Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Abschätzung der Einheiten eines kubischen Zahlkörpers

Von

Dr. Ludwig Holzer, Brünn

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Dezember 1924)

Im Anschluß an Herrn Remak (Journal f. Math., Bd. 143, S. 250), der eine Abschätzung der Lösungen der Pell'schen Gleichung $t^2-Du^2=1$ gegeben hat, wollen wir die gleiche Untersuchung für die kubische diophantische Gleichung

$$t^3+u^3D+v^2D^2-3tuvD=1$$

durchführen.

Die linke Seite ist das Produkt von $t+u\sqrt[3]{D}+v(\sqrt[3]{D})^2$ mit den Faktoren, die man erhält, wenn man $\sqrt[3]{D}$ der Reihe nach durch die beiden anderen Werte der Kubikwurzel ersetzt.

Zunächst ist die Gleichung von der Pell'schen dadurch wesentlich verschieden, daß sie im wesentlichen dieselbe bleibt, wenn auf der rechten Seite -1 statt $+1$ gesetzt wird.

I.

Der Fall, in welchem D eine Kubikzahl ist, bietet wenig Interesse. Denn für $D=d^3$ zerfällt die Gleichung in die Faktoren

$$(t^2+d^2u^2+d^4v^2-dtu-d^2tv-d^3uv).$$
$$.(t+du+d^2v)=1,$$

woraus hervorgeht, daß beide Faktoren ± 1, also der erste Faktor, da er positiv definit ist, $=+1$ sein muß. Es folgt somit:

$$t+du+d^2v=1,$$
$$(t-du)^2-(t-du)\;(t-d^2v)+(t-d^2v)^2=1.$$

Die zweite dieser Gleichungen, die von der Form $\xi^2-\xi\eta+\eta^2=1$ ist, gestattet nur die Lösungen $\xi=\eta=\pm 1$ und $\xi=0$, $\eta=\pm 1$, beziehungsweise $\eta=0$, $\xi=\pm 1$.

Ist etwa

$$t-du=1,\; t-d^2v=1,$$

so gibt dies im Verein mit der ersten Gleichung

$$t+du+d^2v=1$$

$t=1$, woraus sofort $u=v=0$ folgt.

Hingegen ergibt die Annahme

$$t-du = -1,\ t-d^2 v = -1$$

ebenfalls durch Addition zu

$$t+du+d^2 v = 1$$

$3t = 1$, also einen Widerspruch.

Die Annahme

$$t-du = 0,\ t-d^2 v = +1$$

hätte $3t = 2$, ebenso die Annahme

$$t-du = 0,\ t-d^2 v = -1$$

$t = 0$ zur Folge, wovon ersteres sofort allgemein, letzteres für von ± 1 verschiedene d ausgeschlossen ist. Diese Annahmen müssen daher fallen. In genau derselben Art ergibt sich die Unmöglichkeit von $t-du = \pm 1$, $t-d^2 v = 0$.

Es ist also entweder $t = 1$, $u = v = 0$ oder $d = 1$. Im letzteren Falle, bei einer Gleichung

$$t^3+u^3+v^3-3tuv = 1$$

haben wir, wenn ρ die komplexe dritte Einheitswurzel ist:

$$t+u+v = 1,$$
$$t+u\rho+v\rho^2 = \rho, \rho^2,$$
$$t+u\rho^2+v\rho = \rho^2, \rho,$$

was $t = 0$ liefert. Die übrigbleibende Gleichung $u^3+v^3 = 1$ gibt dann $u = +1$, $v = 0$, beziehungsweise $u = 0$, $v = +1$.

Werden hingegen alle drei Faktoren $= 1$ angenommen, so folgt $t = 1$, $u = v = 0$.

Kurz, wenn D ein Kubus ist, so haben wir nur triviale Lösungen.

II.

