Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Kipplasten des krummen Stabes

Von

Karl Federhofer (Graz)

(Mit 5 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. März 1925)

Das Problem des Kippens von Stäben mit einfach gekrümmter Zentrallinie wurde erst in den letzten Jahren zum Gegenstand eingehender Untersuchung gemacht, wobei die Kippsicherheit des elastischen Kreisringes und Kreisbogens unter der Wirkung konstanten Radialdruckes sowie von Kippmomenten, die über den Umfang des Ringes gleichförmig oder zyklisch symmetrisch verteilt sind, klargestellt wurde.[1] Da diese Sonderfälle durchwegs die Integration von totalen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verlangen, so stößt die Ermittlung der Kipplasten auf keine mathematischen Schwierigkeiten. Für eine Reihe von Belastungsfällen des elastischen Kreisbogens, die für die Anwendung der Theorie ebenso wichtig sind, erscheinen aber die Grundgleichungen des Problems als Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, deren Lösung mit Hilfe von Reihenentwicklungen zu praktisch aussichtslosen Rechnungen führen würde. In einer früheren Arbeit[2] habe ich gezeigt, daß ein von E. Meißner für die Lösung von totalen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegebenes graphisches Integrationsverfahren auch bei der Integration der hier auftretenden Differentialgleichung vierter Ordnung (zwei simultane Gleichungen zweiter Ordnung) mit Erfolg verwendet werden kann. Auf meine Anregung hat K. Karas[3] eine analytische Bestimmung der Kipplasten einseitig eingespannter, gekrümmter Stäbe mit Benutzung des von Timoschenko[4] bei Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe angewendeten Verfahrens vorgenommen, das nicht von den strengen Differentialgleichungen ausgeht, sondern die Kipplasten aus der Forderung der Gleichheit der Arbeit der äußeren und inneren Kräfte angenähert zu berechnen gestattet; dort werden die Kipplasten auch nach dem von Hencky angegebenen Näherungsverfahren der elastischen Gelenkkette berechnet, wobei die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der graphischen Integration bis zu Öffnungswinkeln von 30° befriedigend ist, während sie nach dem ersten Näherungsverfahren bis zu $\alpha = 60°$ verbürgt

[1] Eisenbau, Jahrg. 12, 1921, Heft 11.

Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech., Jahrg. 1921, H. 6; Jahrg. 1923, H. 3 u. 6.

[2] Bautechnik, Jahrg. 1924, p. 306—312.

[3] Festschrift der Deutschen techn. Hochschule in Brünn, 1924, p. 240—250.

[4] Annales des ponts et chaussées, 1913, Fasc. 3, 4, 5.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ist.[1] Die Zahlenrechnungen werden freilich trotz des Näherungscharakters der Untersuchung selbst bei Annahme flacher Kreisbogen außerordentlich mühsam und umfangreich; nach Hencky ergibt sich eine Gleichung vom siebenten, beziehungsweise vierten Grade, nach Timoschenko eine Gleichung vom dritten Grad für die Kipplast des krummen Stabes.

Ich werde im folgenden zeigen, daß sich für die Beurteilung des Einflusses einer geringen Krümmung der kreisförmigen Zentrallinie auf die Größe der Kipplast eines einseitig eingespannten krummen Stabes eine einfache quadratische Gleichung entwickeln läßt, die bis zu Zentriwinkeln $\alpha = 30°$ vollständig ausreicht und daß auch der bislang nicht untersuchte Einfluß des Eigengewichtes des Stabes auf den Kippvorgang unschwer berücksichtigt werden kann. Schließlich soll die Frage entschieden werden, ob durch ein am freien Ende des krummen Stabes wirkendes Biegungsmoment ein Kippen verursacht werden kann.

I.

Es werde ein horizontal eingespannter Stab mit kreisförmiger Achse (Öffnungswinkel α, Halbmesser r) und konstantem Quer-

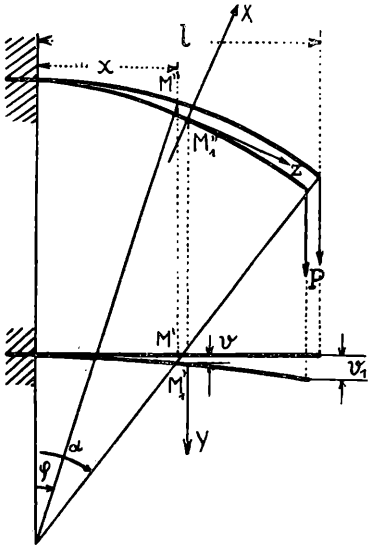

Fig. 1.

