Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Zur Integration der linearen Differentialgleichungen

(5. Mitteilung)

Von

Alfred Tauber in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. April 1925)

§ 1. Die verallgemeinerte Form des Satzes über die Quadraturdarstellung der Parameterlösungen.

Eine lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$L_0(x)\frac{d^m y}{d x^m}+L_1(x)\frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}}+\cdots+L_m(x)\, y=0 \tag{1}$$

besitzt jedenfalls Parameterlösungen der Integralform

$$y=\int_x^c \varphi(v)\,\Psi(x, c, v)\, d v, \tag{2}$$

wenn $\varphi(v)$ durch $L_0(v)\,\varphi'(v)+L_1(v)\,\varphi(v)=0$ definiert wird und die Funktion Ψ den drei Bedingungen genügt, daß $\frac{\partial^{m-1}\Psi}{\partial x^{m-1}}$ für $v=c$ verschwindet, $\frac{\partial^{m-2}\Psi}{\partial x^{m-2}}$ für $v=x$ den Wert 1 annimmt und $\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^{m-3}\Psi}{\partial x^{m-3}}$ für $v=x$ verschwindet. Denn die letztgenannte — im Falle $m=2$ nicht in Betracht kommende — Eigenschaft bewirkt

$$\frac{d y}{d x}=\int_x^c \varphi(v)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, d v, \qquad \frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}}=\int_x^c \varphi(v)\frac{\partial^{m-2}\Psi}{\partial x^{m-2}}\, d v \tag{3}$$

und die zweite, wie durch Differentiation von $d^{m-2} y/d x^{m-2}$ in (3) zu ersehen

$$\frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} = -\varphi(x) + \int_x^c \varphi(v) \frac{\partial^{m-1} \Psi}{\partial x^{m-1}} d v, \tag{4}$$

ferner erhält man aus (4) durch nochmalige Differentiation, wenn $\Psi_1(c, x)$ den Wert von $\partial^{m-1} \Psi / \partial x^{m-1}$ für $v = x$ bedeutet,

$$\frac{d^m y}{d x^m} = -\varphi'(x) - \varphi(x) \Psi_1(c, x) + \int_x^c \varphi(v) \frac{\partial^m \Psi}{\partial x^m} d v, \tag{5}$$

mithin als Substitutionsresultat des Integrales (2) in die vorgelegte Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x) \frac{d^{m-\varkappa} y}{d x^{m-\varkappa}} = -L_0(x) \varphi(x) \Psi_1(c, x) + \\ + \sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x) \int_x^c \varphi(v) \frac{\partial^{m-\varkappa} \Psi}{\partial x^{m-\varkappa}} d v. \tag{6}$$

Und nun ist, vermöge der ersten Eigenschaft von Ψ

$$\int_x^c \frac{\partial}{\partial v} \left\{ L_0(v) \varphi(v) \frac{\partial^{m-1} \Psi(x, c, v)}{\partial x^{m-1}} \right\} d v = \\ = -L_0(x) \varphi(x) \Psi_1(c, x), \tag{7}$$

so daß die rechte Seite von (6) die Form $\int_x^c K d v$ erhält, mit

$$K = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ L_0(v) \varphi(v) \frac{\partial^{m-1} \Psi}{\partial x^{m-1}} \right\} + \\ + \varphi(v) \sum_{\varkappa=0}^{m} L_\varkappa(x) \frac{\partial^{m-\varkappa} \Psi}{\partial x^{m-\varkappa}}. \tag{8}$$

Es reicht also hin, Ψ der partiellen Differentialgleichung $K = 0$ oder allgemeiner, unter Zuhilfenahme irgend einer sowohl für $v = x$ als $v = c$ verschwindenden Funktion $\mathfrak{K}(x, c, v)$ der Differentialgleichung

$$K + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial v} = 0 \tag{9}$$

entsprechend zu wählen, damit y der vorgelegten Differentialgleichung genüge.

Hierzu denkt man sich die gesuchte Funktion Ψ als Potenzreihe von $x - v$ definiert[1]

$$\Psi = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{m+h-2}}{(m+h-2)!} \Psi_h(c, v) \tag{10}$$

mit den Festsetzungen

$$\Psi_0(c, v) = 1, \quad \Psi_h(c, c) = 0 \text{ für } h \geqq 1,$$

welche ihr die oben verlangten drei Eigenschaften sichern, und bestimmt dann mittels der Ψ_h die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $K = \sum_{h=0}^{\infty} K_h \frac{(x-v)^h}{h!}$. Zunächst ergibt sich aus (10)

$$\frac{\partial^{m-1} \Psi}{\partial x^{m-1}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^h}{h!} \Psi_{h+1} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^m \Psi}{\partial x^{m-1} \partial v} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^h}{h!} \left\{ \frac{\partial \Psi_{h+1}}{\partial v} - \Psi_{h+2} \right\}, \tag{12}$$

also für den ersten Summanden von K, vgl. (8), die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ L_0(v) \varphi(v) \frac{\partial^{m-1} \Psi}{\partial x^{m-1}} \right\} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^h}{h!} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left\{ L_0(v) \varphi(v) \Psi_{h+1} \right\} - \right.$$
$$\left. - L_0(v) \varphi(v) \Psi_{h+2} \right]. \tag{13}$$

Die übrigen Summanden von K werden erhalten, indem man das Produkt von

$$\frac{\partial^{m-\varkappa} \Psi}{\partial x^{m-\varkappa}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left|\underline{\varkappa + h - 1}\right.^{m-\varkappa} (x-v)^{\varkappa+h-2} \Psi_h}{(m+h-2)!} \tag{14}$$

[1] Der Beweisgang der vorigen Mitteilung erscheint hier, in (10) bis (23), reproduziert und zugleich etwas vereinfacht.

mit dem, ebenfalls nach Potenzen von $x - v$ entwickelten Koeffizienten $L_\varkappa(x)$ bildet

$$L_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=\varkappa}^{\infty} \frac{(x-v)^{\lambda-\varkappa}}{(\lambda-\varkappa)!} L_\varkappa^{(\lambda-\varkappa)}(v) \tag{15}$$

(die Reihe rechts bricht für ein Polynom $L_\varkappa$ von selbst ab) und von $\varkappa = 0$ bis μ summiert, wobei $L_\mu(x)$ den letzten von Null verschiedenen Koeffizienten in (1) vorstellt

$$\frac{\partial^{m-\varkappa}\Psi}{\partial x^{m-\varkappa}} = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=\varkappa}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{m-\varkappa}{\varkappa+h-1}\right. (x-v)^{\lambda+h-2} L_\varkappa^{\lambda-\varkappa}(v)\, \Psi_h}{(m+h-2)!\,(\lambda-\varkappa)!}. \tag{16}$$