Wir setzen daher voraus, daß D kein Kubus sei; weiter wollen wir unter $\sqrt[3]{D}$ und $\sqrt[3]{D^2}$ die reellen Werte verstehen, so daß letzteres mit $(\sqrt[3]{D})^2$ zusammenfällt. Außerdem werde D als positiv angenommen, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da wir sonst einfach u durch $-u$ ersetzen können.

Die linke Seite ist die Norm von $t+u\sqrt[3]{D}+v\sqrt[3]{D^2}$ im kubischen Zahlkörper $\sqrt[3]{D}$. Da unter bestimmten Voraussetzungen — nämlich. wenn D quadratfrei und $\equiv \pm 2, \pm 3, \pm 4 \bmod. 9$ ist (Sommer, Zahlentheorie, S. 261), $1, \sqrt[3]{D}, \sqrt[3]{D^2}$ eine Basis des kubischen Zahlkörpers $(\sqrt[3]{D})$ ist, so gibt die Lösung der Gleichung unter dieser Voraussetzung alle, im allgemeinen Falle aber gewisse ausgewählte Einheiten dieses Körpers.

Wir bezeichnen nun im Anschluß an Herrn Remak mit m eine ganze positive Zahl und bestimmen zu

$$y = 0,\ 1,\ 2 \ldots m-1, \text{ und}$$
$$z = 0,\ 1,\ 2 \ldots m-1, m$$

ganze Zahlen x von der Art, daß

$$x - y\sqrt[3]{D} - z\sqrt[3]{D^2}$$

in das Intervall 0 bis 1 fällt.

Für $y = z = 0$ wollen wir $x = 1$ annehmen. Für alle anderen Wertepaare y, sind die Zahlen $x - y\sqrt[3]{D} - z\sqrt[3]{D^2}$ irrational.

Insgesamt erhalten wir auf diese Weise $m^2 + m$ Zahlen, von denen bestimmt keine zwei einander gleich sind oder eine rationale Differenz haben, da sonst die Gleichung $z^3 - D = 0$ reduzibel wäre. Wir denken uns diese $m^2 + m$ Zahlen der Größe nach geordnet.

Die $m^2 + m - 1$ Differenzen der hiebei unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen haben eine Summe, die gleich 1 weniger der kleinsten Zahl, also < 1 ist. Unter diesen Differenzen wollen wir die kleinste herausgreifen. Sie ist absolut genommen

$$< \frac{1}{m^2 + m - 1} \text{ also um so mehr}$$

$$< \frac{1}{m^2}$$

Den absoluten Betrag dieser kleinsten Differenz wollen wir mit δ_m bezeichnen. Sind x', y', z' und x'', y''. z'' die Werte von x, y, z, die auf diese kleinste Differenz führen, so ist

$$\delta_m = |(x' - x'') + (y' - y'')\sqrt[3]{D} + (z' - z'')\sqrt[3]{D^2}|.$$

Wir können daher zu jedem m ganzzahlige Werte a_m, b_m, c_m von der Beschaffenheit angeben, daß

$$|b_m| \leqq m - 1,\quad |c_m| \leqq m \quad\text{und}\quad |a_m + b_m\sqrt[3]{D} + c_m\sqrt[3]{D^2}| < \frac{1}{m^2}$$

wird.

Dies gibt:

$$|a_m^3 + b_m^3 D + c_m^3 D^2 - 3a_m b_m c_m D| <$$

$$\frac{1}{m^2}(a_m^2 - a_m b_m\sqrt[3]{D} + b_m^2\sqrt[3]{D^2} - a_m c_m\sqrt[3]{D^2} - b_m c_m D + c_m^2\sqrt[3]{D^4}).$$

Da

$$|b_m| \leqq m-1, |c_m| \leqq m$$

und

$|a_m| = |x'-x''| \leqq (m-1)\sqrt[3]{D}+m\sqrt[3]{D^2}+1$, ist, so wird die rechte Seite auch $< m\sqrt[3]{D}+m\sqrt[3]{D^2} < 2m\sqrt[3]{D^2}$.