schnitte betrachtet, der am freien Ende mit einer lotrechten Last P belastet sei; wir suchen jene Größe von P, bei der ein Kippen des

[1] In gewissen Grenzen für den Wert ω (vgl. Gleichung (8) und p. 6 unten).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Stabes aus seiner Ebene auftritt. Bezeichnet v die Auslenkung senkrecht zur Bogenebene, β die veränderliche Neigung der Bogenebene nach der Deformation gegen die ursprüngliche Lage, beide Werte gemessen für einen beliebigen, durch x, s, φ festgelegten Querschnitt (Fig. 1), ist ferner v_1 die Auslenkung des Stabendes und bedeutet A die Biegungssteifigkeit des Stabes für die Querbiegung, C die Drillungssteifigkeit, dann genügen die Werte v und β, welche die Querbiegung und Drillung des Stabes bestimmen, den beiden Differentialgleichungen:[1]

$$A\left(\frac{\beta}{r}-\frac{d^2v}{ds^2}\right)+P(l-x)\,\beta-P(v_1-v)\sin\varphi=0; \tag{1a}$$

$$C\left(\frac{d\beta}{ds}+\frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right)+P(l-x)\frac{dv}{ds}-P(v_1-v)\cos\varphi=0. \tag{1b}$$

Die Ableitung der Gleichung (1b) nach der Bogenlänge s gibt mit Beachtung der Beziehung:

$$dx=ds\cos\varphi:$$

$$C\frac{d^2\beta}{ds^2}+\left[P(l-x)+\frac{C}{r}\right]\frac{d^2v}{ds^2}+P(v_1-v)\frac{\sin\varphi}{r}=0,$$

womit Gleichung (1a) übergeführt wird in:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2}+\left[\frac{1}{r}+\frac{P(l-x)}{A}\right]\left[\frac{1}{r}+\frac{P(l-x)}{C}\right]\beta-$$
$$-\frac{P(v_1-v)\sin\varphi}{A}\left[\frac{P(l-x)}{C}+\frac{1}{r}\left(1-\frac{A}{C}\right)\right]=0.$$

Wird nun x anstatt s als unabhängige Veränderliche eingeführt, so geht diese Gleichung über in:

$$\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\frac{d^2\beta}{dx^2}-\frac{x}{r^2}\frac{d\beta}{dx}+\left[\frac{1}{r}+\frac{P(l-x)}{A}\right]\left[\frac{1}{r}+\frac{P(l-x)}{C}\right]\beta-$$
$$-\frac{P(v_1-v)}{A}\frac{x}{r}\left[\frac{P(l-x)}{C}+\frac{1}{r}\left(1-\frac{A}{C}\right)\right]=0. \tag{I}$$

Für flache Bogen, also für sehr großes r, können wir hierfür genügend genau schreiben:

$$\frac{d^2\beta}{dx^2}+\left[\frac{1}{r}+\frac{P(l-x)}{A}\right]\left[\frac{1}{r}+\frac{P(l-x)}{C}\right]\beta-$$

---

[1] Ihre Ableitung findet sich in meiner auf p. 1 unter [2] zitierten Arbeit.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$-\frac{P(v_1-v)}{A}\frac{x}{r}\left[\frac{P(l-x)}{C}+\frac{1}{r}\left(1-\frac{A}{C}\right)\right]=0. \quad ($$

Wählt man für die Auslenkung v einen die Grenzbedingunge

$$v=0,\ \frac{dv}{dx}=0 \text{ für } x=0$$

befriedigenden Ansatz, etwa

$$v=v_1\frac{x^2}{l^2} \quad ($$

worin v_1 ein willkürlicher Freiwert ist, so kann die Verdrehung aus der auf die Veränderliche x transformierten Gleichung (1b) g rechnet werden; man erhält aus

$$C\frac{d\beta}{dx}+\left[P(l-x)+\frac{C}{r}\right]\frac{dv}{dx}-P(v_1-v)=0$$

mit Beachtung der Grenzbedingung $\beta(0)=0$ und mit Unterdrückur des für großes r verschwindenden Terms $\frac{C}{r}$ den Wert:

$$\beta=\frac{v_1}{Cl^2}\left[3l^2-3lx+x^2\right]\frac{Px}{3}. \quad ($$

Betrachten wir nun die zu integrierende Gleichung (II) a »Euler'sche Gleichung« im Sinne der Variationsrechnung und b stimmen das zu ihr gehörige »Grenzintegral«, so erscheint diese zufolge der für v und β gewählten Ansätze als Funktion von v die Forderung, daß das Grenzintegral J einen extremen Wert erhalt daß also $\frac{\partial J}{\partial v_1}=0$ sein muß, liefert die Kippbedingung, aus der sic die Kipplast berechnen läßt.