Der Ausdruck rechts ist nach Potenzen von $x-v$ zu ordnen. Zu diesem Zweck setzt man in der letzten Summe $h = i + \lambda$, hierbei variiert i von λ bis ∞, und $\sum\limits_{\lambda=\varkappa}^{\infty} \sum\limits_{i=\lambda}^{\infty}$ verwandelt sich durch Vertauschung der Summationen in $\sum\limits_{i=\varkappa}^{\infty} \sum\limits_{\lambda=\varkappa}^{i}$, dann verschiebt man durch die analogen Umstellungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{i=\varkappa}^{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{i,\,\mu}, \qquad \sum_{\varkappa=0}^{i,\,\mu} \sum_{\lambda=\varkappa}^{i} = \sum_{\lambda=0}^{i} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda,\,\mu}$$

die Summation betreffs i in dem umzuordnenden Ausdruck (16) nach vorne:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x-v)^{i-2} \sum_{\lambda=0}^{i} \Psi_{i-\lambda} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda,\,\mu} \frac{\left|\frac{m-\varkappa}{\varkappa+i-\lambda-1}\right. L_\varkappa^{(\lambda-\varkappa)}(v)}{(m+i-\lambda-2)!\;(\lambda-\varkappa)!} \tag{17}$$

Aber infolge des Auftretens des Faktors $\left|\frac{m-\varkappa}{\varkappa+i-\lambda-1}\right.$ verschwinden in (17) die Summationselemente für $i = 0$ und $i = 1$, und wenn man statt $i-2$ wieder den Summationsbuchstaben h, statt eines neuen, gebraucht, erlangt der Ausdruck (16), mit Rücksicht auf

$$\frac{\left|\frac{m-\varkappa}{\varkappa+h-\lambda+1}\right.}{(m+h-\lambda)!}=\frac{1}{(\varkappa+h-\lambda)!}$$

die verlangte Form einer Potenzreihe bezüglich $x-v$

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(x-v)^h}{h!}\sum_{\lambda=0}^{h+2}\Psi_{h+2-\lambda}\sum_{\varkappa=0}^{\lambda,\,\mu}\binom{h}{\lambda-\varkappa}L_{\varkappa}^{(\lambda-\varkappa)}(v). \tag{18}$$

Durch die Einführung der Funktionen

$$M_{h\lambda}(v)=\sum_{\varkappa=0}^{\lambda,\,\mu}\binom{h}{\lambda-\varkappa}L_{\varkappa}^{(\lambda-\varkappa)}(v) \tag{19}$$

entsteht so die vereinfachte Darstellung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\mu}L_{\varkappa}(x)\frac{\partial^{m-\varkappa}\Psi}{\partial x^{m-\varkappa}}=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(x-v)^h}{h!}\sum_{\lambda=0}^{h+2}M_{h\lambda}(v)\,\Psi_{h+2-\lambda}. \tag{20}$$

Daher liefert die Addition der beiden Resultate (13) und (20) als Koeffizienten K_h von $\frac{(x-v)^h}{h!}$ in K

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{L_0(v)\,\varphi(v)\,\Psi_{h+1}\right\}-L_0(v)\,\varphi(v)\,\Psi_{h+2}+$$
$$+\varphi(v)\sum_{\lambda=0}^{h+2}M_{h\lambda}(v)\,\Psi_{h+2-\lambda},$$

aus welchem Ausdruck wegen $M_{h\,o}(v)=L_o(v)$ die Funktion Ψ_{h+2} herausfällt. Der Faktor von Ψ_{h+1}

$$\left[L_o(v)\,\varphi'(v)+L_o'(v)\,\varphi(v)\right]+\varphi(v)\left[h\,L_o'(v)+L_1(v)\right]$$

reduziert sich auf $(h+1)\,\varphi(v)\,L_o'(v)$, so daß für den gesuchten Koeffizienten die Gleichung gilt

$$\frac{K_h}{\varphi(v)}=L_o(v)\frac{\partial\Psi_{h+1}}{\partial v}+(h+1)\,L_o'(v)\,\Psi_{h+1}+$$
$$+\sum_{\lambda=2}^{h+2}M_{h\lambda}(v)\,\Psi_{h+2-\lambda}. \tag{21}$$

Eine weitere Vereinfachung dieser Potenzreihenentwicklung von K erzielt man durch Einführung der Funktionen

$$F_h(c, v) = L_o(v)^h \, \Psi_h(c, v), \tag{22}$$

dann geht (21) über in

$$\frac{K_h}{\varphi(v)} = \frac{\Phi_h}{L_o(v)^h}, \quad \Phi_h = \frac{\partial F_{h+1}}{\partial v} + \\ + \sum_{\lambda=2}^{h+2} M_{h\lambda}(v) \, L_o(v)^{\lambda-2} F_{h+2-\lambda}. \tag{23}$$

Dementsprechend soll die oben mit $\mathfrak{K}$ bezeichnete willkürliche Funktion von x, c, v

$$\mathfrak{K} = \varphi(v) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{h+1}}{(h+1)!} \, \frac{\mathfrak{F}_h(c, v)}{L_o(v)^h} \tag{24}$$

angesetzt werden, unter Annahme irgendwelcher Funktionen $\mathfrak{F}_h$, die sämtlich für $v = c$ verschwinden. Auf diese Weise entsteht, wenn man noch den Differentialquotienten von $\mathfrak{K}$ nach v bildet

$$\frac{1}{\varphi(v)} \, \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial v} = \\ -\mathfrak{F}_o + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(x-v)^h}{h!} \, \frac{L_o(v) \dfrac{\partial \mathfrak{F}_{h-1}}{\partial v} - \mathfrak{F}_h - M_{h-1,1}(v) \, \mathfrak{F}_{h-1}}{L_o(v)^h} \tag{25}$$

durch die Nullsetzung des Koeffizienten einer jeden Potenz $(x-v)^h$ von $K + \dfrac{\partial \mathfrak{K}}{\partial v}$ die Rekursion der zu bestimmenden Funktionen F_h

$$0 = \frac{\partial F_{h-1}}{\partial v} + \left[\sum_{\lambda=2}^{h+2} M_{h\lambda}(v) \, L_o(v)^{\lambda-2} F_{h+2-\lambda} \right] - \\ - \mathfrak{F}_h + L_o(v) \, \frac{\partial \mathfrak{F}_{h-1}}{\partial v} - M_{h-1,1}(v) \, \mathfrak{F}_{h-1}, \quad h \geqq 0 \quad (\mathfrak{F}_{-1} = 0). \tag{26}$$

Ist insbesondere jeder der Koeffizienten $L_\varkappa(x)$ ein Polynom von x und $n - \varkappa$ der Höchstgrad von $L_\varkappa(x)$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots \mu$, so verschwindet $M_{h\lambda}(v)$ für $\lambda > n$, die Rekursion (26) wird demnach eine solche n-ter Stufe.