Wir betrachten nun die einzelnen Fälle mit Rücksicht auf die Vorzeichen der drei Zahlen a_m, b_m, c_m, die nicht alle drei gleichbezeichnet sein können.

1. Im Falle $a_m > 0$, $b_m > 0$, $c_m < 0$ oder $a_m < 0$, $b_m < 0$, $c_m > 0$, erhalten wir:

$$a_m^2 < 4m^2\sqrt[3]{D^4},\ b_m^2 < m^2,\ c_m \leqq m^2$$

daher

$$b_m^2\sqrt[3]{D^2} < m^2\sqrt[3]{D^2} < m^2\sqrt[3]{D^4} \text{ und } c_m^2\sqrt[3]{D^4} \leqq m^2\sqrt[3]{D^4};$$

ferner

$$-a_m c_m \text{ und } -b_m c_m \text{ positiv, und zwar}$$

$$-a_m c_m < m^2\sqrt[3]{D^2}, \text{ daher } -a_m c_m\sqrt[3]{D^2} < m^2\sqrt[3]{D^4},$$

also

$$|a_m^3+b_m^3 D+c_m^3 D^2-3a_m b_m c_m D| < \frac{1}{m^2} 8m^2\sqrt[3]{D^4} = 8\sqrt[3]{D^4}.$$

2. Im Falle $a_m > 0$, $b_m < 0$, $c_m < 0$ oder $a_m < 0$, $b_m > 0$, $c_m > 0$ erhalten wir ebenso

$$|a_m^3+b_m^3 D+c_m^3 D^2-3a_m b_m c_m D| < 8\sqrt[3]{D^4}.$$

3. Ist $a_m < 0$, $b_m > 0$, $c_m > 0$ oder $a_m > 0$, $b_m < 0$, $c_m < 0$

so folgt

$$|a_m^3+b_m^3 D+c_m^3 D^2-3a_m b_m c_m D| < 10\sqrt[3]{D^4}.$$

In jedem Falle ergibt sich somit:

$$|a_m^3+b_m^3 D+c_m^3 D^2-3a_m b_m c_m D| < 10\sqrt[3]{D^4}.$$

Durch jedes m_1 ist, wie eben gezeigt wurde, ein zugehöriges Wertesystem $a_{m_1}\, b_{m_1}\, c_{m_1}$ bestimmt als Koeffizientensystem der kleinsten auftretenden Differenz δ_{m_1}. Wir wollen jetzt zu einem solchen $m_2 > m_1$ übergehen, daß das entsprechende neue Wertetripel a_{m_2}, b_{m_2}, c_{m_2} mit dem früheren sicher nicht durchwegs übereinstimmt.

Es ist

$$|a_m+b_m \sqrt[3]{D}+c_m \sqrt[3]{D^2}| =$$

$$= \frac{|a_m^3+b_m^3 D+c_m^3 D^2-3a_m b_m c_m D|}{a_m^2-a_m b_m \sqrt[3]{D}+b_m^2 \sqrt[3]{D^2}-a_m c_m \sqrt[3]{D}-b_m c_m \sqrt[3]{D^2}+c_m^2 D}$$

und daraus folgt, da der Zähler mindestens gleich 1 und der Nenner, der als definite Form positiv sein muß, wie soeben erörtert wurde, $< 10\,m^2 \sqrt[3]{D^4}$ ist,

$$|a_m+b_m \sqrt[3]{D}+c_m \sqrt[3]{D^2}| > \frac{1}{10\, m^2 \sqrt[3]{D^4}}$$

Um ein m_2 zu finden, für welches δ_{m_2} von δ_{m_1} verschieden ausfällt, genügt es daher

$$\frac{1}{m_2} < \frac{1}{10\, m_1^2 \sqrt[3]{D^4}} \text{ oder } m_2 > \sqrt{10}\, m_1 \sqrt[3]{D^2} \text{ zu machen.}$$