Schreiben wir mit leicht ersichtlichen abkürzenden Bezeich nungen die Gleichung (II) in der Form:

$$\frac{d^2\beta}{dx^2}+\gamma_1(x)\beta-\gamma_2(x)=0, \quad ($$

so lautet das zugehörige »Grenzintegral«:

$$J=\int_{x=0}^{x=l}\left\{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2-\gamma_1(x)\beta^2+2\gamma_2(x)\beta\right\}dx=\int_0^l f\left(x,\beta,\frac{d\beta}{dx}\right)dx, \quad ($$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

denn die zu J gehörige »Euler'sche Gleichung«:

$$-\frac{\partial f}{\partial \beta}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)=0$$

geht wegen:

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}=-2\gamma_1(x)\beta+2\gamma_2(x);\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)=2\frac{d^2\beta}{dx^2}$$

über in die gegebene Gleichung (4).

Für das Grenzintegral erhält man nach Ausführung der einfachen Potenzintegrale den Wert:

$$J=\frac{P^2v_1^2l}{C^2}\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{14}\frac{l^2}{r^2}-\frac{P(A+C)}{40rAC}l^3-\frac{P^2l^4}{81AC}+\right.$$
$$\left.+\frac{73}{1260}\frac{Pl^3}{Ar}+\frac{29}{210}\left(\frac{C}{A}-1\right)\frac{l^2}{r^2}\right\} \tag{6}$$

Aus der Forderung: $\frac{\partial J}{\partial v_1}=0$ folgt, da v_1 nicht verschwinden darf, wenn überhaupt ein Kippen des elastischen Bogens eintreten soll, daß der Ausdruck in der Klammer Null sein muß.

Setzen wir den Zahlenwert:

$$\frac{Pr^2}{A}=\lambda_P \tag{7}$$

und das gegebene Verhältnis der Steifigkeiten:

$$\frac{A}{C}=\omega, \tag{8}$$

so ergibt sich für den Kippkoeffizienten λ_P folgende Gleichung:

$$\lambda_P^2-\frac{81}{20\,\omega\sin\alpha}\left(\frac{73}{63}-\frac{1+\omega}{2}\right)\lambda_P-$$
$$-\frac{81}{\omega\sin^4\alpha}\left(\frac{1}{5}-\frac{\sin^2\alpha}{14}+\frac{29}{210}\frac{1-\omega}{\omega}\sin^2\alpha\right)=0.$$

Werden schließlich die nur von α und ω abhängigen Koeffizienten dieser Gleichung mit a_1 und a_2 bezeichnet, so daß

$$a_1=\frac{81}{20\cdot\omega\sin\alpha}\left(\frac{73}{63}-\frac{1+\omega}{2}\right),$$

$$a_2=\frac{81}{\omega\sin^4\alpha}\left(\frac{1}{5}-\frac{\sin^2\alpha}{14}+\frac{29}{210}\frac{1-\omega}{\omega}\sin^2\alpha\right),$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dann errechnet sich die Kipplast P_x mit Rücksicht auf Gleichung (7) zu:

$$P_x = \frac{A}{r^2}\left(\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_2}\right). \tag{9}$$

In der Tabelle I sind die aus (9) berrechneten Kippkoeffizienten $\lambda_P = \frac{P r^2}{A}$ abhängig vom Öffnungswinkel α und vom Steifigkeitsverhältnis[1] ω zusammengestellt. Die Zahlenreihen zeigen, daß λ_P bei konstant gehaltenem A mit abnehmender Drillungssteifigkeit (also mit zunehmendem ω) sehr rasch sich verkleinert. Fig. 2 zeigt das Diagramm (λ_P, α) für den Fall $\omega = 0{\cdot}6$.