Aus $F_0 = 1$ ergeben sich die Funktionen F_1, F_2, eindeutig, weil sie für $v = c$ verschwinden müssen. Und zwar als Polynome von c, v, wenn die $L_\varkappa(x)$ Polynome von x sind, und wofern man auch die Funktionen $\mathfrak{F}_h$ als Polynome von c, v wählt.

Aus der Hauptrekursion (26) können andere abgeleitet werden, welche nur mehr die Variable v, aber nicht den Parameter c enthalten, z. B. dadurch, daß F_h und $\mathfrak{F}_h$ nach Potenzen von $c - v$ entwickelt werden,

$$F_h = \sum_\nu \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} F_{h\nu}(v), \quad \mathfrak{F}_h = \sum_\nu \frac{(c-v)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \mathfrak{F}_{h\nu}(v), \tag{27}$$

was durch Nullsetzung des Koeffizienten einer jeden Potenz $(c-v)^\nu$ in (26) eine Rekursion

$$F_{h+1,\,\nu+1} = F'_{h+1,\,\nu} + \sum_2^{h+2} M_{h\lambda} L_o^{\lambda-2} F_{h+2-\lambda,\,\nu} - (\mathfrak{F}_{h,\,\nu-1} +$$

$$+ L_o \mathfrak{F}_{h-1,\,\nu}) + (L_o \mathfrak{F}'_{h-1,\,\nu-1} - M_{h-1,\,1} \mathfrak{F}_{h-1,\,\nu-1}) \tag{28}$$

gültig für $h \geqq 0$, $\nu \geqq 0$ ergibt. Dabei hat man ein $\mathfrak{F}$ oder M mit einem negativen Index durch Null zu ersetzen.

Die Gleichung (28) enthält nur noch die Variable v, weil die Funktion φ, ebenso wie die Koeffizienten L als von c unabhängig vorausgesetzt wird. Sie bestimmt, mittels der Werte $F_{o\nu} = F_{ho} = 0$ außer $F_{00} = 1$, sukzessive die übrigen $F_{h\nu}$.

Die Willkürlichkeit der Funktionen $\mathfrak{F}_{h\nu}$, deren Wahl auch durch diejenige eines funktionalen Zusammenhanges mit den $F_{h\nu}$ geschehen kann, gestaltet die Bestimmung der Parameterlösung (2) auch zu einem reihentheoretischen Problem.

Eine andere Form von (28) bewirkt der Ansatz $\mathfrak{F}_{h\nu} = F'_{h+1,\,\nu+1} + P_{h\nu}$, wo auch die $P_{h\nu}$ willkürlich bleiben

$$F_{h+1,\,\nu+1} + L_0 F'_{h,\,\nu+1} = \sum_{\lambda=2}^{h+2} M_{h\lambda} L_0^{h-2} F_{h+2-\lambda,\,\nu} + L_0 F''_{h\nu} - M_{h-1,\,1} F'_{h\nu} -$$

$$-(P_{h,\,\nu-1} + L_0 P_{h-1,\,\nu}) + (L_0 P'_{h-1,\,\nu-1} - M_{h-1,\,1} P_{h-1,\,\nu-1}). \tag{28a}$$

In allen diesen Formeln (26) bis (28a), zur Bestimmung der F tritt die Zahl m nicht auf, sondern nur, neben n, die Zahl μ, es gilt eben diese Bestimmung genau so für die Differentialgleichung

$$L_0(x)\frac{d^\mu y}{d x^\mu}+L_1(x)\frac{d^{\mu-1} y}{d x^{\mu-1}}+\ldots L_\mu(x) y=0.$$

§ 2. Bemerkungen zu den Fällen $m=2$ und 3.

Aus den Reihenentwicklungen der Form $\sum \frac{(c-x)^k}{k!}\,\psi_k(x)$, welche für die in § 1 behandelten Parameterlösungen gelten, lassen sich Schlußfolgerungen ziehen.

Nimmt man in dem Integral $y=\int_x^c \varphi(v)\,\Psi(x,c,v)\,dv$ die Änderung der Integrationsvariablen

$$v=x+\varepsilon u,\quad \varepsilon=c-x$$

vor, so kann für genügend kleine ε und unter genügender Einschränkung des Integrationsweges

$$y=\int_0^1 \varphi(x+\varepsilon u)\,\Psi(x, x+\varepsilon, x+\varepsilon u)\,\varepsilon\, du \tag{1}$$

nach Potenzen von ε entwickelt werden. Weil nun $\Psi(x, x+\varepsilon, x+\varepsilon u)$ gemäß der Annahme (10) in § 1 mit der Reihe

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-\varepsilon u)^{m+h-2}}{(m+h-2)!}\,\Psi_h(x+\varepsilon,\ x+\varepsilon u),\quad \Psi_0=1 \tag{2}$$

zusammenfällt, so beginnt die gesuchte Potenzreihenentwicklung für y mit dem Term $(-1)^m\,\varphi(x)\,\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}$.

Im Falle $m=2$, der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=P_1(x)\frac{d y}{d x}+P_2(x) y \tag{3}$$

besitzt aber diejenige Parameterlösung y, deren Entwicklung nach Potenzen von ε den Anfangsterm $\varepsilon\,\varphi(x)$ aufweist, die besondere Eigenschaft, daß sie, als Funktion $\Phi(x, c)$ von x, c betrachtet, bei Vertauschung von x und c nur ihr Vorzeichen ändert.

Denn betrachtet man jene Parameterlösung $Y(x, c)$ von (3), deren Entwicklung nach Potenzen von ε mit $\frac{\varepsilon}{1!}$ beginnt und die nach einem früheren Satze der »Adjungierten« zu (3), mit c als der Unabhängigen, genügt

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial c^2} = -P_1(c)\frac{\partial Y}{\partial c} + [P_2(c) - P_1'(c)]\,Y \tag{4}$$

so muß y mit Y in dem Zusammenhang $\Phi(x, c) = \varphi(c)\,Y$ stehen und daher nach (4) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, c)}{\partial c^2} = P_1(c)\,\frac{\partial \Phi(x, c)}{\partial x} + P_2(c)\,\Phi(x, c) \tag{4a}$$

erfüllen. Hierin braucht man nur die voneinander unabhängigen Größen x, c zu vertauschen, um zu erkennen, daß auch $\Phi(c, x)$ eine Lösung von (3) ist. Und zwar beginnt die Entwicklung von $\Phi(x+\varepsilon, x)$ nach Potenzen von ε mit $-\varepsilon\,\varphi(x)$, aus diesem Grunde muß, wie behauptet, $\Phi(c, x) = -\Phi(x, c)$ sein, trotz der Wahlfreiheit der zur Bestimmung von y dienenden Funktion $\mathfrak{R}(x, c, v)$ in § 1.