Setzen wir also $m_1 = 1$, $m_2 = E(\sqrt{10}\sqrt[3]{D^2})+1$ [1] $m_3 =$ $= [E(\sqrt{10}\sqrt[3]{D^2}) + 1]^2 \ldots$ und so fort, allgemein $m_{A+1} =$ $= [E(\sqrt{10}\sqrt[3]{D^2}) + 1]^A$, so können wir

$$A = [E(10 \sqrt[3]{D^4})]^4$$

setzen und sagen: Unter den $A+1$ verschiedenen Werten $N(\delta_{m_1})$. $N(\delta_{m_2})$, . $N(\delta_{m_{A+1}})$, wo mit N die Norm bezeichnet wird, lassen sich gewiß $[E(10 \sqrt[3]{D^4})]^3+1$ gleiche herausgreifen. Denn käme jede der Normen nur höchstens $[E(10 \sqrt[3]{D^4})]^3$ mal vor, so wäre die Gesamtzahl, da äußerstenfalls $E(10 \sqrt[3]{D^4})$ Normen von δ_m vorhanden sein können, $\leqq E(10 \sqrt[3]{D^4})$. $[E(10 \sqrt[3]{D^4}]^3$ also höchstens gleich A. Sie ist aber $A+1$. Sei k ein Wert der Normen der δ, der $[E(10 \sqrt[3]{D^4})]^3+1$ mal vorkommt. Da $k < E(10 \sqrt[3]{D^4})$ ist, so gibt es unter den $[E(10 \sqrt[3]{D^4})]^3+1$ Wertetripeln der Koeffizienten der δ, deren Norm k ist, sicher drei, so daß

$$a^3+b^3 D+c^3 D^2-3abc\, D = k,$$
$$a'^3+b'^3 D+c'^3 D^2-3a'b'c' D = k,$$
$$a''^3+b''^3 D+c''^3 D^2-3a''b''c'' D = k$$

und zugleich $a \equiv a' \equiv a''$, $b \equiv b' \equiv b''$, $c \equiv c' \equiv c''$ mod. k ist.

Setzt man $b' = b+k\,b_1$, $c' = c+k\,c_1$ und analog $b'' = b+k\,b_2$, $c'' = c+kc_2$, so sieht man, daß sich setzen läßt:

---

[1] $E(x)$ ist das größte Ganze in

$$(a+b\sqrt[3]{D}+c\sqrt[3]{D^2})\,(a'+b'\rho\sqrt[3]{D}+c'\rho^2\sqrt[3]{D^2})\cdot$$
$$\cdot(a''+b''\rho^2\sqrt[3]{D}+c''\rho\sqrt[3]{D^2})=k+kP$$

wo sich P ganz und ganzzahlig aus $\sqrt[3]{D}$ und ρ zusammensetzt.

Es wird also:

$$(a+b\sqrt[3]{D}+c\sqrt[3]{D})\,(a'+b'\rho\sqrt[3]{D}+c'\rho^2\sqrt[3]{D^2})$$
$$(a''+b''\rho\sqrt[3]{D}+c''\rho\sqrt[3]{D})=k\,(L_1+M_1\sqrt[3]{D}+N_1\sqrt[3]{D^2}).$$

Analog:

$$(a'+b'\sqrt[3]{D}+c'\sqrt[3]{D^2})\,(a''+b''\rho\sqrt[3]{D}+c''\rho^2\sqrt[3]{D^2})$$
$$(a+b\rho^2\sqrt[3]{D}+c\rho\sqrt[3]{D^2})=k\,(L_2+M_2\sqrt[3]{D}+N_2\sqrt[3]{D^2})$$

und

$$(a''+b''\sqrt[3]{D}+c''\sqrt[3]{D^2})\,(a+b\rho\sqrt[3]{D}+c\rho^2\sqrt[3]{D^2})$$
$$\cdot(a''+b''\rho^2\sqrt[3]{D}+c''\rho\sqrt[3]{D^2})=k\,(L_3+M_3\sqrt[3]{D}+N_3\sqrt[3]{D^2}).$$

L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3 sind hierbei ganze Zahlen des Körpers $k(\rho)$ der komplexen dritten Einheitswurzeln.