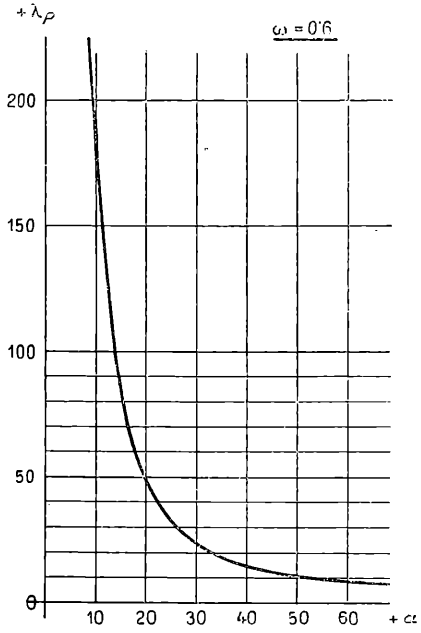

Fig. 2.

Mit $r = \infty$ liefert die Gleichung (6) die Kipplast für den einseitig eingespannten geraden Stab von der Länge l. Man erhält aus:

$$\frac{1}{5} = \frac{P_x^2 l^4}{81\, A C}$$

den Wert:

$$P_x = 4{\cdot}025\, \frac{\sqrt{AC}}{l^2}.$$

Die strenge Lösung wurde für diesen Sonderfall von L. Prandtl[2] mit Benützung von Bessel'schen Funktionen gegeben; sie führt zu

$$P_x = 4{\cdot}012\, \frac{\sqrt{AC}}{l^2}.$$

---

[1] Bei Ermittlung des von der Querschnittsform abhängigen Verhältnisses $\frac{A}{C} = \omega$ ist zu beachten, daß mit J_1 und J_2 als Hauptträgheitsmomenten eines schmalen rechteckigen Qnerschnittes von der Breite b und Höhe h und mit G als Gleitmodul, die Drillungssteifigkeit C nach A. Föppl gesetzt werden kann: $C = G\,\frac{h b^3}{3}$. Da ferner für $h > b$: $A = E\,\frac{1}{12}\,h b^3$, so wird $\omega = \frac{A}{C} = \frac{E}{4G} = \frac{m+1}{2\,m}$, worin $\frac{1}{m}$ die Poisson'sche Zahl ist (z. B. gehört zu $m = 3{\cdot}5$, $\omega = 0{\cdot}643$).

Wird die Drillungssteifigkeit C der Grashof'schen Gleichung: $C = \frac{4\,J_1 J_2}{\xi(J_1 + J_2)}\,G$ entnommen, dann erhält ω den Wert: $\frac{\xi(m+1)}{2\,m}\left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right)$. Setzt man für ξ den bei sehr schmalen Querschnitten zutreffenden Mittelwert $1{\cdot}25$, dann wird mit $m = 3{\cdot}5$; $\omega = 0{\cdot}8$.

[2] Kipperscheinungen, Nürnberg (1899). Dissertation.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Übereinstimmung ist demnach eine sehr befriedigende. Der Anwendungsbereich der einfachen Beziehung (9) erstreckt sich trotz der vereinfachenden Annahmen bei ihrer Herleitung auf ein verhältnismäßig großes Intervall für den Winkel α. Bei $\alpha = 30°$ beträgt die Abweichung des λ_P von dem durch graphische Integration der strengen Differentialgleichungen gewonnenen Werte $\lambda_P = 18 \cdot 6$ ($\omega = 0 \cdot 8$) nur $+ 1 \cdot 3\%$. Die nach den Verfahren von Hencky und Timoschenko auf weitaus umständlicherem Wege gewonnenen Werte liefern keine höhere Genauigkeit ($+ 2 \cdot 7\%$, beziehungsweise $+ 4 \cdot 3\%$).

Für gekrümmte Stäbe mit einem Öffnungswinkel $\alpha = 60°$, für die unsere vereinfachenden Annahmen nicht mehr erfüllt sind, beträgt der Fehler gegenüber dem durch graphische Integration der strengen Differentialgleichungen ermittelten Werte λ_P rund $+10\%$. Demnach reicht Gleichung (9) im Intervall $\alpha = 0°$ bis $30°$ vollkommen zur Beurteilung der Kippgefahr krummer Stäbe hin, und sie kann über diesen Bereich hinaus vorteilhaft zu deren Abschätzung, beziehungsweise zur Berechnung einer ersten Näherung verwendet werden, welche bei der graphischen Integration gebraucht wird. Übrigens könnte das Ergebnis (9) für größere Öffnungswinkel α dadurch unschwer verbessert werden, daß man von der Differentialgleichung (I) ausgeht, in welcher das den Faktor $\frac{d\beta}{dx}$ enthaltende zweite Glied gegenüber dem ersten und dritten als klein betrachtet werden kann (in erster Näherung wurde es unterdrückt), so daß es mit dem letzten Gliede zur neuen verbesserten Funktion $\gamma_2(x)$ zusammengefaßt werden kann. Ein dem vorgetragenen Rechnungsgang analoger, der etwas weitläufigere Rechnung erfordert, führt zu der Gleichung für den verbesserten Kippkoeffizienten λ_P. Die bezüglichen Ergebnisse sollen später mitgeteilt werden.