Daß die Koeffizienten der Differentialgleichung (4a) mit der Unabhängigen c dieselben sind wie diejenigen der Differentialgleichung (3), bereitet dem Fall $m = 2$ eine Ausnahmsstellung. Dagegen wird für $m \geqq 3$ die Differentialgleichung in bezug auf c, welcher eine Parameterlösung mit dem Anfangsterm

$$(-1)^m\,\varphi(x)\,\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}$$

genügt, im allgemeinen komplizierter als die ursprünglich vorgelegte in bezug auf x. Beispielsweise für eine Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = P_1(x)\,\frac{d^2 y}{d x^2} + P_2(x)\frac{d y}{d x} + P_3(x)\,y \tag{5}$$

findet man, weil sie eine gemeinsame Lösung $Y(x, c)$ mit ihrer »Adjungierten in bezug auf c«.

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial c^3} = -P_1(c)\,\frac{\partial^2 Y}{\partial c_2} + \left[P_2(c) - 2P_1'(c)\right]\frac{\partial Y}{\partial c} -$$
$$- \left[P_3(c) - P_2'(c) + P_1''(c)\right] Y \tag{6}$$

besitzt, wobei die Potenzreihenentwicklung von Y nach den Anfangsterm $\frac{1}{2}\,\varepsilon^2$ aufweist und also $y = -\varphi(c)\,Y$ sein muß, daß die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial c^3} = 2\, P_1 \frac{\partial^2 y}{\partial c^2} + (P_2 - P_1^2 + P_1') \frac{\partial y}{\partial c} + (P_2' - P_1 P_2 - P_3) y, \quad (7)$$

unter Weglassung des Buchstaben c bei den P lautet, oder aber, wenn wieder $P_\varkappa(x) = \dfrac{-L_\varkappa(x)}{L_0(x)}$ gesetzt wird,

$$L_0 \frac{\partial^3 y}{\partial c^3} + 2\, L_1 \frac{\partial^2 y}{\partial c^2} + \left(L_2 + L_1' + L_1 \frac{L_1 - L_0'}{L_0}\right) \frac{\partial y}{\partial c} +$$

$$+ \left(L_2' - L_3 + L_2 \frac{L_1 - L_0'}{L_0}\right) = 0. \quad (8)$$

Betragen also die Höchstgrade der Polynome $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, respektive n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, so trifft dasselbe nur dann für die Koeffizienten von (8) zu, wofern

$$L_1(x) \frac{L_1(x) - L_0'(x)}{L_0(x)}, \quad L_2(x) \frac{L_1(x) - L_0'(x)}{L_0(x)} \quad (36)$$

Polynome von x der Höchstgrade $n-2$, $n-3$ sind.

§ 3. Weitere Beispiele hypergeometrischer Reihenentwicklungen.

Die Betrachtung des Falles $n = 3$, also einer der beiden Differentialgleichungen

$$L_0(x) y'' + L_1(x) y' + L_2(x) y = 0 \quad (1)$$

$$L_0(x) y''' + L_1(x) y'' + L_2(x) y' + L_3 y = 0, \quad (2)$$

wo die Polynome $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ höchstens vom 3., 2., 1. Grad sind, kann auf die letztere beschränkt werden, weil man in den Formeln für die ihr zugehörigen F nur $L_3 = 0$ zu setzen braucht, um sofort die F für die erstere zu erhalten. Jedenfalls sind die Polynome

$$M_{h1}(v) = L_1(v) + h\, L_0'(v) \quad (3)$$

$$M_{h2}(v) = L_2(v) + h\, L_1'(v) + \binom{h}{2} L_0''(v) \quad (4)$$

höchstens quadratisch, respektive linear und die

$$M_{h3}(v) = L_3 + h\, L_2' + \binom{h}{2} L_1'' + \binom{h}{3} L_0''' \quad (5)$$

Konstante. Die Rekursion (26), § 1, der Funktionen F_h verbunden mit der Wahl $\mathfrak{F}_h = 0$,

$$\frac{\partial F_{h+1}}{\partial v} + M_{h2}(v)\, F_h + M_{h3}\, L_0(v)\, F_{h-1} = 0 \tag{6}$$

soll nun für die Behandlung des einfachen Beispieles

$$x y''' + (a + \alpha x^2) y'' + \beta x y' + \gamma y = 0 \tag{7}$$

zur Anwendung kommen. Man findet alsdann y als Doppelintegral

$$y = \int\limits_x^c \varphi(v)\, d v \int\limits_v^x \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\beta_\mu^\lambda\, \mathfrak{C}_\lambda\, z_1^\lambda\, z_2^\mu}{\lambda!^2\, (\lambda+\mu)!\, \mu!}\, d t \tag{8}$$

über eine, für alle (endlichen) Werte der Variablen

$$z_1 = \frac{c^2 - v^2}{2 v^2}\, \frac{t^2 - v^2}{2},\quad z_2 = \frac{c^2 - v^2}{2 v^2}\, (x - t)\, (t - v) \tag{9}$$

konvergente hypergeometrische Doppelreihe mit den Konstanten

$$\beta_0^\lambda = 1,\quad \beta_{\mu+1}^\lambda = \beta_\mu^\lambda\, [\beta + 2\, (\lambda + \mu)\, \alpha] \tag{10}$$

$$\mathfrak{C}_0 = 1,\quad \mathfrak{C}_{\lambda+1} = \mathfrak{C}_\lambda\, [\gamma + \lambda\, \beta + \lambda\, (\lambda - 1)\, \alpha]. \tag{11}$$