Die Multiplikation der drei Gleichungen ergibt mit Rücksicht darauf, daß das Produkt der linken Seiten k^3 wird:

$$1=(L_1+M_1\sqrt[3]{D}+N_1\sqrt[3]{D^2})\,(L_2+M_2\sqrt[3]{D}+N_2\sqrt[3]{D^2})\cdot$$
$$(L_3+M_3\sqrt[3]{D}+N_3\sqrt[3]{D^2}),$$

so daß $L_1+M_1\sqrt[3]{D}+N_1\sqrt[3]{D^2}$ als Einheit des Körpers 6. Grades $(\rho, \sqrt[3]{D})$ erscheint. Dieser durch Adjungierung von ρ an den kubischen Zahlkörper $(\sqrt[3]{D})$ entstandene Körper ist ein Beispiel für den Kummer'schen und zugleich der Galois'sche Körper von letzterem Körper.

III.

Für das Folgende ist es wichtig zu erforschen, ob diese Einheit nicht etwa $\pm 1, \pm\rho, \pm\rho^2$ wird.

Wäre $L_1+M_1\sqrt[3]{D}+N_1\sqrt[3]{D^2}=\pm 1$, so hätten wir:

$$(a'+b'\rho\sqrt[3]{D}+c'\rho^2\sqrt[3]{D})\,(a''+b''\rho^2\sqrt[3]{D}+c''\rho\sqrt[3]{D})=$$
$$\pm(a+b\rho\sqrt[3]{D}+c\rho^2\sqrt[3]{D^2})\,(a+b\rho^2\sqrt[3]{D}+c\rho\sqrt[3]{D^2})$$

oder:

$$a'a''+b'c''\rho^2D+b''c'\rho D+\sqrt[3]{D}\,(c'c''D+a'b''\rho^2+a''b'\rho)$$
$$+\sqrt[3]{D^2}\,(b'b''+a'c''\rho+a''c'\rho^2)=\pm\left[a^2-bcD+\sqrt[3]{D}\,(c^2D-ab)+\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{D^2}\,(b^2-ac)\right].$$

Nun müßten die Koeffizienten von 1, $\sqrt[3]{D}$, $\sqrt[3]{D^2}$ rechts und links übereinstimmen, da sonst die Gleichung $z^3 - D = o$ durch Adjungierung von ρ reduzibel würde.

Es ergäbe sich somit:

$$a' a'' + b' c'' \rho^2 D + b'' c' \rho D = \pm [a^2 - b c D],$$
$$c' c'' D + a' b'' \rho^2 + a'' b' \rho = \pm [c^2 D - a b],$$
$$b' b'' + a' c'' \rho + a'' c' \rho^2 = \pm [b^2 - a c]$$

und hieraus weiter, da $\rho^2 = -1 - \rho$ ist und rechts reelle Größen stehen:

$$b' c'' D - b'' c' D = 0, \; a' b'' - a'' b' = 0, \; a' c'' - a'' c' = 0.$$

Dies läßt sich in $a' : b' : c' = a'' : b'' : c''$ zusammenfassen; oder wir haben, wenn λ der Proportionalitätsfaktor ist:

$$a' = a'' \lambda, \; b' = b'' \lambda, \; c' = c'' \lambda$$

und

$$a' + b' \sqrt[3]{D} + c' \sqrt[3]{D^2} = \lambda \left(a'' + b'' \sqrt[3]{D} + c'' \sqrt[3]{D^2}\right);$$

beiderseits die Normen genommen, gibt $\lambda^3 = 1$, also, da λ reell ist. $\lambda = 1$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß a', b', c' und a'', b'', c'' nicht vollständig übereinstimmen.

