Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über panalgebraische Mannigfaltigkeiten

Von

Franz Knoll (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juni 1925)

Vorbemerkung.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich jede geometrische Verwandtschaft von der Form $\mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{y}^\alpha = 0$,[1] worin die Funktionen $\mathfrak{u}_\alpha$ in den Veränderlichen $\mathfrak{x}^\beta$ analytisch und homogen sind, durch Elementarverwandtschaften in der Gestalt

$$\mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{y}^\alpha = \sum_{1}^{\mathfrak{s}} i\, \mathfrak{q}^i \Delta_\nu \mathfrak{p}^i = 0$$

darstellen läßt, wenn $\mathfrak{s}$ die Gattung des der Verwandtschaft zugeordneten Vektorfeldes bedeutet ($u = \mathfrak{u}_\alpha e_\alpha$).

Es wird ferner eine Bedingung dafür angegeben, daß sich die durch ein System von $\mathfrak{n}-1$ Formen in den beiden Veränderlichenreihen $\mathfrak{x}^1 \ldots \mathfrak{x}^\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{u}_1 \ldots \mathfrak{u}_\mathfrak{n}$ $\mathfrak{T}_1 = 0$, $\mathfrak{T}_2 = 0, \ldots \mathfrak{T}_{\mathfrak{n}-1} = 0$ definierte Verwandtschaft durch ein Produkt von Verwandtschaften $\mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{y}^\alpha = 0$ der Gattung $\mathfrak{s}$ darstellen lasse.

Von benützter Literatur seien besonders angeführt: 1. Loria G., Spezielle algebraische und transzendente Kurven. Deutsch von Schütte, Leipzig, 1902. 2. Frobenius G., Über homogene totale Differentialgleichungen, J. f. r. u. angew. Math. (Crelle), Bd. 86, p. 1—19.

Nr. 1.

Es sei u ein kovarianter Vektor in einer euklidisch affinen Mannigfaltigkeit $E_\mathfrak{n}{}^2$ mit den Bestimmungsgrößen $\mathfrak{u}_\alpha$. Diese Größen seien als analytische Funktionen der Urveränderlichen $\mathfrak{x}^\alpha$ vorausgesetzt. Es bedeute ferner der Operator ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_\alpha} e_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots \mathfrak{n}, \tag{1}$$

worin e_α die Einheitsvektoren sind.

---

[1] Wegen der verwendeten Schreibweise wird folgendes bemerkt: α in $\mathfrak{y}^\alpha$ ist überall im folgenden — außer in (25) — Index und nicht Exponent. Potenzen werden durch Klammern $(\mathfrak{y}^\alpha)^\mathfrak{n}$ angedeutet.

Treten in einem Ausdrucke zwei gleiche Indizes α auf, so ist über alle α von 1 bis $\mathfrak{n}$ zu summieren. Deutsche Buchstaben werden zur Bezeichnung von Zahlengrößen, lateinische für extensive Größen verwendet; [ ] weist auf äußere, auf innere Multiplikation hin.

Über den Begriff vergleiche Schouten J. A., Der Ricci-Kalkül. Berlin, 1924 (im folgenden zitiert: Schouten, R. K.), p. 9 ff.

Ist weiters

$$[\nabla u] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_\beta}{\partial \mathfrak{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{u}_\alpha}{\partial \mathfrak{x}^\beta}\right)[e_\alpha e_\beta], \tag{2}$$

dann betrachte man das System der Pfaff'schen Aggregate

$$\begin{aligned} {}_1u &= u,\; {}_2u = [\nabla u],\; {}_3u = [u \nabla u], . \\ {}_{2\mathfrak{s}-1}u &= [u\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-1}];\; {}_{2\mathfrak{s}}u = [\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}}]^{1} \end{aligned} \tag{3}$$

Das Pfaff'sche Fundamentaltheorem[2] besagt dann:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich u in der Form

$$u = \nabla \mathfrak{p}^1 + \sum_{2}^{\mathfrak{s}} {}_i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i \tag{4a}$$

darstellen lasse, ist: ${}_\alpha u \neq 0$, $\alpha < 2\,\mathfrak{s}$; ${}_\alpha u \equiv 0$, $\alpha \geqq 2\,\mathfrak{s}$; daß es sich in der Form

$$u = \sum_{1}^{\mathfrak{s}} {}_i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i \tag{4b}$$

darstellen lasse, lautet ${}_\alpha u \neq 0$, $\alpha \leqq 2\,\mathfrak{s}$; ${}_\alpha u \equiv 0$, $\alpha > 2\,\mathfrak{s}$.

Dabei sind die Ortsfunktionen $\mathfrak{p}^i$ und $\mathfrak{q}^i$ unabhängig und nicht in allen Punkten von $E_\mathfrak{n}$ konstant. Der letzte der nicht verschwindenden ${}_\alpha u$ definiert die Klasse des Vektorfeldes u.