Beweis: Die Polynome M in (4), (5) haben für die Differentialgleichung (7) die Werte

$$M_{h,\,2} = \beta_{2h}\, v,\quad \beta_h = \beta + h\, \alpha \tag{12}$$

$$M_{h,\,3} = \gamma_h = \gamma + h\, \beta + h\, (h - 1)\, \alpha, \tag{13}$$

und man genügt der nach (6) gebildeten Rekursion für die F_h

$$\frac{\partial F_{h+1}}{\partial v} + (\beta_{2h}\, F_h + \gamma_h\, F_{h-1})\, v = 0 \tag{14}$$

durch die Annahme, daß $F_h(c, v)$ ein Polynom $F_h(\zeta)$ der Variabeln $\zeta = \frac{1}{2}(c^2 - v^2)$ ist,

$$F_h(\zeta) = \sum_{\varkappa = 0}^{\frac{1}{2} h} a_{h\,\varkappa}\, \zeta_{h-\varkappa}, \tag{15}$$

wobei bedingungsgemäß $F_h(0)$ für $h \geqq 1$ verschwindet. Die Substitution dieses Ansatzes in die Rekursion (14) läßt die Koeffizienten a_h durch die Bedingungen

$$(h+1-\varkappa)\, a_{h+1,\varkappa} = \beta_{2h}\, a_{h\varkappa} + \gamma_h\, a_{h-1,\varkappa-1} \tag{16}$$

bestimmen, und zwar, wie nunmehr nachzuweisen, mit dem Werte

$$a_{h\varkappa} = \frac{1}{(h-2\varkappa)!} \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \frac{\binom{h-\lambda}{\varkappa-\lambda} \beta^{\lambda}_{h-\varkappa-\lambda}\, \mathfrak{G}_\lambda}{\lambda!\, 2^{\varkappa-\lambda}} \tag{17}$$

Denn für $\varkappa = 0$ wird (16) offenbar durch $a_{h0} = \dfrac{\beta^0_h}{h!}$ befriedigt, und für $\varkappa \geqq 1$ folgt aus (16), indem man von der Identität

$$\gamma_h\, \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{G}_{\lambda+1} + (h-\lambda)\, \beta_{h+\lambda-1}\, \mathfrak{G}_\lambda \tag{18}$$

Gebrauch macht, durch Nullsetzung des Koeffizienten eines jeden $\mathfrak{G}$ als zu erfüllende Bedingung

$$(h+1-\varkappa)\binom{h+1-\lambda}{\varkappa-\lambda} \beta^{\lambda}_{h+1-\varkappa-\lambda} =$$
$$= \beta_{2h}\,(h+1-2\varkappa)\binom{h-\lambda}{\varkappa-\lambda}\beta^{\lambda}_{h-\varkappa-\lambda} + \lambda\binom{h-\lambda}{\varkappa-\lambda}\beta^{\lambda-1}_{h+1-\varkappa-\lambda} +$$
$$+ 2\,\beta_{h+\lambda-1}\,(h-\lambda)\binom{h-1-\lambda}{\varkappa-1-\lambda}\beta^{\lambda}_{h-\varkappa-\lambda}$$

oder nach Division durch $\beta^{\lambda}_{h-\varkappa-\lambda}$ eine in α, β linear homogene Gleichung

$$(h+1-\varkappa)\binom{h+1-\lambda}{\varkappa-\lambda}[\beta+2(h-\varkappa)\alpha] =$$
$$= [\beta+2h\alpha]\,(h+1-2\varkappa)\binom{h-\lambda}{\varkappa-\lambda} + \lambda\binom{h-\lambda}{\varkappa-\lambda}[\beta+2(\mu-1)\alpha] +$$
$$+ 2[\beta+(h+\lambda-1)\alpha]\binom{h-\lambda}{\varkappa-\lambda}(\varkappa-\lambda),$$

welche in der Tat erfüllt ist.

Schreibt man noch $h-\varkappa$ statt $\varkappa$ in dem durch (15), (17) bestimmten Werte von F_h, so resultiert

$$\Psi = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{h-1}}{(h+1)!} \frac{F_h}{v^h},$$

$$F_h = \sum_{\varkappa=\frac{h}{2}}^{h} \frac{\zeta^{\varkappa}}{(2\varkappa-h)!} \sum_{\lambda=0}^{h-\varkappa} \frac{\binom{h-\lambda}{\varkappa} \beta^{\lambda}_{\varkappa-\lambda} \mathfrak{C}_{\lambda}}{\lambda!\, 2^{h-\varkappa-\lambda}}. \tag{19}$$

Hierin erstreckt sich die Summation bezüglich h auf den Ausdruck

$$= \sum_{h=\varkappa+\lambda}^{2\varkappa} \frac{(x-v)^{h+1}}{(h+1)!\, v} \frac{\binom{h-\lambda}{\varkappa}}{(2\varkappa-h)!\, 2^{h-\varkappa-\lambda}}, \tag{20}$$

den man durch Einführung der Summationsvariabeln $i = h-\varkappa-\lambda$ als hypergeometrische Reihe

$$\frac{(x-v)^{\varkappa+\lambda+1}\, v^{-\varkappa-\lambda}}{(\varkappa+\lambda+1)!\, (\varkappa-\lambda)!} \sum_{i=0}^{\varkappa-\lambda} \frac{\left|\underline{\lambda-\varkappa}\right.^{i}}{\left|\underline{\varkappa+\lambda+2}\right.^{i}} \frac{\left|\underline{\varkappa+1}\right.^{i}}{i!} \left(-\frac{x-v}{2v}\right)^{i}$$

auf bekannte Art in Quadraturform darstellt

$$\frac{(x-v)^{\varkappa+\lambda+1}}{v^{\varkappa+\lambda}} \int_0^1 \frac{\vartheta^{\varkappa}}{\varkappa!} \frac{(1-\vartheta)^{\lambda}}{\lambda!} \frac{\left(1+\frac{x-v}{2v}\vartheta\right)^{\varkappa-\lambda}}{(\varkappa-\lambda)!}\, d\vartheta. \tag{21}$$

Die Variabelntransformation $t = v+(x-v)\vartheta$ verwandelt (21) in

$$\frac{1}{v^{2\varkappa}} \int_v^x \frac{(t-v)^{\varkappa}}{\varkappa!} \frac{(x-t)^{\lambda}}{\lambda!} \frac{\left(\frac{t+v}{2}\right)^{\varkappa-\lambda}}{(\varkappa-\lambda)!}\, dt, \tag{21}$$

welcher Wert in (19) substituiert, nach Ersetzung von $\varkappa$ durch $\lambda+\mu$ die Formel

$$\Psi = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{\zeta^{\lambda+\mu}}{v^{2(\lambda+\mu)}} \frac{\beta^{\lambda}_{\mu} \mathfrak{C}_{\lambda}}{\lambda!} \cdot$$

$$\int_v^x \frac{(t-v)^{\lambda+\mu}}{(\lambda+\mu)!} \frac{(x-t)^{\lambda}}{\lambda!} \frac{\left(\frac{t+v}{2}\right)^{\mu}}{\mu!}\, dt. \tag{23}$$

liefert und mithin (8) verifiziert.