Wäre dagegen $L_1 + M_1 \sqrt[3]{D} + N_1 \sqrt[3]{D} = \pm \rho^2$, so würde sich ergeben:

$$a' a'' \rho + b' c'' D + b'' c' \rho^2 D + \sqrt[3]{D} \left(c' c'' D \rho + a' b'' + a'' b' \rho^2\right) + \sqrt[3]{D^2}$$
$$\left(b' b'' \rho + a' c'' \rho^2 + a'' c'\right) =$$
$$\pm \left[a^2 - b c D + \sqrt[3]{D} \left(c^2 D - a b\right) + \sqrt[3]{D^2} \left(b^2 - a c\right)\right]$$

Wieder müßten die Koeffizienten von 1, $\sqrt[3]{D}$, $\sqrt[3]{D^2}$ auf beiden Seiten übereinstimmen.

Das würde geben:

$$a' a'' \rho + b' c'' D + b'' c' D \rho^2 = \pm (a^2 - b c D),$$
$$c' c'' D \rho + a' b'' + a'' b' \rho^2 = \pm (c^2 D - a b),$$
$$b' b'' \rho + a' c'' \rho^2 + a'' c' = \pm (b^2 - a c)$$

und weiter, da die rechten Seiten reell sind, ähnlich wie früher

$$a' a'' = b'' c' D, \; c' c'' D = a'' b', \; b' b'' = a'' c'$$

Die erste der früheren drei Gleichungen wird sodann, wenn $b'' c' D$ für $a' a''$ eingesetzt wird:

$$b'c''D - b''c'D = \pm (a^2 - bcD)$$

also $a^2 \equiv 0 \ (D)$.

Ist daher $\tilde{\omega}$ ein Primfaktor von D — ein solcher muß gewiß vorhanden sein, denn sonst wäre $D = 1$ gegen unsere Voraussetzung — so wird

$$a \equiv 0 \ (\tilde{\omega}).$$

Berücksichtigen wir weiter die Kongruenzen

$$a \equiv a' \equiv a'', \ b \equiv b' \equiv b'', \ c \equiv c' \equiv c'' \ (k),$$

so erhalten wir aus den früheren Gleichungen

$$a'a'' = b''c'D, \ c'c''D = a''b', \ b'b'' = a''c'$$

sofort die Kongruenzen:

$$\begin{aligned} a^2 - bcD &\equiv 0 \ (k), \\ c^2D - ab &\equiv 0 \ (k), \\ b^2 - ac &\equiv 0 \ (k). \end{aligned}$$

Wir können somit setzen:

$$\begin{aligned} a^2 - bcD &= Ak, \\ c^2D - ab &= Ck, \\ b^2 - ac &= Bk \end{aligned}$$

mit ganzzahligem A, C, B. Die Multiplikation der ersten Gleichung mit a, der zweiten mit cD und der dritten mit bD und nachfolgende Addition gibt:

$$a^3 + b^3D + c^3D^2 - 3abcD = k(Aa + BbD + CcD)$$

Berücksichtigt man aber, daß

$$a^3 + b^3D + c^3D^2 - 3abcD = k$$

vorausgesetzt wurde, so erhält man:

$$Aa + D(Bb + Cc) = 1$$

oder mit Rücksicht auf $a \equiv 0 \ (\tilde{\omega})$, $D \equiv 0 \ (\tilde{\omega})$ $1 \equiv 0 \ (\tilde{\omega})$.

Es hat sich also ein Widerspruch ergeben.

Ganz analog wird die dritte Möglichkeit widerlegt, daß die gefundene Einheit etwa mit $\pm \rho$ übereinstimmte.

IV.

Es ist somit $\alpha = L_1 + M_1 \sqrt[3]{D} + N_1 \sqrt[3]{D^2}$ eine nicht triviale Einheit des Körpers $(\sqrt[3]{D}, \rho)$. Multipliziert man sie mit der aus ihr durch die Substitution $\left(\frac{\rho^2}{\rho}\right)$ hervorgehenden Einheit α', so erhält man eine Einheit des Körpers $\sqrt[3]{D}$, die uns zugleich eine nichttriviale Lösung der Gleichung

$$t^3+Du^3+D^2v^3-3Dtuv = 1$$

gibt.