II. Einfluß einer über den Bogenumfang gleichförmig verteilten Belastung.

Mit den früheren Bezeichnungen und mit q als konstante Belastung auf die Längeneinheit des krummen Stabes ergeben sich folgende Gleichungen für das Gleichgewicht der Momente jenes deformierten Stabteiles, der zwischen dem freien Ende (Zentriwinkel α, Bogenlänge s_1) und dem durch den Zentriwinkel φ (Bogenlänge s) festgelegten Schnitte liegt (Fig. 3).

$$A\left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right) - G'\beta - \int_{\sigma=s}^{\sigma=s_1} q(v_\sigma - v) \sin\varphi \, d\sigma = 0,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$C\left(\frac{d\beta}{ds}+\frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right)-G'\frac{dv}{ds}-\int_{\sigma=s}^{\sigma=s_1} q(v_\sigma-v)\cos\varphi\, d\sigma=0,$$

worin $G'=-\frac{q(l-x)^2}{2}$ das Spannungsmoment um die zur Kreisbogenebene senkrechte Achse Y bedeutet und mit v_σ die zum Bogen σ gehörige Auslenkung aus der Bogenebene bezeichnet ist.

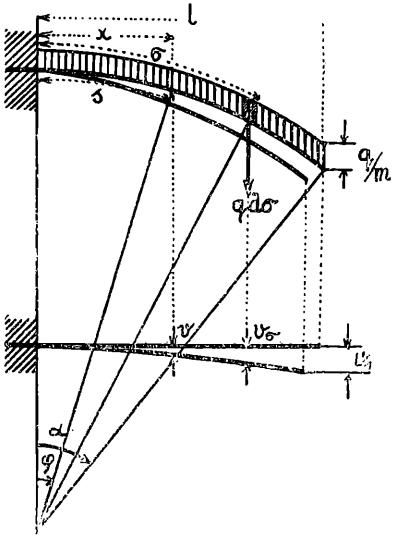

Fig. 3.

Setzen wir

$$\int_s^{s_1}(v_\sigma-v)\,d\sigma=f(s),$$

dann lauten obige Gleichungen:

$$\left(\frac{A}{r}-G'\right)\beta-A\frac{d^2v}{ds^2}-qf(s)\sin\varphi=0, \tag{10}$$

$$\left(\frac{C}{r}-G'\right)\frac{dv}{ds}+C\frac{d\beta}{ds}-qf(s)\cos\varphi=0. \tag{11}$$

Da

$$\frac{df(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_s^{s_1}v_s\,d\sigma-\frac{d}{ds}v\int_s^{s_1}d\sigma=-(s_1-s)\frac{dv}{ds},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und
$$\frac{d\,G'}{ds} = q(l-x)\frac{dx}{ds} = q(l-x)\cos\varphi,$$

so liefert die Differentiation der Gleichung (11):

$$\left(\frac{C}{r} - G'\right)\left(\frac{d^2 v}{ds^2}\right) + C\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{q f(s)}{r}\sin\varphi + q\cos\varphi\,[(s_1 - s) - (l-x)]\frac{dv}{ds} = 0.$$

Durch Entfernung von $\frac{d^2 v}{ds^2}$ mit Hilfe der Gleichung (10) folgt:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{G'}{A}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{G'}{C}\right)\beta = \frac{q\sin\varphi}{AC}\left(\frac{C-A}{r} - G'\right)f(s) - \frac{q\cos\varphi}{C}[(s_1 - s) - (l-x)]\frac{dv}{ds}. \qquad \text{(III)}$$

Für flache Bogen, auf die sich die weitere Untersuchung wie im Abschnitt I erstrecken soll, vereinfacht sich diese Grundgleichung für β in:

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{G'}{A}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{G'}{C}\right)\beta = \frac{qx}{rAC}\left(\frac{C-A}{r} - G'\right)f(x) - \frac{q}{C}\,\frac{l^3 - x^3}{6r^2}\,\frac{dv}{dx} \qquad \text{(IV)}$$

wofür wir mit leicht ersichtlichen Abkürzungen schreiben:

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \gamma_3(x)\beta - \gamma_4(x) = 0;$$

diese Gleichung stimmt formal mit Gleichung (4) überein, so daß für die in (I) auseinandergesetzte Lösungsmethode, die auch hier verwendet wird, das Grenzintegral in der Form (5) anzusetzen sein wird.