Ebenfalls durch hypergeometrische Reihenentwicklung läßt sich für das Beispiel

$$x^2 y''' + (p\,x + \alpha\,x^2)\,y'' + (q + \beta\,x)\,y' + \gamma\,y = 0 \tag{24}$$

die Parameterlosung (2) finden, vgl. (39), wenn man zur Bestimmung der F die Gleichungen (28a) des § 1 verwendet und dort alle P gleich Null annimmt. Nachdem für die Differentialgleichung (24) die Polynome M durch

$$\left.\begin{aligned} M_{h1}(v) &= (p + 2\,h)\,v + \alpha\,v^2 \\ M_{h2}(v) &= q_h + \beta_{2h}\,v,\ q_h = q + h\,p + h\,(h-1),\ \beta_h = \beta + h\,\alpha \\ M_{h3} &= \gamma_h = \gamma + h\,\beta + h\,(h-1) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

gegeben sind, so folgen hieraus als Bedingungsgleichungen für die Polynome $F_{h\,\nu}$

$$\begin{aligned} F_{h+1,\,\nu+1} + v^2 F'_{h,\,\nu+1} = v^2 F''_{h\,\nu} - \{(p + 2\,h - 2)\,v + \alpha\,v^2\}\,F'_{h\,\nu} + \\ + (q_h + \beta_{2\,h})\,F_{h\,\nu} + \gamma_h\,v^2\,F_{h-1,\,\nu}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Daher liefert die Entwicklung der $F_{h\,\nu}$ nach Potenzen von v

$$F_{h\,\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} a^{(\varkappa)}_{h\,\nu}\,v^{h-\varkappa} \tag{27}$$

für die Koeffizienten $a^{(\varkappa)}_{h\,\nu}$ die Rekursionen

$$a^{(\varkappa)}_{h+1,\,\nu+1} + (h-\varkappa)\,a^{(\varkappa)}_{h\,\nu+1} = \beta_{h+\varkappa}\,a^{(\varkappa)}_{h\,\nu} + q_{\varkappa-1}\,a^{(\varkappa-1)}_{h\,\nu} + \gamma_h\,a^{(\varkappa)}_{h-1,\,\nu}, \tag{28}$$

aus denen hervorgeht, daß $a^{(\varkappa)}_{h\,\nu}$ in seiner Abhängigkeit von p, q, α, β, γ sich als ein Produkt der Form $\theta_\varkappa\,A^{(\varkappa)}_{h\,\nu}$ darstellen läßt, wo $\theta_\varkappa$ durch

$$\theta_\varkappa = q_0\,q_1 \quad q_{\varkappa-1} \text{ für } \varkappa \geqq 1,\ \theta_0 = 1 \tag{29}$$

definiert ist, während die Größe $A^{(\varkappa)}_{h\,\nu}$ nur mehr von α, β, γ abhängt. Durch diesen Ansatz $a^{(\varkappa)}_{h\,\nu} = \theta_\varkappa\,A^{(\varkappa)}_{h\,\nu}$ entsteht aus (28) die Gleichung

$$A^{(\varkappa)}_{h+1.\,\nu+1} + (h-\varkappa)\,A^{(\varkappa)}_{h,\,\nu+1} = \beta_{h+\varkappa}\,A^{(\varkappa)}_{h\,\nu} + A^{(\varkappa-1)}_{h\,\nu} + \gamma_h\,A^{(\varkappa)}_{h-1,} \tag{30}$$

Um zunächst die Größen $A^{(\varkappa)}_{h\,\nu}$ als Funktionen von zu untersuchen, hat man sie nach den Produkten $\mathfrak{C}_\lambda$, vgl. (11), zu entwickeln

$$A_{h\,\nu}^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=0}^{h-\nu} A_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}\,\mathfrak{C}_{\lambda} \tag{31}$$

und erhält aus (30), mit Rücksicht auf die Umformung (18), für die nur noch von β, α abhängigen Koeffizienten $A_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}$ die Rekursionen

$$\begin{aligned} A_{h+1,\,\nu+1}^{\varkappa\,\lambda} + (h-\varkappa)\,A_{h,\,\nu+1}^{\varkappa\,\lambda} &= \beta_{h+\varkappa}\,A_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda} + A_{h\,\nu}^{\varkappa-1,\,\lambda} + \\ &+ (h-\lambda-1)\,\beta_{h+\lambda}\,A_{h-1,\,\nu}^{\varkappa\,\lambda} + A_{h-1,\,\nu}^{\varkappa,\,\lambda-1}, \end{aligned} \tag{32}$$

wobei von vornherein $A_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}$, sowohl für $\nu < \varkappa+\lambda$ als für $h < \nu+\lambda$ Null gesetzt werden darf, wie man durch Schluß von ν auf $\nu+1$, respektive von h auf $h+1$ ersieht. Zur weiteren Bestimmung der $A_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}$ sind nur noch die Größen $\mathfrak{B}_{\mu}^{\lambda}$ mit der Definition

$$\mathfrak{B}_0^{\lambda} = 1,\ \mathfrak{B}_{\mu+1}^{\lambda} = \mathfrak{B}_{\mu}^{\lambda}\,[\beta + (\lambda+\mu)\,\alpha] \tag{33}$$

einzuführen. Es soll nun verifiziert werden, daß $A_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}$ gleich dem Produkt einer numerischen Größe $C_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}$ mit $\mathfrak{B}_{\nu-\varkappa-\lambda}^{\varkappa+\lambda}$ ist. Alsdann folgt für diesen Ansatz aus (32), dort h, ν, durch $h-1$, $\nu-1$ ersetzt, daß die Gleichung

$$\begin{aligned} &[C_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda} + (h-1-\varkappa)\,C_{h-1,\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}]\,\mathfrak{B}_{\nu-\varkappa-\lambda}^{\varkappa+\lambda} = \\ &= [\beta_{h+\varkappa-1}\,C_{h-1,\,\nu-1}^{\varkappa\,\lambda} + (h-\lambda-2)\,\beta_{h+\lambda-1}\,C_{h-2,\,\nu-1}^{\varkappa\,\lambda}]\,\mathfrak{B}_{\nu-\varkappa-\lambda-1}^{\varkappa+\lambda} + \\ &\qquad + [C_{h-1,\,\nu-1}^{\varkappa-1,\,\lambda} + C_{h-2,\,\nu-1}^{\varkappa,\,\lambda-1}]\,\mathfrak{B}_{\nu-\varkappa-\lambda}^{\varkappa+\lambda-1} \end{aligned} \tag{34}$$