V

Daß auch in dem Falle, daß $\alpha\alpha' = 1$ ist, die angegebenen Schranken für den absoluten Betrag einer Einheit und deren Komponenten gültig bleiben, läßt sich so darlegen:

Man wende in diesem Falle auf α die Substitution $\left(\frac{\rho\sqrt[3]{D}}{\sqrt[3]{D}}\right)$ und $\left(\frac{\rho^2\sqrt[3]{D}}{\sqrt[3]{D}}\right)$ an. Hiebei geht α, wie man sofort sieht, in

$$\beta = L_3+M_3\sqrt[3]{D}+N_3\sqrt[3]{D^2}$$

und

$$\gamma = L_2+M_2\sqrt[3]{D}+N_2\sqrt[3]{D^2}$$

über.

Hätte eine dieser Zahlen und damit beide den Absolutwert 1, so wäre α eine Einheit, deren sämtliche Konjugierte den Absolutwert 1 haben und daher nach einem von Kronecker und Minkowski herrührenden Satze eine Einheitswurzel (Hilbert, Zahlbericht, Bd. IV des deutschen mathem. Ver., S. 221). Dies ist aber im Abschnitt III der vorliegenden Abhandlung ausführlich als unmöglich nachgewiesen worden.

Ist also $\alpha\alpha' = 1$, so könnte statt α etwa β genommen werden. Da nun L_3, M_3, N_3 genau dieselben Bedingungen erfüllen wie L_1, M_1, N_1, so sind die angegebenen Schranken für den Absolutbetrag einer nicht trivialen Einheit und deren Komponenten für jeden Fall als richtig nachgewiesen.

Setzt man $\alpha = \mathfrak{R}(\alpha)+\rho\,\mathfrak{I}(\alpha)$, wo $\mathfrak{R}(\alpha)$ und $\mathfrak{I}(\alpha)$ reell sind, so ergibt sich

$$|\mathfrak{R}(\alpha)| = \frac{1}{k}\left(a+b\sqrt[3]{D}+c\sqrt[3]{D^2}\right)\cdot$$

$$\left|a'a''-b'c''D+\sqrt[3]{D}\left(c'c''D-a'b''\right)+\sqrt[3]{D^2}\left(b'b''-a'c''\right)\right|;$$

und hieraus folgt, da

$$|a'| < 2\sqrt[3]{D^2}\,[E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

$$|b'| < [E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

$$|c'| < [E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

Da dieselben Ungleichungen auch für $|a''|$, $|b''|$, $|c''|$ gelten, $k > 1$ und $|a+b\sqrt[3]{D}+c\sqrt[3]{D^2}| \leqq 1$ ist, so erhält man weiter:

$$|\Re(\alpha)| < [E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{2[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4} \cdot$$
$$(4\sqrt[3]{D^4}+D+\sqrt[3]{D^4}+2D+\sqrt[3]{D^2}+2\sqrt[3]{D^4})$$

Diese Ungleichung für $|\Re(\alpha)|$ gilt um so mehr, wenn in ihr $\sqrt[3]{D^2}$ und D durch den sicher größeren Wert $\sqrt[3]{D^4}$ ersetzt werden.