Drillungs- und Querbiegungsmoment H und G sind von β und v abhängig gemäß:

$$H = C\left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right); \quad G = A\left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right).$$

Es bestehen folgende Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0:\ v = 0,\ \frac{dv}{dx} = 0;$$

$$\text{für } x = l:\ H = 0,\ G = 0.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Diesen Bedingungen genügen die Ansätze:

$$v = v_1 \frac{x^2}{l^2}, \quad \beta = \frac{v_1}{l^2} \vartheta_1 \left(\frac{x}{l} - \vartheta_2 \frac{x^2}{l^2} \right), \tag{12}$$

wenn

$$\vartheta_1 = \frac{2\,(l^2 + 2\,r^2)}{r}, \quad \vartheta_2 = \frac{l^2 + r^2}{l^2 + 2\,r^2}$$

gesetzt wird.

Den in (12) vorkommenden Freiwert v_1 (Auslenkung am Bogenende) wollen wir wieder aus der Bedingung bestimmen, daß das zur Differentialgleichung (IV) gehörige Grenzintegral einen extremen Wert erhält.

Für das Grenzintegral ergibt sich nach Durchführung der Integrationen der Ausdruck:

$$\frac{Jl}{v_1^2 \vartheta_1^2} = -\frac{q^2 l^6}{4\,AC} \left[m_1 - \frac{4\,l^2}{3\,r\,\vartheta_1} \left(\frac{1}{60} - \frac{17}{2520} \vartheta_2 \right) \right] -$$

$$- \frac{q\,l^4}{2\,rAC} \left\{ (A + C) m_2 - \frac{4\,l^2}{3\,r\,\vartheta_1} \left[(C - A) \left(\frac{1}{15} - \frac{\vartheta_2}{28} \right) - A \left(\frac{1}{6} - \frac{3\,\vartheta_2}{28} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{3 - 6\,\vartheta_2 + 4\,\vartheta_2^2}{3} - \frac{l^2}{r^2} m_3,$$

worin der kürzeren Schreibweise wegen gesetzt ist:

$$m_1 = \frac{5\,l^4 + 25\,r^2 l^2 + 32\,r^4}{1260\,(l^2 + 2\,r^2)^2}, \quad m_2 = \frac{2\,l^4 + 11\,r^2 l^2 + 16\,r^4}{210\,(l^2 + 2\,r^2)^2},$$

$$m_3 = \frac{l^4 + 7\,r^2 l^2 + 16\,r^4}{30\,(l^2 + 2\,r^2)^2}.$$

Aus $\frac{\partial J}{\partial v_1} = 0$ folgt, da v_1 nicht verschwinden darf, daß die Nullsetzung des Ausdruckes auf der rechten Seite der Gleichung für J die Kippbedingung liefert. Sie läßt sich, wenn $\frac{q\,l^3}{A} = \lambda_q$ gesetzt wird, mit $\frac{A}{C} = \omega$ in die Form bringen:

$$\lambda_q^2 + a_3 \lambda_q - a_4 = 0, \tag{13}$$

worin bedeutet:

$$a_3 = 2\,\frac{(4\,l^4 + r^2 l^2 + 144\,r^4) + \omega\,(107\,l^4 + 482\,r^2 l^2 + 144\,r^4)}{\omega\,(48\,r^4 + 4\,r^2 l^2 - 5\,l^4)} \cdot \frac{l}{r},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$a_4 = 252 \frac{40\, r^6 + 4\, r^4 l^2 + 3\, r^2 l^4 - l^6}{\omega r^2 (48\, r^4 + 4\, r^2 l^2 - 5\, l^4)}.$$

a_3 und a_4 sind also nur vom Öffnungswinkel α $\left(\frac{l}{r} = \sin\alpha\right)$ und vom Werte ω abhängig. Die Kippbelastung q ergibt sich aus der positiven Wurzel der quadratischen Gleichung mit:

$$q = \frac{A}{l^3}\left[-\frac{a_3}{2} + \sqrt{\frac{a_3^2}{4} + a_4}\right]. \tag{14}$$