Frobenius[3] hat den Fall untersucht, daß die Funktionen homogen seien:

$$u(\mathfrak{t}\mathfrak{x}^1, . \;. \mathfrak{t}\mathfrak{x}^\mathfrak{n}) = (\mathfrak{t})^\mathfrak{n}\, u(\mathfrak{x}^1, . \;. \mathfrak{x}^\mathfrak{n}). \tag{5}$$

Er zeigte, daß jedes homogene Vektorfeld ungerader Klasse, wenn

$$u|x' = \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \mathfrak{U} \neq \mathfrak{C}, \tag{6}$$

in der Form

$$u = \frac{1}{\mathfrak{n}+1} \nabla \mathfrak{U} + v;\; \mathfrak{n}+1 \neq 0 \tag{7}$$

dargestellt werden könne; er bewies, daß jedes Vektorfeld gerader Klasse unter der Voraussetzung (6) in der Form

$$u = \mathfrak{U} w \tag{8}$$

geschrieben werden könne. Dabei ist die Klasse der beiden Vektor-

---

1 Wegen der Schreibweise vergleiche Enzyklopädie d. math. Wissenschaften Bd. III, 1; A B 11, Leipzig, 1924, p. 1479.

2 Schouten, R. K., p. 119 ff.

3 Frobenius, a. o. O., p. 6 ff.

felder v, beziehungsweise w um 1 kleiner als die Klasse von u und überdies ist

$$v|x' \equiv 0 \tag{9a}$$

beziehungsweise

$$w|x' \equiv 1 \tag{9b}$$

Nr. 2.

Für das Folgende sind einige Beziehungen wichtig. Durch Differentiation der in (6) definierten Funktion $\mathfrak{U}$ und mittels des Euler'schen Satzes über homogene Funktionen findet man die Formel

$$(\mathfrak{u}+1)\,u - \nabla\,\mathfrak{U} = [\nabla u]|x', \tag{10}$$

die auch für eine Konstante richtig bleibt.

Ist die Klasse von u gerade $(2\,\mathfrak{s})$, dann folgt aus ${}_{2\mathfrak{s}+1}u|x' \equiv 0$

$$\mathfrak{U}\,[\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}}] = \mathfrak{s}\,[\{\nabla\,\mathfrak{U}\}\,u\,\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-1}]. \tag{11}$$

Ist dagegen die Klasse von u ungerade $(2\,\mathfrak{s}-1)$, so folgt aus ${}_{2\mathfrak{s}}u|x = 0$

$$(\mathfrak{u}+1)_{2\mathfrak{s}-1}u = [\nabla\,\mathfrak{U}\,\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-2}]. \tag{12}$$

Aus einem weiteren Satze von Frobenius[1] folgt, daß das durch

$$u = \mathfrak{U}\bar{w},\quad \mathfrak{u}+1 = 0, \tag{13}$$

definierte Vektorfeld $\bar{w}$ von derselben Klasse ist wie das Vektorfeld ungerader Klasse u. Es ist jedoch $\bar{w}|x \equiv 1$.

Nr. 3.

Wir behaupten nun den

Satz I: *Ist u ein homogenes (d. h. der Bedingung* (5) *genügendes) Vektorfeld der Klasse* $2\,\mathfrak{s}-1$, *beziehungsweise* $2\,\mathfrak{s}$, *so existieren stets zwei Systeme homogener Funktionen* $\mathfrak{p}^i$ *und* $\mathfrak{q}^i$ *der Art, daß für u eine der beiden Darstellungen* (4a), *beziehungsweise* (4b) *möglich ist.*

Zu seinem Beweise benötigen wir eine Reihe von einfachen Hilfssätzen.

Hilfssatz 1: Jedes homogene Vektorfeld u, für welches $\mathfrak{U}=1$ *ist, läßt eine Darstellung von der Form*

$$u = \nabla\ln\mathfrak{P} + v \tag{14}$$

---

[1] Frobenius, a. o. O., p. 6; die Klasse von u könnte höchstens um 1 größer sein, sie müßte also gerade sein, was der I. Satz von Frobenius ausschließt.

zu, worin v *homogen ist und* $v|x' = 0$; *überdies ist die Klasse von* v *um 1 kleiner als die von* u.

Zufolge eines Satzes von Frobenius,[1] der aus (11) unmittelbar abgelesen werden kann, ist nämlich die Klasse eines solchen Feldes ungerade, es muß daher eine Funktion $\mathfrak{p}^1 = \ln \mathfrak{P}$ geben, so daß

$$[u\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-1}] = [\nabla \mathfrak{p}^1 \{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-1}].^{2} \tag{15}$$

Multipliziert man diese Gleichung innerlich mit x' und beachtet man, daß wegen (12) $\mathfrak{u}+1 = 0$ ist, so folgt wegen (10)

$$[\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-1}] = \{\nabla \mathfrak{p}^1 | x\}[\{\nabla u\}^{\mathfrak{s}-1}] \tag{16}$$

und daraus

$$\nabla \mathfrak{P}\, x' = 1.\mathfrak{P}, \tag{17}$$

d. h. $\mathfrak{P}$ ist homogen von der 1. Ordnung. Daraus folgt der obige Satz.