Hiedurch erhalten wir:

$$|\Re(\alpha)| < 11\sqrt[3]{D^4}\,[E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{2[E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

Dieselbe Grenze findet sich für $|\Im(\alpha)|$, daher ist

$$\alpha\alpha' \leqq |\Re(\alpha)|^2+|\Re(\alpha)|\cdot|\Im(\alpha)|+|\Im(\alpha)|^2$$
$$< 363\sqrt[3]{D^8}\,[E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{2[E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^4})]^4},$$

womit eine obere von D abhängige Schranke für die kleinste Einheit des Zahlkörpers festgesetzt ist, die > 1 und von der Form

$$t+u\sqrt[3]{D}+v\sqrt[3]{D^2} \text{ ist.}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} L_1 = {} & aa'a''+ab'c''\rho^2D+ac'b''\rho D \\ & + ba'c''\rho D+bc'a''\rho^2D+bb'b''D \\ & + ca'b''\rho^2D+cb'a''\rho D+cc'c''D^2 \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf die Ungleichungen für $|a|$ usw.

$$|L_1| < 22D^2\,[E(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2})+1]^{3[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

$$\begin{aligned} M_1 = {} & ab'a''\rho+ac'c''D+aa'b''\rho^2 \\ & + ba'a''+bb'c''\rho^2D+bc'b''\rho D \\ & + cc'a''D\rho^2+ca'c''D\rho+cb'b''D \end{aligned}$$

und daraus

$$|M_1| < 21\, D^2 \left[E\left(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2}\right)+1\right]^{3\,[E\,(10\,\sqrt[3]{D^4}]^4}$$

$$\begin{aligned} N_1 = {} & a a' c'' \rho + a b' b'' + a a'' c' \rho^2 \\ & + b a' b'' \rho^2 + b b' a'' \rho + b c' c'' D \\ & + c a' c'' \rho + c b' c'' D + c c' b'' D \end{aligned}$$

somit

$$|N_1| < 19\, D^5 \left[E\left(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2}\right)+1\right]^{3\,[E\,(10\,\sqrt[3]{D^4})]}$$

Es ist weiter:

$$\begin{aligned} t + u\sqrt[3]{D} + v\sqrt[3]{D^2} = {} & (L_1 + M_1\sqrt[3]{D} + N_1\sqrt[3]{D^2}) \\ & (L'_1 + M'_1\sqrt[3]{D} + N'_1\sqrt[3]{D^2}) \end{aligned}$$

wo L'_1, M'_1, N'_1 aus L_1, M_1, N_1 durch die Substitution $\frac{\rho}{\rho^2}$ hervorgehen und daher:

$$\begin{aligned} t &= L_1 L'_1 + D\,(M_1 N'_1 + N_1 M'_1), \\ u &= N_1 N'_1 D + L_1 M'_1 + L'_1 M_1, \\ v &= M_1 M'_1 + L_1 N'_1 + L'_1 N_1. \end{aligned}$$

Aus den eben angegebenen Grenzen für $|L_1|$, $|M_1|$, $|N_1|$ findet man unschwer die folgenden für t, u, v:

$$|t| < 1282\, D^6 \left[E\left(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2}\right)+1\right]^{6\,[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

$$|u| < 1285\, D^5 \left[E\left(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2}\right)+1\right]^{6\,[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

$$|v| < 1277\, D^4 \left[E\left(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{D^2}\right)+1\right]^{6\,[E(10\,\sqrt[3]{D^4})]^4}$$

Selbstverständlich wäre noch eine bedeutende Verschärfung der Abschätzung möglich, doch wurde hiervon abgesehen und nur gezeigt, daß auf dem hier eingeschlagenen Wege eine von D abhängige Schranke gefunden werden kann.

Schlußbemerkung.

Die Arbeit führt natürlich zu viel beschränkteren Ergebnissen als eine von Herrn Landau in den Göttinger Nachr. 1918, S. 79 ff., veröffentlichte Arbeit. Ich möchte aber darauf hinweisen, daß in letzterer Arbeit, in der Abschätzungen für Einheiten aller algebraischen Zahlkörper gegeben werden, ganz andere Hilfsmittel verwendet werden, während die bloße Anwendung rein elementarer Hilfsmittel nur in dem hier vorliegenden Falle ein Ergebnis liefert.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: 133_2a

Autor(en)/Author(s): Holzer Ludwig

Artikel/Article: Abschätzung der Einheiten eines kubischen Zahlkörpers. 497-507