erfüllt werden muß. Unterscheidet man in (34) die beiden Fälle $\nu = \varkappa+\lambda$ und $\nu > \varkappa+\lambda$, so entsteht im ersteren Fall, für welchen $\mathfrak{B}_{\nu-\varkappa-\lambda-1}^{\varkappa+\lambda}$ durch Null zu ersetzen ist

$$C_{h,\,\varkappa+\lambda}^{\varkappa\,\lambda} + (h-1-\varkappa)\,C_{h-1,\,\varkappa+\lambda}^{\varkappa\,\lambda} = C_{h-1,\,\varkappa+\lambda-1}^{\varkappa-1,\,\lambda} + C_{h-2,\,\varkappa+\lambda-1}^{\varkappa,\,\lambda-1} \tag{34a}$$

und im letzteren Fall, nach Division durch $\mathfrak{B}_{\nu-\varkappa-\lambda-1}^{\varkappa+\lambda}$

$$\begin{aligned} &[C_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda} + (h-1-\varkappa)\,C_{h-1,\,\nu}^{\varkappa\,\lambda}]\,\beta_{\nu-1} = \\ &= [\beta_{h+\varkappa-1}\,C_{h-1,\,\nu-1}^{\varkappa\,\lambda} + (h-\lambda-2)\,C_{h-2,\,\nu-1}^{\varkappa\,\lambda}] + \\ &\qquad + [C_{h-1,\,\nu-1}^{\varkappa-1,\,\lambda} + C_{h-2,\,\nu-1}^{\varkappa,\,\lambda-1}]\,\beta_{\varkappa+\lambda-1} \end{aligned} \tag{35}$$

eine in α, β lineare homogene Gleichung, so daß die Größen C bei $\nu > \varkappa+\lambda$ simultan zwei Rekursionen erfüllen müssen. Daß allen diesen Bedingungen der Ansatz entspricht

$$C_{h\,\nu}^{\varkappa\,\lambda} = \frac{(-1)^{h-\nu-\lambda}\,\overline{|\,\nu-\varkappa-\lambda+1}^{\,h-\nu+\varkappa}}{\varkappa!\,\lambda!}\binom{h-\nu-1}{h-\nu-\lambda} \tag{36}$$

beweist man ohne Schwierigkeit, und zwar betreffs (35) getrennt für $h=\nu+\lambda$ und $h>\nu+\lambda$.

Nach Substitution der so ermittelten Werte $F_{h\,\nu}$ in die Funktion Ψ läßt sich wieder die auf h bezügliche Summation durch eine Quadratur darstellen: In dem Werte von Ψ

$$\sum_h\sum_\nu\sum_\varkappa\sum \frac{(x-v)^{h+1}}{(h+1)!\;v^{h+\varkappa}}\;\frac{(c-v)^\nu}{\nu!}\;\frac{\theta_\varkappa\,\mathfrak{C}_\lambda}{\varkappa!\,\lambda!}\binom{h-\nu-1}{h-\nu-\lambda}$$

$$(-1)^{h-\nu-\lambda}\,\overline{|\,\nu-\varkappa-\lambda+1}^{\,h-\nu+\varkappa}\;\mathfrak{B}^{\varkappa+\lambda}_{\nu-\varkappa-\lambda}$$

betrifft die Summation über h den Ausdruck

$$H=\sum_{h=\nu+\lambda}^{\infty}\frac{(-1)^h\,(x-v)^h\,\overline{|\,\nu+1-\varkappa-\lambda}^{\,h-\nu+\varkappa}}{(h+1)!\;v^h}\binom{h-\nu-1}{h-\nu-\lambda} \tag{37}$$

der durch Einführung des Summationsbuchstaben $j=h-\nu-\lambda$ die hypergeometrische Reihenform

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\overline{|\,\nu+1-\varkappa-\lambda}^{\,j+\varkappa+\lambda}}{(j+\lambda+\nu+1)!}\;\frac{\overline{|\,\lambda}^{\,j}}{j!}\;\xi^{j+\lambda+\nu},\qquad \xi=-\frac{x-v}{v}$$

annimmt und durch das Integral

$$H=\frac{\xi^{\lambda+\nu}}{(\nu-\varkappa-\lambda)!\,\lambda!}\int_0^1\vartheta^\nu\left(\frac{1-\vartheta}{1-\xi\,\vartheta}\right)^{\lambda}d\,\vartheta \tag{38}$$

darstellbar ist. Nunmehr ergibt die Transformation $t=(x-v)\,\vartheta+v$ der Integrationsvariabeln

$$\Psi=\sum\sum\sum\frac{(c-v)^\nu}{\nu!\,v^{\varkappa+\nu}}\;\frac{\theta_\varkappa\,\mathfrak{C}_\lambda\,\mathfrak{B}^{\varkappa+\lambda}_{\nu-\varkappa-\lambda}}{\varkappa!\,\lambda!^2\,(\nu-\varkappa-\lambda)!}\int_v^x\frac{(t-v)^\nu\,(x-t)^\lambda}{t^\lambda}\,d\,t,$$

worin man noch statt $\nu-\varkappa-\lambda$ einen neuen Summationsbuchstaben zu gebrauchen hat, um alle Summationsvariabeln unabhängig voneinander zwischen 0 und ∞ variieren zu lassen Durch $\mu = \nu - \varkappa - \lambda$ erhält y die Gestalt eines Doppelintegrales

$$= \int_x^c \varphi(v) d v \int_v^x \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{z_1^\varkappa z_2^\lambda z_3^\mu \theta_\varkappa \mathfrak{C}_\lambda \mathfrak{B}_\mu^{\varkappa+\lambda}}{\varkappa! \lambda!^2 \mu! (\varkappa+\lambda+\mu)} d t \tag{39}$$

über eine dreifache hypergeometrische Reihe mit den Variabeln

$$z_1 = \frac{(c-v)(t-v)}{v^2}, \quad z_2 = \frac{(c-v)(t-v)(x-t)}{t v}, \quad z_3 = \frac{(c-v)(t-v)}{v}, \tag{40}$$

die für alle z_3 und genügend kleine $|z_1|$ konvergiert.[1]

§ 4. Über die Parameterlösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Während für eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher außer den Differentialquotienten der gesuchten Funktion diese selbst gar nicht oder höchstens linear vorkommt

$$\Omega[z] = \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\varkappa=1}^\infty P_\varkappa(x, x_1, x_2, \quad x_n) \frac{\partial z}{\partial x_\varkappa} + + R(x, x_1, . \quad x_n) z = K(x, \; x_1 \ldots x_n) \tag{1}$$

eine Parameterlösung, d. h. eine Lösung der Form

$$z = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(c-x)^\nu}{\nu!} f_\nu(x, x_1, \quad x_n) \tag{2}$$

mit einem willkürlichen Parameter c und vorgegebenem Anfangsterm $f_0(x, x_1 \ldots x_n)$ sofort, wenigstens formal, zu finden ist, da man in dem Substitutionsresultat der Reihe (2) für z nur den Koeffizienten einer jeden Potenz von $c - x$ Null zu setzen hat, um die f_ν sukzessive aus

