)$ ist, dann kann, so wie beim Beweis von Hilfssatz B eine Umgebung von $p < V(p)$ mit zu M fremder Begrenzung konstruiert werden.

In Hilfssatz C ist insbesondere enthalten, daß zu einem Punkt von M' nicht beliebig kleine Umgebungen mit zu M' fremden Begrenzungen existieren können; mit anderen Worten, die Menge M' ist in keinem ihrer Punkte total zusammenhangslos.[1] Dem Bewiesenen zufolge ist jede nicht leere, in M' offene Menge ein nicht total zusammenhangsloser F_σ. Dann folgt aber aus einem Mazurkiewiczschen Lemma,[2] daß jede solche Menge nicht diskontinuierlich (»punctiform«) ist, d. h. Kontinua enthält. Insbesondere ist dann M' offenbar kondensiert. Damit ist Satz XV in allen Stücken bewiesen.

Wir zeigen nun, daß eine Menge ohne die Eigenschaft F unter sehr allgemeinen Voraussetzungen nicht nur in ihrer abgeschlossenen Hülle, sondern in sich eine nicht total zusammenhangslose Menge von Punkten enthält, in denen sie nicht total zusammenhangslos ist.

Satz XVI. *Ist M' ein G_δ; — oder existiert zu jedem Punkt von $M—M.M'$ eine sich auf ihn regulär zusammenziehende Folge von Umgebungen mit zu M fremden Begrenzungen; — oder allgemein: Ist $M—M.M'$ für jedes $\varepsilon > 0$ überdeckbar mit einer Nullfolge von Umgebungen $< \varepsilon$, deren Begrenzungen zu M fremd sind, — dann ist die Menge $M.M'$ in keinem Punkt von M' total zusammenhangslos.*

Angenommen nämlich, es existierten zum Punkt p von M' beliebig kleine Umgebungen mit zu $M.M'$ fremden Begrenzungen, dann wären dies beliebig kleine Umgebungen, deren Begrenzungen mit M Durchschnitte hätten, die in der durch Hilfssatz C ausgeschlossenen Weise überdeckbar wären; denn jeder dieser Durchschnitte wäre Teil von $M—M.M'$.

Satz XVII. *Ist die Menge $M.M'$ in den Punkten einer in M' dichten Menge total zusammenhangslos*[3], *— dann be-*

---

[1] In Punkten ihres Komplements kann die Menge M' total zusammenhangslos sein, wie einfache Beispiele zeigen. Auch kann der Fall eintreten, daß $M.M'$ total zusammenhangslos ist. In gewissem Sinn umgekehrt liegen die Verhältnisse hinsichtlich der Punkte, in denen M total zusammenhangslos ist: $M.\overline{M} = M.(M^0—M')$ ist stets total zusammenhangslos, $\overline{M}$ selbst kann Kontinua enthalten.

[2] Vgl. Fund. Math. III, S. 67. Unter Berücksichtigung des Satzes, daß jede kompakte abgeschlossene Menge ohne Teilkontinuum nulldimensional ist (vgl. Menger I, S. 159), folgt das Mazurkiewiczsche Lemma aus dem allgemeinen Satz: Die Summe abzählbar vieler kompakter abgeschlossener n-dimensionaler Mengen ist n-dimensional (vgl. Menger II, S. 147).

[3] Diese Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn $M.M'$ total zusammenhangslos ist; z. B. abzählbar, wie in einem Beispiel von Sierpiński (Fund. Math. II, S. 81; vgl. auch Mazurkiewicz, Fund. Math. II, S. 201).

sitzt die Menge M', wenn sie nicht leer ist, folgende Eigenschaften: 1. Sie ist in keinem Punkt ein G_δ.[1] *2. Sie ist mit ihrem Hausdorffschen Residuum identisch. 3. Sie ist von erster Kategorie im Sinne von Baire. 4. Jedes Teilkontinuum von M' (und ein solches existiert in jeder nicht leeren, in M' offenen Menge) ist ein Häufungskontinuum, d. h. in M' nirgends dicht.*

Mit der Annahme, die nicht leere, in M' offene Menge A sei ein G_δ, kommen wir in Widerspruch zu Satz XVI, denn nach Voraussetzung müßte A auch einen Punkt enthalten, in dem $M.M'$ total zusammenhangslos ist. Also besitzt M' die Eigenschaft 1. Aus Sätzen von Hausdorff[2] geht hervor: Jede Menge A eines separabeln vollständigen Raumes ist eindeutig darstellbar als Summe einer in A abgeschlossenen, mit ihrem Residuum identischen Menge und einer dazu fremden in A offenen Menge, die zugleich F_σ und G_δ ist. Für M' muß, wenn M' die Eigenschaft 1 besitzt, bei dieser Zerlegung der zweite Summand leer ausfallen; also ist M' mit seinem Residuum identisch. Aus dieser zweiten Eigenschaft von M' folgt die dritte unmittelbar auf Grund des Satzes: Unter den Mengen F_σ eines total vollständigen separabeln Raumes sind diejenigen, welche mit Residuum übereinstimmen, identisch mit jenen von erster Kategorie, — dessen einfachen Beweis wir hier übergehn. Endlich ist wegen Eigenschaft 2 keine abgeschlossene Menge, insbesondere also kein Kontinuum in einem in M' offenen Teil dicht. Damit ist Satz XVII bewiesen.

§ 6. Schluß.

Was das im § 3 formulierte Problem II betrifft, so vermute ich folgenden scheinbar ziemlich tiefliegenden Satz:

Damit die Menge M die Eigenschaft E besitzt, ist nicht nur hinreichend (vgl. Satz I a), sondern auch notwendig, daß M Vereinigung abzählbar vieler kompakter abgeschlossener Mengen ist.

Wenn dieser Satz richtig ist, so wären die Vereinigungen abzählbar vieler kompakter abgeschlossener Mengen durch die Gültigkeit jener Verallgemeinerung des Borelschen Theorems, auf welche die Eigenschaft E hinauskommt, ebenso charakterisiert,

---

[1] In Analogie zu einer Bezeichnungsweise von Kuratowski (Fund. Math. III, S. 189) meinen wir damit: Kein Punkt besitzt eine Umgebung, deren Durchschnitt mit M' ein G_δ wäre.

[2] Mengenlehre, 1914, S. 280, ff., 460ff., vgl. auch Kuratowski (Fund. Math. III, S. 96). Ist A^0 die abgeschlossene Hülle von A, so heißt Residuum von A die Menge $A.(A^0-A)^0$.

wie die kompakten abgeschlossenen Mengen durch die Gültigkeit des Borelschen Theorems charakterisiert sind.[1]

Dem Beweis dieser meiner Vermutung hat sich W. Hurewicz zugewandt.[2] Er zeigt in einer demnächst erscheinenden Arbeit, daß im Bereich der Borelschen Mengen und darüber hinaus im Bereich der sogenannten Mengen (A) die vermutete Charakterisierung der Mengen F_σ richtig ist. Durch Verallgemeinerungen der Fragestellung setzt er ihr eine Charakterisierung der Mengen G_δ an die Seite.

[1] In diesem Umstand dürfte der Grund für die Ausnahmestellung gelegen sein, welche die Mengen F_σ in manchen Sätzen einnehmen.

Ich verdanke ihm mehrere Ratschläge zu § 4 dieser Arbeit, insbesondere zur allgemeinen Formulierung und zum Beweis von Satz VIII.