In der folgenden Tabelle II sind die aus (13) berechneten Kippkoeffizienten λ_q in ihrer Abhängigkeit von α und ω für den

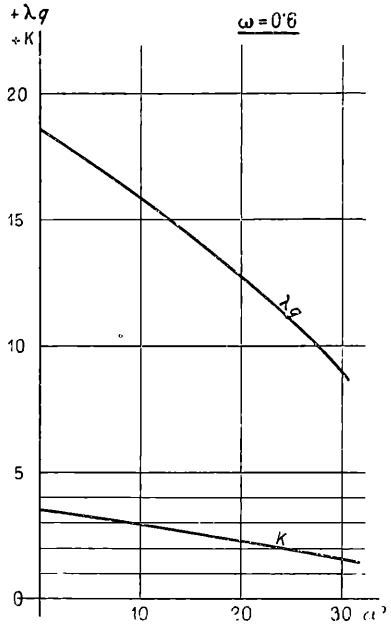

Fig. 4.

Bereich von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{\pi}{6}$ eingetragen. (Vergleiche die graphische Darstellung in Fig. 4).

Bei konstant bleibendem A verkleinert sich mit abnehmender Drillungssteifigkeit die Kippbelastung.

Für den Grenzfall des geraden Stabes wird mit $r = \infty$:

$$a_3 = 0,\ a_4 = \frac{210}{\omega},$$

somit

$$\lambda_q = \frac{q\, l^3}{A} = \sqrt{\frac{210}{\omega}}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und daraus die kritische Stablänge:

$$l_\varkappa = 2 \cdot 43 \sqrt[6]{\frac{AC}{q^2}}$$

Auch für diesen Sonderfall hat L. Prandtl die strenge Integration der Differentialgleichung geleistet und gelangt zum Werte:

$$l_\varkappa = 2 \cdot 345 \sqrt[6]{\frac{AC}{q^2}}.$$

Der Fehler der Näherungslösung beträgt mithin $3 \cdot 8\,\%$.

Mit $Q = qr\alpha$ als Gesamtbelastung des Bogenträgers wird $\lambda_q = \frac{Ql^2}{A} \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, während nach Gleichung (7): $\lambda_P = \frac{Pl^2}{A} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha}$ ist.

Nun möge das Verhältnis der für den Eintritt des Kippens eines flach gekrümmten Stabes notwendigen Belastungen Q zu P festgestellt werden. Angenommen, es vermöge der gekrümmte Träger bei gleichförmiger Lastverteilung eine $\varkappa$mal größere Kipplast aufzunehmen als bei Lastangriff am freien Bogenende, dann ist:

$$Q = \varkappa P$$

und es folgt hiermit aus den vorstehenden Beziehungen:

$$\varkappa = \frac{\lambda_q}{\lambda_P} \frac{\alpha}{\sin^3\alpha}. \tag{15}$$

Die Tabelle II gibt auch die Werte $\varkappa$ für das Intervall $\alpha = 0°$ bis $\frac{\pi}{6}$, und zwar für $\omega = 0 \cdot 6$, beziehungsweise $0 \cdot 8$. Bei der Grenzwertbildung für $\alpha = 0$, d. h. für den geraden Stab ist zu beachten, daß auch λ_q und λ_P Funktionen von α sind; man erhält den Wert $\varkappa = 3 \cdot 6$ unabhängig von ω.

$\varkappa$ ist also durchwegs größer wie Eins und nimmt mit zunehmendem α ab. Um näherungsweise den gleichzeitigen Einfluß einer am Ende konzentrierten Last P und den des Eigengewichtes Q zu berücksichtigen, reduzieren wir Q an das Ende des Trägers, bringen demnach dort nebst P die Last $\frac{Q}{\varkappa}$ an. Dann muß, damit kein Kippen eintritt, $P + \frac{Q}{\varkappa}$ kleiner sein als die aus Gleichung (9) gerechnete Kipplast.

III.