Hilfssatz 2: Jedes homogene Vektorfeld u, *für welches* $\mathfrak{U} \equiv 0$ *ist, läßt sich in einer der beiden Formen* (4a), *beziehungsweise* (4b) *darstellen, so daß die Funktionen* $\mathfrak{p}^i$ *homogen von der* 0^{ten} *Ordnung, die Funktionen* $\mathfrak{q}^i$ *homogen von der* $\mathfrak{u}+1^{ten}$ *Ordnung sind.*

Zum Beweis setze man

$$\mathfrak{P}^i = \nabla \mathfrak{p}^i | x',\ \mathfrak{Q}^i = \nabla \mathfrak{q}^i | x' \tag{18}$$

worin die $\mathfrak{p}^i$ und $\mathfrak{q}^i$ irgendwelche der Bedingungen des Pfaff'schen Fundamentaltheorems genügende Funktionen sind.

Für jede der Darstellungen (4a), beziehungsweise (4b) ist

$$[\nabla u] = \sum_1^{\mathfrak{s}} {}_i [\nabla \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i], \text{ wobei für (4a) } \mathfrak{q}^1 = \text{Konst.} \tag{19}$$

und daraus folgt wegen (10)

$$(\mathfrak{u}+1)\, u = \sum_1^{\mathfrak{s}} {}_i (\mathfrak{Q}^i \nabla \mathfrak{p}^i - \mathfrak{P}^i \nabla \mathfrak{q}^i). \tag{20}$$

Daraus folgt wegen der Unabhängigkeit der Funktionen $\mathfrak{p}^i$ und $\mathfrak{q}^i$ im Falle (4a), was nur, wenn $\mathfrak{u}+1 = 0$ ist,[3] eintreten kann:

$$0 = (\mathfrak{u}+1)\, \mathfrak{q}^i = \nabla \mathfrak{q}^i | x';\ \nabla \mathfrak{p}^i | x' = 0;\ i = 2, .\ .\ \mathfrak{s}; \tag{21}$$

---

[1] Frobenius, a. o. O, p. 6, Satz I.

[2] Schouten, R. K., p. 123.

[3] Wäre nämlich $\mathfrak{u}+1 \neq 0$, so müßte die Klasse von u wegen des Satzes von Frobenius, a. o. O., p. 6, gerade sein.

im Falle (4b)

$$(\mathfrak{u}+1)\,\mathfrak{q}^i = \nabla \mathfrak{q}^i | x'; \;\; \nabla \mathfrak{p}^i | x' = 0; \;\; i = 1,. \tag{21'}$$

Aus (21) folgt dann wegen $\mathfrak{U} \equiv 0$

$$\nabla \mathfrak{p}^1 | x' = 0. \tag{21 a}$$

Damit ist auch Hilfssatz 2 bewiesen.

In Verbindung mit Hilfssatz 1 folgt daraus der

Hilfssatz 3: Jedes homogene Vektorfeld, für welches $\mathfrak{U} \equiv 1$ *ist, gestattet eine Darstellung von der Form*

$$u = \frac{1}{\mathfrak{P}} \nabla \mathfrak{P} + \sum_2 {}^i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i, \tag{22}$$

worin die Funktionen $\mathfrak{P}$ *homogen von der* 1^{ten}, $\mathfrak{p}^i$ *homogen von der* 0^{ten}, $\mathfrak{q}^i$ *homogen von der* 0^{ten} *Ordnung sind.*

Beachtet man die Sätze von Frobenius (7) und (8), so folgt daraus der Satz I.

Man erhält also als »reduzierte homogene Darstellung« im Falle eines homogenen Vektorfeldes ungerader Klasse $2\,\mathfrak{s}-1$

$$u = \frac{1}{\mathfrak{u}+1} \nabla \mathfrak{U} + \sum_2^{\mathfrak{s}} {}^i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i; \;\; \mathfrak{u}+1 \neq 0, \;\; \mathfrak{U} \not\equiv \mathfrak{C}; \tag{23}$$

beziehungsweise

$$u = \frac{1}{\mathfrak{P}} \nabla \mathfrak{P} + \sum_2^{\mathfrak{s}} {}^i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i; \;\; \mathfrak{u}+1 = 0, \;\; \mathfrak{U} \equiv 1; \tag{23 a}$$

oder

$$u = \nabla \mathfrak{p}^1 + \sum_2 {}^i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i; \;\; \mathfrak{u}+1 = 0, \;\; \mathfrak{U} \equiv 0; \tag{23 b}$$

darin sind die Funktionen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{q}^i$ homogen von der $\mathfrak{u}+1^{ten}$ Ordnung, $\mathfrak{p}^i$ homogen von der 0^{ten} und $\mathfrak{P}$ homogen von der 1^{ten} Ordnung.

Die reduzierte homogene Darstellung eines homogenen Vektorfeldes gerader Klasse $2\,\mathfrak{s}$

$$u = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{P}} \nabla \mathfrak{P} + \sum_2^{\mathfrak{s}} {}^i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i, \;\; \mathfrak{U} \not\equiv 0, \tag{24}$$

beziehungsweise

$$u = \sum_1^{\mathfrak{s}} {}^i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i, \qquad \mathfrak{U} \equiv 0 \tag{24 b}$$

enthält die homogenen Funktionen 0^{ter} Ordnung $\mathfrak{p}^i$, $\mathfrak{n}+1^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{q}^i$ und $\mathfrak{U}$ sowie die Funktion 1^{ter} Ordnung $\mathfrak{P}$.