[1] Der Schlußsatz der vorigen Mitteilung ist dahin zu erweitern, daß die dort erörterte Reihe für alle ζ_1, ζ_2 konvergiert.

$$f_{\nu+1} = \Omega[f_\nu] \text{ für } \nu \geqq 1,\; f_1 = \Omega[f_0] - K \tag{3}$$

zu erhalten, muß man im Falle einer linearen Differentialgleichung, welche die Abhängige z sonstwie enthält, vorerst in bekannter Weise z als implizite Funktion durch eine Gleichung $u(x, x_1 \ldots x_n, z) = 0$ definieren und u aus einer Differentialgleichung des Typus (1) mit den Unabhängigen $x, x_1 \ldots x_n, z$ (mit $R = 0, K = 0$) bestimmen. Entsprechend (2) ist aber dann die Funktion u eindeutig in eine Reihe

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(c-x)^\nu}{\nu!} \varphi_\nu(x, x_1, \ldots x_n, z) \text{ mit } \varphi_0 = z - f_0(x, x_1, \ldots x_n) \tag{4}$$

entwickelbar und die Auflösung der Gleichung $u = 0$ oder die wirkliche Darstellung von z als Potenzreihe bezüglich $\varepsilon = c - x$ aus der Gleichung

$$z = f_0(x, x_1, \ldots x_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, x_1, \ldots x_n, z) \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} \tag{5}$$

in der $x, x_1, \ldots x_n$ nur als Parameter figurieren, bietet ein weiteres Reihenproblem.

Betrachtet man nunmehr eine Differentialgleichung des Typus (1), so ist die Konvergenz der Reihe (2) jedenfalls soweit sichergestellt, als die Differentialgleichung mit den $n+2$ Unabhängigen $\varepsilon, x, x_1, \ldots x_n$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} + \sum_{\varkappa=1}^{n} P_\varkappa(x, x, \ldots x_n) \frac{\partial z}{\partial x_\varkappa} + $$

$$+ R(x, x_1, \ldots x_n) = K(x, x_1, \ldots x_n) \tag{6}$$

eine Lösung besitzt, welche sich für $\varepsilon = 0$ auf $f_0(x, x_1, \ldots x_n)$ reduziert.

Bezüglich der Entwicklungsfunktionen f_ν in (2) ist noch zu bemerken, daß sie zwar als von c frei vorausgesetzt werden mußten, um ihre Definitionsgleichungen (3) als notwendige nachzuweisen, aber auch wenn f_0 als von c abhängig angenommen würde und $f_1, f_2, \ldots$ sukzessive durch (3) definiert werden, reicht dies hin, um $z = \sum_0^\infty f_\nu \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}$ zu einer Lösung von (1) zu machen.

Die Rückführung der Frage nach der allgemeinsten Lösung z von (1) mit willkürlichem Anfangsterm $f_0 = f(x, x_1, \ldots x_n)$, d. h. mit der Bedingung, daß z für $x = c$ den willkürlich vorgeschriebenen Funktionswert $f(c, x_1, \ldots x_n)$ besitzen soll, auf die Bestimmung von $n+1$ ausgezeichneten Parameterlösungen geschieht folgenderart.

Nennt man ζ die Parameterlösung von $\Omega[z] = 0$ mit dem Anfangsterm $f_0 = 1$ (es ist $\zeta = 1$ bei $R = 0$) und χ_1, respektive $\chi_2, \ldots \chi_n$ diejenige Parameterlösung von

$$\Omega_0[z] = \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\varkappa=1}^{n} P_\varkappa(x, x_1, \ldots x_n) \frac{\partial z}{\partial x_\varkappa} = 0, \tag{7}$$

welche durch den Anfangsterm $f_0 = x_1$, respektive $f_0 = x_2, \ldots f_0 = x_n$ definiert ist, so stellt offenbar

$$z = \zeta f(c, \chi_1, \ldots \chi_n) = \zeta f(x+\varepsilon, \chi_1, \ldots \chi_n) \tag{8}$$

die gesuchte Parameterlösung von $\Omega[z] = 0$ vor, die ausgezeichneten Lösungen $\zeta, \chi_1, \ldots \chi_n$ ergeben sich dabei als die Potenzreihen

$$\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{0\nu} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}, \quad f_{00} = 1, \; f_{0,\nu+1} = \Omega[f_{0\nu}] \tag{9}$$

$$\chi_\varkappa = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\varkappa\nu} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}, \quad f_{\varkappa 0} = x_\varkappa, \; f_{\varkappa,\nu+1} = \Omega_0[f_{\varkappa\nu}]. \tag{10}$$

Ist insbesondere der vorgeschriebene Funktionswert von für $x = c$ in der einfacheren Form $f(x_1, \ldots x_n)$ unabhängig von c gegeben, so entsteht aus (8) die Lösungsform

$$z = \zeta f(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n).$$

Für eine inhomogene Differentialgleichung $\Omega[z] = K$ findet man, weil der partielle Differentialquotient nach ε einer jeden ihrer Parameterlösungen die homogene Differentialgleichung $\Omega[z] = 0$ erfüllen muß, vorerst diejenige Lösung $\mathfrak{z}$, welche für $\varepsilon = 0$ verschwindet, als Potenzreihe gemäß (3)

$$\mathfrak{z} = -K\varepsilon - \Omega[K] \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots$$

und daher $\partial \mathfrak{z} / \partial \varepsilon$ als Lösung von $\Omega[z] = 0$ mit dem Anfangsterm $(- K)$, nach dem Satze (8)

$$\mathfrak{z} = -\int_0^{\varepsilon} K(x + \varepsilon, \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n)\, \zeta\, \partial \varepsilon. \tag{12}$$

In dem Integral sind $\zeta, \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$ als Funktionen von $\varepsilon, x, x_1, \ldots x_n$ zu betrachten. Hienach ist auch $\lg. \zeta = \int_0^{\varepsilon} R(x + \varepsilon, \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n)\, \partial \varepsilon$.

Die Summe der rechten Seiten von (8) und (12) gibt alsdann diejenige Parameterlösung von $\Omega[z] = K$, welche sich für $x = c$ auf $f(c, x_1, \ldots x_n)$ reduziert, d. h. den Anfangsterm $f(x, x_1 \ldots x_n)$ besitzt.