Endlich möge noch untersucht werden, ob ein reines Biegungsmoment M, das in der durch die Achse eines einseitig eingespannten Bogenträgers gelegten Vertikalebene wirkt, ein Kippen hervorrufen kann, wenn B groß gegen A und C ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Beachtet man, daß die Spannungsmomente für die Achsen XYZ (Fig. 5) durch die bekannten Ausdrücke:

$$G = A\left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right), \quad G' = B\left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2}\right), \quad H = C\left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right)$$

dargestellt sind, so drückt sich das Momentengleichgewicht des deformierten Stabstückes, das zwischen dem freien Ende (an dem M

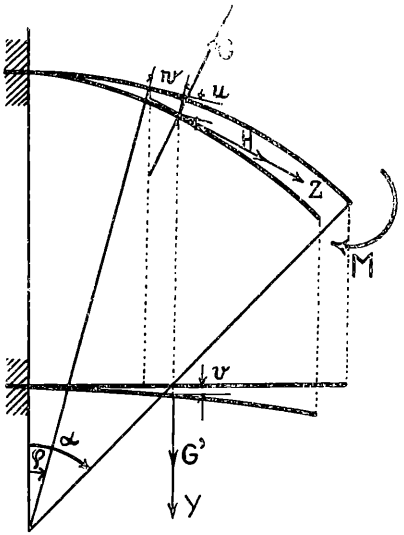

Fig. 5.

wirkt) und dem Schnitt an der Stelle φ liegt, durch die Gleichungen aus:

$$A\left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right) - G'\beta + C\left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{du}{ds} + \frac{w}{r}\right) = 0,$$

$$G' + M = 0,$$

$$-A\left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right)\left(\frac{du}{ds} + \frac{w}{r}\right) - G'\frac{dv}{ds} + C\left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right) = 0,$$

wofür mit Rücksicht auf die Voraussetzung eines gegen A und C großen Wertes B gesetzt werden kann:

$$A\left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right) + M\beta = 0, \tag{16}$$

$$C\left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r}\frac{dv}{ds}\right) + M\frac{dv}{ds} = 0. \tag{17}$$

Mit

$$n^2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{M}{A}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{M}{C}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

folgt aus diesen Gleichungen:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + n^2\beta = 0,$$

und somit für β die Lösung: $\beta = c_1 \sin(ns) + c_2 \cos(ns)$.

Nun liefert Gleichung (17) hiermit:

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{Cn}{M + \frac{C}{r}}\{c_1 \cos(ns) - c_2 \sin(ns)\}.$$

Die Erfüllung der Grenzbedingungen: $\beta = 0$, $\frac{dv}{ds} = 0$ für $s = 0$ fordert: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, d. h. ein reines Biegungsmoment vermag bei den angeführten Voraussetzungen kein Kippen des gekrümmten Stabes zu bewirken.[1]

---

[1] Für den geraden Stab gilt als Grenzfall des krummen Trägers das gleiche Ergebnis; vgl. H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre, 1913, p. 357. A. u. L. Föppl gelangen bei Behandlung der gleichen Frage für den geraden Stab zu einem gegenteiligen Ergebnisse dadurch, daß die Grenzbedingung $H(0) = \theta$ nicht erfüllt wird. (Siehe Drang u. Zwang, Bd. II, p. 347 u. 348).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Tabelle I.

	λ_P				
$\alpha°$	$\omega = 0·4$	$\omega = 0·6$	$\omega = 0·8$	$\omega = 1·0$	$\omega = 1·2$
	867·021	698·361	599·553	532·850	483·971
10	227·000	179·711	153·764	134·632	121·560
15	106·534	82·664	69·343	60·624	55·132
20	63·715	48·359	40·003	34·629	30·816
25	43·630	32·370	26·376	22·585	19·926
30	32·569	23·617	18·937	16·025	14·006
40	21·415	14·866	11·534	9·512	8·137
50	16·215	10·843	8·147	6·538	5·461
60	13·576	8·855	6·498	5·102	4·175

Tabelle II.

	λ_q				$\varkappa$	
$\alpha°$	$\omega = 0·6$	$\omega = 0·8$	$\omega = 1·0$	$\omega = 1·2$	$\omega = 0·6$	$\omega = 0·8$
5	17·30	15·02	13·44	12·27	3·264	3·302
10	15·89	13·80	12·35	11·26	2·945	2·992
15	14·39	12·50	11·17	10·15	2·629	2·723
20	12·76	11·06	9·84	8·90	2·301	2·410
25	10·99	9·45	8·34	7·48	1·961	2·071
30	9·05	7·69	6·67	5·88	1·604	1·701

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1925

Band/Volume: 134_2a

Autor(en)/Author(s): Federhofer Karl

Artikel/Article: Über die Kipplasten des krummen Stabes 81-95