Nr. 4.

Loria[1] legte sich die Frage vor, welche gemeinsamen Eigenschaften den Kurven zukämen, die einer totalen Differentialgleichung n^{ten} Grades von der Form

$$P_\gamma(x,y)\, dx^{n-\gamma} dy^\gamma = 0, \; \gamma = 0 \ldots n$$

genügen, worin $P_\gamma(x,y)$ Polynome in x und y sind. Er bezeichnete die Gesamtheit aller derartigen Kurven als die panalgebraische Klasse.

Wir betrachten in Verallgemeinerung dieser Fragestellung ein System von $\mathfrak{n}-1$ Formen (T), $\mathfrak{T}_i$ homogen in der Veränderlichenreihe $\mathfrak{u}_\alpha$ von der $\mathfrak{a}_i^{\text{ten}}$ Ordnung, in der Veränderlichenreihe $\mathfrak{x}^\beta$ von der $\mathfrak{b}_i^{\text{ten}}$ Ordnung und setzen seine Auflösbarkeit nach jeder der beiden Veränderlichenreihen voraus. Dieses System sei

$$\mathfrak{T}_i(\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{x}^\beta) = 0; \; \alpha, \beta = 1, \ldots n; \; i = 1 \ldots \mathfrak{n}-1. \tag{T}$$

Wir denken uns nunmehr das System (T) nach den $\mathfrak{u}_\alpha$ aufgelöst und fragen uns nach der Klasse des natürlich nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor gegebenen homogenen Vektorfeldes

$$u = \mathfrak{u}_\alpha e_\alpha.$$

Nr. 5.

Im folgenden werden die beiden Operatoren ∇_u und ∇_x verwendet:

$$\nabla_u = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}_\alpha} e^\alpha; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}^\alpha} e_\alpha. \tag{26}$$

Es ist dann wegen der vorausgesetzten Auflösbarkeit von (T)

$$[\nabla_u \mathfrak{T}_1 \nabla_u \mathfrak{T}_2 \ldots \nabla_u \mathfrak{T}_{\mathfrak{n}-1}] \neq 0, \tag{27a}$$

$$[\nabla_x \mathfrak{T}_1 \nabla_x \mathfrak{T}_2 \ldots \nabla_x \mathfrak{T}_{\mathfrak{n}-1}] \neq 0. \tag{27b}$$

Es seien ferner der Vektor ${}_1T$ und der Bivektor ${}_2T$ definiert durch

$${}_1T = \sum_1^{\mathfrak{n}-1}{}_i\, \mathfrak{a}_i \mathfrak{T}_i E_i, \tag{28a}$$

$${}_2T = \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{n}-1}{}_{ik} \{(\nabla_u \mathfrak{T}_i | \nabla_x \mathfrak{T}_k) - (\nabla_u \mathfrak{T}_k | \nabla_x \mathfrak{T}_i)\} [E_i E_k]. \tag{28b}$$

[1] Loria, O., p. 724 ff.

Wir untersuchen dann das System der Aggregate

$$ {}_1T, {}_2T, {}_3T = [{}_1T\,{}_2T], {}_4T = [\{{}_2T\}^2], \qquad (TT)$$
$$ {}_{2\mathfrak{s}-1}T = [{}_1T\{{}_2T\}^{\mathfrak{s}-1}];\ {}_{2\mathfrak{s}}T = [\{{}_2T\}^{\mathfrak{s}}].$$

Ist dann ${}_\alpha T \not\equiv 0,\ \alpha \leqq \mathfrak{k};\ {}_\alpha T \equiv 0,\ \alpha > \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{s}_x = \left[\frac{\mathfrak{k}+1}{2}\right]$, worin [ ] eine Gauß'sche Klammer ist, so sagen wir, das System (T) sei bezüglich der x von der Gattung $\mathfrak{s}_x$. Ist $\mathfrak{k}$ die Klasse eines Vektorfeldes, so kann man analog $\mathfrak{s}_x = \left[\frac{\mathfrak{k}+1}{2}\right]$ die Gattung desselben nennen.

Es ist aber wegen der Homogenität

$$ {}_1T = \sum_1^{\mathfrak{n}-1}{}_i\,(\nabla_u \mathfrak{T}_i | u)\, E_i. \qquad (29)$$

Differenziert man $\mathfrak{T}_i$ nach ∇_x unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{u}_\alpha$ die das System (T) identisch befriedigenden Funktionen seien, so erhält man

$$\nabla_x \mathfrak{T}_i + \left(\nabla_u \mathfrak{T}_i \Big| \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{x}^\alpha}\right) e_\alpha \equiv 0$$

und daraus

$$(\nabla_x \mathfrak{T}_i | \nabla_u \mathfrak{T}_k) = -\left(\nabla_u \mathfrak{T}_i \Big| \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{x}^\alpha}\right) e_\alpha | \nabla_u \mathfrak{T}_k,$$

so daß also gilt

$$ {}_2T = \sum_1^{\mathfrak{n}-1}{}_{ik}\,([\nabla_u \mathfrak{T}_i \nabla_u \mathfrak{T}_k] | [\nabla u])\,[E_i E_k]. \qquad (30)$$

Daher gilt allgemein:

$$ {}_{2\mathfrak{s}-1}T = \sum_1^{\mathfrak{n}-1}{}_{i_1\ldots i_{2\mathfrak{s}-1}}\,([\nabla_u \mathfrak{T}_{i_1} . \quad \nabla_u \mathfrak{T}_{i_{2\mathfrak{s}-1}}]\ {}_{2\mathfrak{s}-1}u)\,[E_{i_1} . \quad . E_{i_{2\mathfrak{s}-1}}]. \qquad (31\,\mathrm{a})$$

$$ {}_{2\mathfrak{s}}T = \sum_1^{\mathfrak{n}-1}{}_{i_1\ldots i_{2\mathfrak{s}}}\,([\nabla_u \mathfrak{T}_{i_1} .. \quad \nabla_u \mathfrak{T}_{i_{2\mathfrak{s}}}] | {}_{2\mathfrak{s}}u)\,[E_{i_1} . \quad . E_{i_{2\mathfrak{s}}}]. \qquad (31\,\mathrm{b})$$

Ist also $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{n}-1$, so folgt aus (31 a, b) wegen (27 a) aus ${}_\mathfrak{r}T \not\equiv 0$ ${}_\mathfrak{r}u \not\equiv 0$ und aus ${}_\mathfrak{r}T \equiv 0$ ${}_\mathfrak{r}u \equiv 0$ und umgekehrt. Es folgt daraus mit Rücksicht auf Satz I

Satz II: *Ist* (T) *ein System von der Gattung* $\mathfrak{s}_x$, *d. h. ist entweder* ${}_\mathfrak{r}T \not\equiv 0$, *wenn* $\mathfrak{r} \leqq 2\mathfrak{s}_x - 1 = \mathfrak{k}$, und ${}_\mathfrak{r}T \equiv 0$, wenn $\mathfrak{r} > 2\mathfrak{s}_x - 1 = \mathfrak{k}$;

oder ${}_{\mathfrak{r}}T \mp 0$, *wenn* $\mathfrak{r} \leqq 2\,\mathfrak{s}_x = \mathfrak{k}$, *und* ${}_{\mathfrak{r}}T \equiv 0$, *wenn* $\mathfrak{r} > 2\,\mathfrak{s}_x = \mathfrak{k}$ *und ferner* $\mathfrak{r} < \mathfrak{n} - 1$, *dann existiert ein System von homogenen Funktionenpaaren* $\mathfrak{p}^i$ *und* $\mathfrak{q}^i$, *so daß* (T) *durch die Funktionen*

$$\mathfrak{u}_\alpha = \sum_1^{\mathfrak{s}_x}{}_i\, \mathfrak{q}^i \nabla \mathfrak{p}^i$$

identisch befriedigt wird; unter den Funktionen $\mathfrak{p}^i$ *sind wenigstens* $\mathfrak{s}_x - 1$ *homogen von der Ordnung 0; ist* $\mathfrak{k} = 2\,\mathfrak{s}_x - 1$, *so reduziert sich eine der Funktionen* $\mathfrak{q}^i$ *auf eine Konstante; die Funktionen des Systems* $(\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}^i)$ *sind (nach eventuellem Ausschluß der Konstanten) unabhängig.*

Zusatz: Ist ${}_\alpha T \mp 0$, *wenn* $\alpha \leqq \mathfrak{n} - 1$, *und ist* $\mathfrak{n} = 2\,\mathfrak{n}'$, *so ist die Gattung von* (T) $\mathfrak{n}'$. *Ist dagegen* ${}_\alpha T \mp 0$, *wenn* $\alpha \leqq \mathfrak{n} - 1$ *und ist* $\mathfrak{n} = 2\,\mathfrak{n}' + 1$, *so kann die Gattung von* (T) *entweder* $\mathfrak{n}'$ *oder* $\mathfrak{n}' + 1$ *sein.*

Nr. 6.

Wir wenden uns der geometrischen Deutung des erhaltenen Ergebnisses zu. Zu diesem Zweck fassen wir die Größen $\mathfrak{u}_\alpha$ als Überebenenkoordinaten, die Größen $\mathfrak{x}^\alpha$ als Punktkoordinaten in einem projektiven Überraum der Stufe $\mathfrak{n}$ auf ($X_\mathfrak{n}$ genannt als Träger der Punkte, $U_\mathfrak{n}$ als Träger der Überebenen).

Durch das System (T) wird dann jedem Punkte x' ein System von $\mathfrak{n}-1$ unabhängigen (Überebenen tragenden) Überflächen zugeordnet; diese haben im allgemeinen eine endliche Anzahl von Überebenen gemeinsam; diese Anzahl möge analog wie bei Loria[1] Grad $\mathfrak{g}$ genannt werden.

Ebenso wird durch (T) jeder Überebene u ein System von $\mathfrak{n}-1$ unabhängigen (Punkte tragenden) Überflächen zugeordnet; diese haben im allgemeinen eine endliche Anzahl von Punkten gemeinsam; diese Anzahl heiße der Rang $\mathfrak{r}$.[1]

Man kann die Frage nach dem Ort aller Punkte x', aufwerfen, deren vermöge (T) zugeordnete Überebenen durch einen festen Punkt y' gehen. Die Gleichung der entsprechenden Überfläche wird durch Elimination der Größen $\mathfrak{u}_\alpha$ aus (T) und $u|y' = 0$ gewonnen; der Ort ist also eine algebraische Überfläche $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha; \mathfrak{y}^\beta) = 0$.

Entsprechend umhüllen alle Überebenen u, deren vermöge (T) zugeordnete Punkte auf einer festen Überebene v liegen, eine algebraische Überfläche $\mathfrak{F}(\mathfrak{u}_\alpha; \mathfrak{v}_\beta) = 0$.

Da aber jedem Punkte x' (jeder Überebene u) $\mathfrak{g}$ Überebenen ($\mathfrak{r}$ Punkte) vermöge (T) zugeordnet sind, so folgt die Reduktibilität der Funktion $\mathfrak{G}$ bezüglich $\mathfrak{y}^\beta$ ($\mathfrak{F}$ bezüglich $\mathfrak{v}_\beta$) also die Darstellung

[1] Loria, a. O., p. 724.

$$\rho\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha;\mathfrak{y}^\beta)=\{u_1|y'\}\{u_2|y'\}.\quad\{u_\mathfrak{g}|y'\}=0.\,^1 \tag{32a}$$

$$\sigma\mathfrak{F}(\mathfrak{u}_\alpha;\mathfrak{v}_\beta)=\{x'_1|v\}\{x'_2|v\}.\quad\{x'_\mathfrak{r}|v\}=0.\,^1 \tag{32b}$$

Nr. 7.

Jedes der Vektorfelder u_k ist — abgesehen von dem im Zusatz zu Satz II besprochenen Ausnahmsfalle — von der gleichen Gattung wie das System (T) $\mathfrak{z}_x$, d. h. es existieren $\mathfrak{g}$-Systeme von homogenen Funktionenpaaren $\mathfrak{p}^{ik}$, $\mathfrak{q}^{ik}$ der Art, daß

$$\rho\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha,\mathfrak{y}^\beta)=\prod_1^{k=\mathfrak{g}}\sum_1^{\mathfrak{z}_x}{}_i\,\mathfrak{q}^{ik}\triangle_y\mathfrak{p}^{ik}=0, \tag{33a}$$

worin mit $\triangle_y\,\mathfrak{p}=0$ die 1. Polarüberfläche des Punktes y' bezüglich der Überfläche $\mathfrak{p}=0$ bezeichnet ist.

Den Ort aller Punkte x', welche in den ihnen durch (T) zugeordneten Überebenen liegen — die P-Kernüberfläche der Verwandtschaft $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha,\mathfrak{y}^\beta)=0$— erhält man, wenn man y' mit x' zusammenfallen läßt:

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha,\mathfrak{x}^\beta)=0=\mathfrak{G}_\mathfrak{x}. \tag{34a}$$

Setzt man die Vektorfelder u_k in der reduzierten homogenen Darstellung voraus, so folgt wegen der Sätze I und II

$$\rho\,\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha,\mathfrak{x}^\beta)=\prod_1^{k=\mathfrak{g}}\mathfrak{q}^{1\,k}\,\pi^k\,\mathfrak{p}^{1\,k}. \tag{34b}$$

Darin sind die Funktionen $\mathfrak{p}^{1\,k}$ als homogen von den Ordnungen π^k vorausgesetzt. Ist auch nur eine davon homogen von der Ordnung 0, dann verschwindet die Funktion $\mathfrak{G}_\mathfrak{x}$ identisch: wir nennen die vorliegende Verwandtschaft eine Nullverwandtschaft.

Nr. 8.

In Verallgemeinerung der gewöhnlichen Bezeichnungsweise nennen wir eine geometrische Verwandtschaft, durch welche einem Punkte ein Überebenenort zugeordnet wird, eine allgemeine Kollineation (kurz A-Kollineation); eine geometrische Verwandtschaft, welche einem Punkte einen Punktort zuordnet, nennen wir eine allgemeine Korrelation (kurz A-Korrelation).

Dann vermittelt eine Gleichung des Systems (T) eine A-Kollineation, das System (T) aber eine A-Korrelation.

---

[1] Der Faktor ρ, beziehungsweise σ kann eine von den $\mathfrak{x}^\alpha$, beziehungsweise $\mathfrak{u}_\beta$ freie Funktion sein.

Ein System von Funktionen $\mathfrak{p}^{ik}$, welches der Relation (33a) genügt, nennen wir ein System von Stammfunktionen der Verwandtschaft $\mathfrak{G}=0$, beziehungsweise (T).

Das System der durch den Ansatz $\mathfrak{p}^{ik}=0$ definierten — Punkte tragenden — Überflächen nennen wir das zugeordnete System der Stamm-P-Überflächen.

Verwandtschaften, welche sich in der Form $\triangle_y \mathfrak{p}=0$ darstellen lassen, heißen Elementarverwandtschaften; ist darin die Funktion homogen von der 0ten Ordnung, so sprechen wir von Elementarverwandtschaften erster Art, beziehungsweise von Elementarnullverwandtschaften, anderenfalls von Elementarverwandtschaften zweiter Art.

Ist $\triangle_y \mathfrak{p}=0$ eine Elementarnullverwandtschaft, so ist durch $\triangle_y(\mathfrak{p}+\mathfrak{k})=0$, worin $\mathfrak{k}$ eine Konstante bedeutet, dieselbe Verwandtschaft dargestellt; eine Elementarnullverwandtschaft besitzt also eine einparametrige Schar von Stamm-P-Überflächen. Die Elementarverwandtschaften zweiter Art besitzen dagegen nur eine einzige Stamm-P-Überfläche.

Der Schnittraum der Stamm-P-Überflächen $\mathfrak{p}^i=0$ einer Verwandtschaft

$$u|y'=\sum_1^{\mathfrak{z}} {}_i\, \mathfrak{q}^i \triangle_{y'} \mathfrak{p}^i=0$$

heißt eine P-Hauptmannigfaltigkeit der Verwandtschaft.

Ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}^\alpha, \mathfrak{y}^\beta)=\mathfrak{H}(\mathfrak{x}^\alpha, \mathfrak{y}^\beta)\,\mathfrak{J}(\mathfrak{x}^\alpha, \mathfrak{y}^\beta)$, so heißt $\mathfrak{H}$ ein Teiler von $\mathfrak{G}$, dabei ist vorausgesetzt, daß $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ Formen in $\mathfrak{y}^\beta$ sind. Besitzt eine Verwandtschaft keine Teiler, so heißt sie primitiv, und zwar von der Ordnung, in der sie in $\mathfrak{y}^\beta$ homogen ist.

Die Darstellung von $u|y'=\sum_1^{\mathfrak{z}} {}_i\, \mathfrak{q}^i \triangle_{y'} \mathfrak{p}^i=0$ heißt die Zerlegung der Verwandtschaft $u|y'=0$ in Elementarverwandtschaften.

Sind die Funktionen $\mathfrak{u}_\alpha$ irgendwelche algebraische Funktionen (derselben Ordnung homogen), dann nennen wir die zu der Verwandtschaft $u|y'=0$ zugeordnete Hauptmannigfaltigkeit panalgebraisch.

Man kann dann das geometrische Ergebnis so fassen:

Satz III: *Die durch ein System (T) definierte A-Korrelation von der Gattung $\mathfrak{z}_x$ und vom Grade $\mathfrak{g}$ läßt sich als Produkt von $\mathfrak{g}$ (primitiven) A-Korrelationen erster Ordnung darstellen, von welchen jede einzelne sich in $\mathfrak{z}_x$ Elementarverwandtschaften zerlegen läßt. In jeder Reihe der Elementarverwandtschaften gibt es höchstens eine zweiter Art und mindestens $(\mathfrak{z}_x-1)$ erster Art.*

Die zugeordneten P-Hauptmannigfaltigkeiten sind panalgebraisch.

Satz IV: *Ist die Verwandtschaft eine Nullverwandtschaft, so sind alle ihre Elementarverwandtschaften von der ersten Art und das System der $\mathfrak{g}$ zugeordneten P-Hauptmannigfaltigkeiten ist $\mathfrak{s}_x$-parametrig. Es geht dann durch jeden Punkt ein*[1] *System von $\mathfrak{g}$ P-Hauptmannigfaltigkeiten, deren jede in dem gegebenen Punkte von den ihm durch die Verwandtschaft zugeordneten $\mathfrak{g}$ Überebenen berührt wird.*

Satz V: *Ist die Verwandtschaft keine Nullverwandtschaft, so ist das System der $\mathfrak{g}$ zugeordneten P-Hauptmannigfaltigkeiten ($\mathfrak{s}_x - 1$)-parametrig. Alle P-Hauptmannigfaltigkeiten liegen auf der P-Kernüberfläche. Durch jeden Punkt der P-Kernüberfläche geht ein*[2] *System von $\mathfrak{g}$ P-Hauptmannigfaltigkeiten, deren jede in diesem Punkte durch seine in der Verwandtschaft zugeordneten $\mathfrak{g}$ Überebenen berührt wird.*

Nr. 9.

Im vorstehenden wurde — abgesehen von den Bemerkungen, die zur Aufstellung der Formel (32b) führten — immer nur von der Auflösung des Systems (T) nach den $\mathfrak{u}_\alpha$ Gebrauch gemacht. Wegen der vorausgesetzten Auflösbarkeit nach den $\mathfrak{x}^\alpha$ gelten duale Überlegungen zu den obigen in weitem Maße. Setzt man

$$ {}_1S = \sum_1^{\mathfrak{n}-1} {}_i\, \mathfrak{b}_i \mathfrak{T}_i E_i \text{ und } {}_2S = {}_2T \tag{35}$$

und betrachtet man das System der Aggregate

$$\begin{aligned} {}_1S, {}_2S, {}_3S &= [{}_1S\,{}_2S], \qquad {}_4S = [{}_2S\,{}_2S], \\ {}_{2\mathfrak{s}-1}S &= [{}_1S \{{}_2S\}^{\mathfrak{s}-1}], \quad {}_{2\mathfrak{s}}S = [\{{}_2S\}^{\mathfrak{s}}]; \end{aligned} \tag{SS}$$

ist dann ${}_\alpha S \not\equiv 0$, $\alpha \leqq \mathfrak{k}_u$; ${}_\alpha S \equiv 0$, $\alpha > \mathfrak{k}_u$ und $\mathfrak{s}_u = \left[\dfrac{\mathfrak{k}+1}{2}\right]$, so ist das System ($T$) in bezug auf u von der Gattung $\mathfrak{s}_u$.

Zwischen $\mathfrak{s}_x$ und $\mathfrak{s}_u$ gilt die Beziehung $|\mathfrak{s}_x - \mathfrak{s}_u| \leqq 1$.

Der Satz II läßt sich unmittelbar übertragen; daher folgt aus (32b)

$$\sigma\, \mathfrak{F}(\mathfrak{u}_\alpha;\, \mathfrak{v}_\beta) = \prod_1^{k=\mathfrak{r}} \sum_1^{\mathfrak{s}_u} {}_i\, \mathfrak{m}^{ik} \triangle_v \mathfrak{u}^{ik} = 0, \tag{36}$$

---

[1] Nachgewiesen ist bloß die Existenz derartiger Systeme, doch sind sie nicht die einzigen.

[2] Vgl. Bemerkung zu Satz IV.

worin den homogenen Funktionen $\mathfrak{m}^{ik}$ und $\mathfrak{n}^{ik}$ eine ähnliche Bedeutung zukommt, wie bei den obigen Überlegungen den Funktionen $\mathfrak{p}^{ik}$ und $\mathfrak{q}^{ik}$.

Den Ort aller Überebenen u, welche durch die ihnen vermöge (T) zugeordneten Punkte gehen — die E-Kernüberfläche der Verwandtschaft $\mathfrak{F}(\mathfrak{u}_\alpha; \mathfrak{v}_\beta) = 0$ — erhält man, wenn man $\mathfrak{v}$ mit u zusammenfallen läßt:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta) = \mathfrak{F}_\mathfrak{u} = 0. \tag{37}$$

Für die reduzierte Darstellung folgt daraus

$$\sigma \mathfrak{F}_\mathfrak{u} = \prod_{1}^{k=\mathfrak{r}} \mathfrak{m}^{1\,k} \gamma^k \mathfrak{n}^{1\,k}.[1] \tag{37a}$$

Die Überflächen $\mathfrak{n}^{ik} = 0$ bilden ein System von Stamm-E-Überflächen der Verwandtschaft. Die Durchschnittmannigfaltigkeit[2] eines solchen Systems heißt die E-Hauptmannigfaltigkeit der Verwandtschaft.

Man kann dann unmittelbar die zu den Sätzen III, IV, V dualen Sätze aussprechen:

Satz IIIa: *Die durch ein System (T) definierte A-Korrelation von der Gattung $\mathfrak{s}_u$ und vom Range $\mathfrak{r}$ läßt sich als Produkt von $\mathfrak{r}$ A-Korrelationen erster Ordnung darstellen, von welchen jede einzelne sich in $\mathfrak{s}_u$ Elementarverwandtschaften zerlegen läßt. In jeder Reihe der Elementarverwandtschaften gibt es höchstens eine zweiter Art und mindestens $(\mathfrak{s}_u - 1)$ erster Art. Die zugeordneten E-Hauptmannigfaltigkeiten sind panalgebraisch.*

Satz IVa: *Ist die Verwandtschaft eine Nullverwandtschaft, so sind alle ihre Elementarverwandtschaften von der ersten Art und das System der $\mathfrak{r}$ zugeordneten E-Hauptmannigfaltigkeiten ist $\mathfrak{s}_u$-parametrig. Es berührt dann jede Überebene ein[2] System von $\mathfrak{r}$ E-Hauptmannigfaltigkeiten in den durch die Verwandtschaft zugeordneten $\mathfrak{r}$ Punkten.*

Satz Va: *Ist die Verwandtschaft keine Nullverwandtschaft, so ist das System der $\mathfrak{r}$ zugeordneten E-Hauptmannigfaltigkeiten $(\mathfrak{s}_u - 1)$-parametrig. Alle E-Hauptmannigfaltigkeiten gehören der E-Kernüberfläche an. Jede Überebene der E-Kernüberfläche berührt ein[2] System von $\mathfrak{r}$ E-Hauptmannigfaltigkeiten in den ihr durch die Verwandtschaft zugeordneten $\mathfrak{r}$ Punkten.*

Die E-Hauptmannigfaltigkeiten sind also dual den P-Hauptmannigfaltigkeiten entsprechend; es muß daher auch $\mathfrak{s}_x = \mathfrak{s}_u$ sein.

---

1 γ^k ist die Ordnung der Homogenität von $\mathfrak{n}^{1\,k}$.

2 Vgl. Bemerkung zu Satz IV.